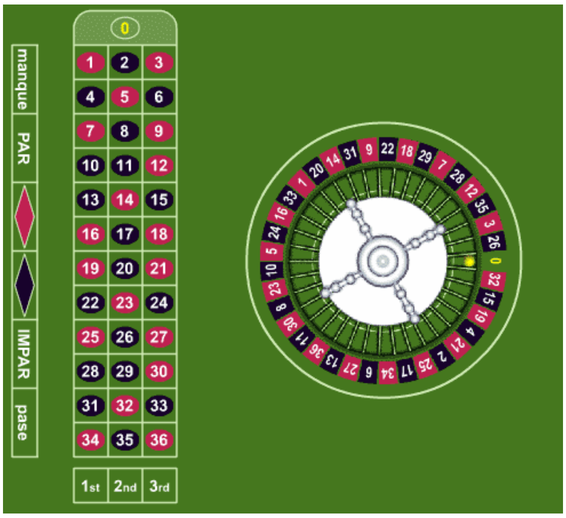
"EL JUEGO DE LA RULETA"

En este artículo, mediante el análisis de algunos aspectos del conocido juego de la ruleta, proponemos una introducción a los conceptos de *variable aleatoria* y *esperanza matemática*. Asimismo, es una buena oportunidad para tomar conciencia sobre los riesgos del juego por dinero.

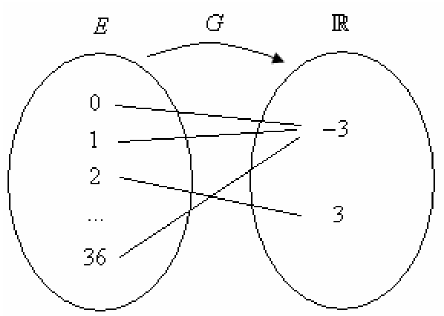
Dada la popularidad del juego, omitiremos una explicación sobre sus reglas básicas. Quién lo desee encontrará el reglamento, por ejemplo, en numerosas páginas de Internet. Para facilitar la referencia, proporcionamos a continuación una representación de una ruleta y un tablero de juego, comúnmente llamado *paño*.



Los resultados posibles en cada jugada son 0, 1, 2,…, 36. En el análisis del juego, tales resultados no son importantes por sí mismos, sino por las ganancias o pérdidas que puedan ocasionar. Tomemos un ejemplo concreto: un jugador apuesta 3 fichas al color negro.

Si en la ruleta sale el "0" o un número colorado, el jugador pierde sus 3 fichas, es decir, tiene una *ganancia de* –3. En caso contrario, el jugador recupera sus fichas y el casino le entrega 3 más, con lo cual hay una *ganancia de* 3.

Podemos pensar entonces en una función *G*, que transforme cada resultado posible de la ruleta en la correspondiente ganancia del jugador. Por ejemplo, como el "4" es negro y el "9" es colorado, tendremos $G(4) = 3$ y $G(9) = -3$. Como ya hemos observado, el "0" no beneficia al jugador, de modo que $G(0) = -3$.



Esta situación se presenta con mucha frecuencia en diferentes contextos. Como sabemos, un experimento aleatorio (como lanzar la bolilla en la ruleta) arroja resultados que pueden ser cualitativos o cuantitativos. Por ejemplo, un producto manufacturado puede resultar *defectuoso* o *no defectuoso*; una persona puede tener preferencia por alguna de las gaseosas *A*, *B* o *C*; al lanzar la bolilla en la ruleta podemos obtener cualquiera de los números 0, 1, 2, 3,…, 36. Muchas veces es útil asignar un valor numérico a cada uno de los resultados posibles. En el caso del jugador que apostó 3 fichas al color negro, la función $G:\{0,1,2,...,36\}\to\mathbb{R}$ es la que lleva a cabo tal asignación.

Esto motiva las siguientes definiciones:

"Dado un experimento aleatorio, el conjunto de sus resultados posibles, que denotaremos por E, se denomina <u>*espacio muestral*</u> *de dicho experimento.*

Para cada característica de los elementos de E se puede definir una función $X:E\to\mathbb{R}$*, llamada* <u>*variable aleatoria*</u>*, cuyo valor* $X(e)$ *en cada elemento e de E proporciona información sobre la naturaleza de e con respecto a la característica estudiada."*

Por ejemplo, si estuviéramos interesados en investigar sobre las alturas de los argentinos, el espacio muestral *E* sería el conjunto de todos los argentinos y la variable aleatoria *X* sería la función $X:E\to\mathbb{R}$ que a cada argentino le asigna su altura (la cual se mide con un número real). Si, en cambio, quisiéramos indagar sobre los pesos de los argentinos, el espacio muestral *E* sería el mismo, pero deberíamos considerar una variable aleatoria distinta $Y:E\to\mathbb{R}$, que a cada argentino le asigne su peso.

Retomando nuestro ejemplo, un jugador apostó 3 fichas al color negro. El espacio muestral es $E=\{0,1,2,...,36\}$. La función $G:E\to\mathbb{R}$ es una variable aleatoria que mide las ganancias o pérdidas posibles del jugador. Si *k* es un número colorado, entonces $G(k)=-3$. Si *k* es negro, tenemos $G(k)=3$. Por último $G(0)=-3$.

Observar que hay 19 casos que perjudican al jugador, mientras que solamente 18 lo favorecen. Esto se debe a la presencia del "cero", que no es considerado ni colorado ni negro. Muchas veces ignorado y desestimado, el cero de la ruleta desequilibra el juego en beneficio del casino y coloca al jugador en inferioridad de condiciones. El desnivel es mucho más notorio en aquellas ruletas que tienen "cero" y "doble cero".

Para el análisis de la situación, es importante conocer las probabilidades de cada ganancia posible. Las detallamos a continuación:

x	-3	3
$P(G=x)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

Esta tabla define una función que asigna una probabilidad a cada ganancia posible. Se trata de una *función de probabilidad*, concepto que definimos a continuación:

"Supongamos que una variable aleatoria X toma los valores x_1, $x_2, \dots, x_n$. *Se llama* <u>*función de probabilidad*</u> *a la función f que a cada uno de tales valores le asigna su correspondiente probabilidad. En símbolos* $f(x_i) = P(X = x_i)$*."*

Observar que una función de probabilidad *f* necesariamente satisface las condiciones siguientes:

(i) $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) = 1$

(ii) $f(x_i) \geq 0$ para todos los índices *i*.

Recíprocamente, toda función que verifique (i) y (ii) es útil como modelo de probabilidad.

Volvamos a nuestro ejemplo e interpretemos los resultados de la tabla anterior. La probabilidad $\frac{19}{37}$ indica que, a largo plazo, el jugador habrá perdido un promedio de 19 veces por cada 37 jugadas. Misma interpretación para $\frac{18}{37}$. Luego, a largo plazo, el jugador:

- <u>Perdió</u> un promedio de $19 \cdot 3 = 57$ fichas por cada 37 jugadas;
- <u>Ganó</u> un promedio de $18 \cdot 3 = 54$ fichas por cada 37 jugadas.

A fin de cuentas, a largo plazo, el jugador pierde 3 fichas por cada 37 jugadas. Entonces, el *resultado esperado* en 37 juegos será una "ganancia de –3". Formalmente, se dice que "la ganancia *G* tiene una esperanza matemática de $-\frac{3}{37}$". Se escribe:

$$E(G) = -\frac{3}{37}$$

Reflexionando sobre los cálculos que llevaron a este resultado, vemos que:

$$E(G) = -3 \cdot \frac{19}{37} + 3 \cdot \frac{18}{37}$$

Esto motiva la siguiente definición:

"Si una variable aleatoria finita X puede tomar los valores x_1, $x_2, \dots,$ x_n *con probabilidades respectivas* p_1, $p_2, \dots,$ p_n, *se llama* <u>*esperanza matemática*</u> *de X (o valor esperado de X) a:*

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n \text{ ''}$$

Aunque en principio esta definición pueda resultar un tanto abstracta, conviene tener en mente que la esperanza matemática no es más que un promedio. En nuestro ejemplo, se espera que el jugador pierda, en promedio, 3 fichas por cada 37 jugadas.

Una esperanza negativa indica que el jugador pierde a largo plazo. Una esperanza positiva diría que el jugador gana a largo plazo. Una esperanza nula nos ubica en una situación equitativa.

Por lo tanto, el jugador debería intentar distribuir sus fichas en el paño de manera tal que maximice $E(G)$. Eso intentaremos en la siguiente actividad.

En grupos de 2 ó 3 alumnos deberán calcular esperanzas para diferentes apuestas. Cada grupo analizará dos apuestas: una propuesta por el docente y otra propuesta por ellos. Grupos diferentes recibirán casos diferentes. Por ejemplo:

A) 3 fichas al negro; 1 ficha al once.

B) 1 ficha al rojo; 4 fichas a los números pares.

C) 5 fichas a la primera columna; 1 ficha al dos.

A modo de ejemplo, resolvemos el caso A:

- Si en la ruleta sale el número once, que es negro, el jugador gana 35 fichas por el pleno y 3 fichas por la apuesta de color. Luego $G = 38$. Esto ocurre con probabilidad $\frac{1}{37}$.
- Si sale un número negro diferente del once, el jugador pierde la ficha que colocó sobre el once, pero gana 3 fichas por la apuesta de color. Luego $G = 2$. Esto ocurre con probabilidad $\frac{17}{37}$.
- Si sale el cero o un número rojo, el jugador pierde todas sus fichas. En este caso $G = -4$, con una probabilidad de $\frac{19}{37}$.

x	-4	2	38
$f(x) = P(G = x)$	$\frac{19}{37}$	$\frac{17}{37}$	$\frac{1}{37}$

Por lo tanto:

$$E(G) = -4 \cdot \frac{19}{37} + 2 \cdot \frac{17}{37} + 38 \cdot \frac{1}{37} = -\frac{4}{37}$$

Para las otras apuestas consideradas se obtiene:

B) $E(G) = -\frac{5}{37}$ C) $E(G) = -\frac{6}{37}$

Luego de considerar varios casos diferentes, se observa que en todos ellos:

- $E(G) < 0$
- $E(G) = -\frac{n}{37}$, donde n es el número de fichas apostadas, independientemente de su distribución en el paño.

Se puede demostrar que las observaciones anteriores tienen validez general. El hecho de que el jugador tenga siempre una esperanza matemática negativa, está directamente relacionado con la presencia del cero en el tablero de la ruleta. El juego sería equitativo ($E(G) = 0$) si se quitara el número cero. Obviamente, ningún casino propone un juego equitativo a sus clientes. Más aún, existen ruletas con "cero" y "doble cero", en las cuales se produce un desequilibrio mayor en perjuicio del jugador.

Aunque merezca un análisis aparte, vale la pena mencionar que hay otro factor importante que perjudica al jugador: su capital es insignificante en comparación con el capital de un casino. Aunque el casino pierda algunas jugadas consecutivas, siempre tiene la posibilidad de recuperarse, ya que su capital puede considerarse ilimitado. En cambio, es diferente el caso del jugador: dada la pequeñez de su capital puede llegar muy rápidamente a la *bancarrota*.

Así como sucede con la ruleta, todos los juegos que propone un casino (Black Jack, máquinas tragamonedas, bingo, etc.) están deliberadamente desequilibrados en favor del casino. De este modo, la adicción al juego por dinero es una enfermedad muy peligrosa para el jugador y su entorno familiar.

Para concluir y a modo de síntesis, notemos que un análisis elemental del juego de la ruleta nos ha permitido introducir algunos conceptos probabilísticos importantes:

- variable aleatoria;
- función de probabilidad;
- esperaza matemática.

Además, ha sido una buena oportunidad para reflexionar y crear conciencia sobre los riesgos del juego por dinero, con un fundamento matemático.

Consideramos que estos contenidos pueden ser enseñados exitosamente en el segundo año del ciclo polimodal, una vez que los alumnos conozcan la interpretación frecuencial de la probabilidad y tengan habilidades básicas de cálculo de probabilidades.

A continuación proponemos algunos ejercicios y problemas, con el fin de practicar y adquirir fluidez en el manejo de los conceptos expuestos. Consideramos que la resolución de problemas es una instancia esencial en el aprendizaje de cualquier concepto matemático.

Ejercicios y problemas:

1) Se lanzan dos dados y se considera la variable aleatoria X = suma de los puntajes obtenidos.

a) ¿Qué valores puede tomar la variable aleatoria X?

b) Mediante una tabla, o de otro modo válido, describa la función de probabilidad de X.

c) Calcule el valor esperado de X.

d) Resuelva nuevamente los incisos anteriores para la variable aleatoria Y = producto de los puntajes obtenidos.

2) Una persona arroja un dado normal de 6 caras y gana tanto dinero como muestra la cara que queda hacia arriba. Si el costo de jugar es de $4 por tirada, ¿conviene jugar repetidas veces? Justifique.

3) En una lotería de 1000 números, el precio de cada número es de $4. El primer premio es de $2000. Luego, hay 5 premios de $100 y 10 premios de $50.

a) Si una persona compra un número, ¿cuál es su ganancia esperada?

b) ¿Se trata de un juego equitativo? ¿Por qué?

4) En una lotería de 500 números hay:

- 1 premio de $1500
- 2 premios de $1000
- 4 premios de $500

¿Cuál debe ser el precio de cada número, para que el juego sea equitativo?

5) a) La siguiente tabla describe la distribución de probabilidades de una variable aleatoria discreta X, cuya esperanza matemática es $E(X) = 0,5$. ¿Cuánto vale a?

x	-3	a	5
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

b) La tabla siguiente contiene la distribución de probabilidades de la variable aleatoria discreta Y. Sabiendo que $E(Y) = 17$, halle b y c.

y	10	12	18	b
$P(Y = y)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	c	$\frac{1}{3}$

6) Una variable aleatoria finita X puede tomar los valores 0, 1, 2 y 3. Decida cuáles de las funciones propuestas sirven como modelo de probabilidad de X. Justifique sus respuestas.

(a) $f(x)=\dfrac{x+1}{10}$ (b) $g(x)=3x-1$ (c) $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$

7) Sea X una variable aleatoria finita que toma los valores 1, 2, 3 y 4. Supongamos que la función de probabilidad de X esta dada por $f(x)=\dfrac{k}{x}$.

a) Determine el valor de k.

b) Calcule $P(1\le X\le 3)$.

8) Un jugador de ruleta adopta la siguiente estrategia.

Apuesta una ficha al color negro. Si gana, se retira con el dinero. En cambio, si pierde, duplica su apuesta: coloca dos fichas en el negro. Si gana, se retira con el dinero. Si pierde, vuelve a duplicar, apostando cuatro fichas al negro. Continua de esta manera hasta alcanzar la apuesta máxima permitida, que es de 16 fichas. En este caso, gane o pierda, se retira. Complete la siguiente tabla:

El negro sale por primera vez en la…	Probabilidad	Ganancia total del jugador
Primera jugada		
Segunda jugada		
Tercera jugada		
Cuarta jugada		
Quinta jugada		
Nunca sale el negro		

Calcule la ganancia esperada del jugador. A partir de ello, ¿qué se puede decir acerca de su estrategia? Justifique.

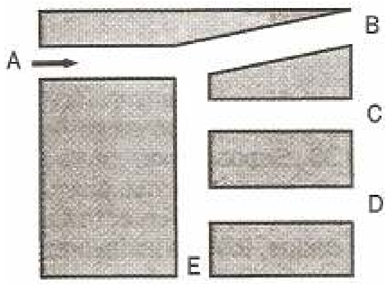
9) Un alumno se presenta sin estudiar nada a un examen de tipo “multiple choice”, que consta de 20 preguntas con 5 opciones cada una. Para cada pregunta hay solamente una respuesta correcta.

a) Contestando al azar, ¿qué probabilidad tiene de responder bien cada pregunta?

b) ¿Cuántas respuestas correctas se espera que tenga?

10) Una variable aleatoria discreta X puede tomar solamente los valores 1 y 2. Se desconocen las probabilidades, pero se sabe que $E(X)=1{,}7$. Halle $P(X=1)$ y $P(X=2)$.

11) Un ratón entra por el corredor A y cada vez que llega a una encrucijada elige al azar y con igual probabilidad un camino u otro, sin nunca retroceder.



a) ¿Cuál es la probabilidad de que salga por cada una de las puertas B, C, D y E?

b) Si entran 50 ratones, uno tras otro, ¿cuántos se espera que salgan por cada puerta?

12) Un jugador lanza dos dados. Su ganancia o pérdida está determinada por la suma de los mismos. Asigne ganancias o pérdidas a cada suma posible, para que resulte un juego equitativo.

13) Desafío. Considere la variable aleatoria X del ejercicio 1. ¿Puede encontrar una fórmula para la función de probabilidad de X? Es decir, una expresión que permita calcular $P(X = x)$ para cada valor de x.

Respuestas:

1) a) $\{2,3,4,...,12\}$

b)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

c) $E(X)=7$

d) $E(Y)=12,25$. La distribución de probabilidades de Y está dada por:

y	1	2	3	4	5	6	8	9	10
$P(Y=y)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$

y	12	15	16	18	20	24	25	30	36
$P(Y=y)$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2) Si G es la variable "ganancia del jugador", resulta $E(G)=3,5<4$. Por lo tanto, no conviene jugar.

3) $E(G)=-1$. No es un juego equitativo porque $E(G)\neq 0$.

4) \$11

5) a) $a=3$ b) $b=27,5$ $c=\frac{1}{12}$

6) La única función de probabilidad es *f*.

7) a) $k=\frac{12}{25}$ b) $\frac{22}{25}$

8) Definiendo $p = \frac{18}{37}$ y $q = \frac{19}{37}$, la tabla queda:

El negro sale por primera vez en la…	Probabilidad	Ganancia total del jugador
Primera jugada	p	1
Segunda jugada	qp	1
Tercera jugada	$q^2 p$	1
Cuarta jugada	$q^3 p$	1
Quinta jugada	$q^4 p$	1
Nunca sale el negro	q^5	–31

La esperanza resulta $E(G) = 1 - 32\left(\frac{19}{37}\right)^5 \cong -0{,}14$. La estrategia no es conveniente, porque $E(G) < 0$. De hecho, cualquier estrategia en la ruleta da una esperanza negativa al jugador.

9) a) $\frac{1}{5}$ b) 4

10) $P(X=1) = 0{,}3$ $P(X=2) = 0{,}7$

11) a) $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{4}$, $P(D) = \frac{1}{8}$, $P(E) = \frac{1}{8}$

b) $E(B) = 25$, $E(C) = 12{,}5$, $E(D) = E(E) = 6{,}25$

Naturalmente que estas esperanzas, al no ser números enteros, indican únicamente valores aproximados como resultados promedio de muchas experiencias.

12) Hay muchas respuestas posibles, de hecho infinitas. Una asignación posible es la siguiente: el jugador gana \$1 cuando la suma es par y pierde \$1 cuando la suma es impar.

13) $f(x) = \frac{6 - |7 - x|}{36}$ con $x \in \{2,3,4,\ldots,12\}$.

Bibliografía:

- SANTALÓ, Luis. *"*Matemática 2". Iniciación a la Creatividad. Ed. Kapeluz.
- CANAVOS, George. "Probabilidad y Estadística – Aplicaciones y Métodos". Ed. Mc Graw Hill. México, 1988.