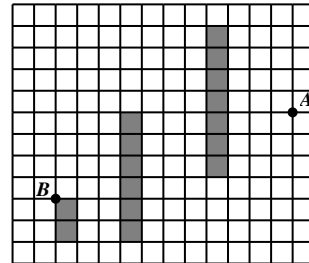


Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Elemental: alumnos de 7° y 8° grados

* Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.

1. Alí quiere ir del punto A al punto B . Está prohibido pasar por el interior de las áreas grises, pero se puede pasar en cualquier dirección dentro de las áreas blancas (no solo por líneas de la cuadrícula pero por todo el plano). Tenés que ayudar a Alí a encontrar el camino más corto entre A y B . Solo hay que dibujar el camino y escribir su longitud (cada cuadrado tiene lado 1).



2. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC con $AC > AB$. Sean X un punto del lado AC e Y un punto de la circunferencia ω tal que $CX = CY = AB$. (Los puntos A e Y están en semiplanos distintos con respecto a la recta BC). La recta XY corta a ω por segunda vez en P . Demostrar que $PB = PC$.

3. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo sin lados paralelos. Cada dos lados consecutivos del $ABCD$ se construye un paralelogramo usando esos dos lados consecutivos como lados del paralelogramo. Demostrar que entre los 4 nuevos puntos hay un solo punto en el interior del cuadrilátero $ABCD$.

ACLARACIÓN: Un cuadrilátero es convexo si no tiene entrecruzamientos y todos sus ángulos son menores de 180° .

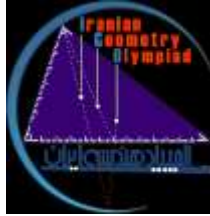
4. En un triángulo rectángulo ABC ($A = 90^\circ$), la mediatriz de BC corta a la recta AC en K y la mediatriz de BK corta a la recta AB en L . Si la recta CL es la bisectriz del ángulo C , hallar todos los posibles valores de los ángulos B y C .

5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con las siguientes propiedades:

$$\angle ADC = 135^\circ \text{ y } \angle ADB - \angle ABD = 2\angle DAB = 4\angle CBD.$$

Si $BC = \sqrt{2}CD$, demostrar que $AB = BC + AD$.

Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos



Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

* Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.

1. En el trapecio $ABCD$ con $AB \parallel CD$, ω_1 y ω_2 son dos circunferencias de diámetros AD y BC respectivamente. Sean X e Y dos puntos arbitrarios en ω_1 y ω_2 respectivamente.

Demostrar que la longitud del segmento XY es menor o igual que la mitad del perímetro de $ABCD$.

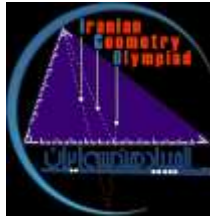
2. Dos circunferencias C_1 y C_2 se cortan en A y B . La tangente a C_1 trazada por A corta a C_2 en P y la recta PB corta a C_1 por segunda vez en Q (suponer que Q está afuera de C_2). La tangente a C_2 trazada por Q corta a C_1 y C_2 en C y D respectivamente. (Los puntos A y D están en distintos semiplanos con respecto a la recta PQ .) Demostrar que AD es bisectriz del ángulo CAP .

3. Hallar todos los enteros positivos N tales que existe un triángulo que se puede dividir en N cuadriláteros semejantes.

4. Sea ω la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo ABC ($A = 90^\circ$). La tangente a ω trazada por A corta a la recta BC en P . Supongamos que M es el punto medio del (menor) arco AB , y PM corta a ω por segunda vez en Q . La tangente a ω trazada por Q corta a la recta AB en K . Demostrar que $\angle PKC = 90^\circ$.

5. Las circunferencias ω y ω' se cortan en A y B . La tangente a ω trazada por A corta a ω' en C y la tangente a ω' trazada por A corta a ω en D . Supongamos que la bisectriz interior de CAD corta a ω y ω' en E y F respectivamente, y la bisectriz exterior de CAD corta a ω y ω' en X e Y respectivamente. Demostrar que la mediatriz de XY es tangente a la circunferencia que pasa por los vértices del triángulo BEF .

*Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos*



Problemas de la tercera olimpiada iraní de geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11° y 12° grados

* Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de IGO.

1. Las circunferencias ω y ω' se cortan en A y B . La tangente a ω trazada por A corta a ω' en C y la tangente a ω' trazada por A corta a ω en D . Supongamos que el segmento CD corta a ω y ω' en E y F respectivamente (suponer que E está entre F y C). La perpendicular a AC trazada por E corta a ω' en P y la perpendicular a AD trazada por F corta a ω en el punto Q . (Los puntos A , P y Q están del mismo lado de la recta CD .) Demostrar que los puntos A , P y Q son colineales.
2. En el triángulo acutángulo ABC , la altura trazada desde A corta al lado BC en D , y M es el punto medio de AC . Supongamos que X es un punto tal que $AXB = DXM = 90^\circ$ (suponer que X y C están en semiplanos opuestos respecto de la recta BM). Demostrar que $XMB = 2MBC$.
3. Sea P el punto de intersección de los lados AD y BC del cuadrilátero convexo $ABCD$. Supongamos que I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos PAB y PDC respectivamente. Sea O el circuncentro del triángulo PAB y H el ortocentro del triángulo PDC . Demostrar que las circunferencias circunscritas de los triángulos AI_1B y DHC son tangentes entre sí y solo si las circunferencias circunscritas de los triángulos AOB y DI_2C son tangentes entre sí.
4. En un cuadrilátero convexo $ABCD$ las rectas AB y CD se cortan en E y las rectas AD y BC se cortan en F . Sea P el punto de intersección de las diagonales AC y BD . Supongamos que ω_1 es una circunferencia que pasa por D y es tangente a AC en P . También supongamos que ω_2 es una circunferencia que pasa por C y es tangente a BD en P . Sea X el punto de intersección de ω_1 y AD , e Y el punto de intersección de ω_2 y BC . Supongamos que las circunferencias ω_1 y ω_2 se cortan por segunda vez en Q . Demostrar que la perpendicular trazada desde P a la recta EF pasa por el circuncentro del triángulo XQY .
5. ¿Existen seis puntos del plano $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ tales que todos los triángulos $X_i Y_j Z_k$ son semejantes para $1 \leq i, j, k \leq 2$?

Tiempo: 4 horas y 30 minutos

Cada problema vale 8 puntos