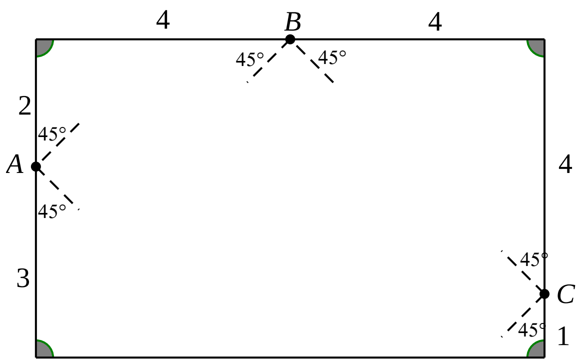
6ª Olimpiada Iraní de Geometría
Nivel elemental: alumnos de 7º y 8º grados

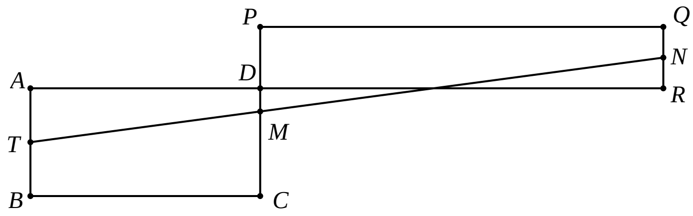
Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio official de la IGO en la web: http://igo-official.ir

---

1. Una mesa de pool rectangular de 8×5 tiene cuatro troneras, una en cada esquina. ¿Desde cuáles de los puntos *A*, *B* y *C*, al golpear una bola con las direcciones indicadas en la figura, la bola caerá en una de las troneras al cabo de 6 reflexiones? (La bola se refleja con igual ángulo al que tuvo al llegar cuando entra en contacto con el borde de la mesa.)



2. En la figura se muestran dos rectángulos *ABCD* y *PQRD* de áreas iguales, y con lados respectivamente paralelos. Sean *N*, *M* y *T* los puntos medios de los segmentos *QR*, *PC* y *AB* respectivamente. Demostrar que los puntos *N*, *M* y *T* están sobre una misma recta.



3. Sea $n > 2$ un número entero. Hay *n* rectas en el plano en posición general. Esto significa que cada dos de ellas, se cortan, pero no hay tres que concurran en un punto. Se marcan todos los puntos de intersección y a continuación se borran todas las rectas, dejando los puntos marcados. No se sabe qué punto pertenece a qué dos rectas borradas. ¿Es posible averiguar cuáles eran las rectas borradas y restaurar todo el sistema?

4. Sea *ABCD* un cuadrilátero tal que $DAC = CAB = 60^\circ$ y $AB = BD - AC$. Las rectas *AB* y *CD* se cortan en el punto *E*. Demostrar que $ADB = 2BEC$.

5. En un pentágono convexo (o sea con todos sus ángulos menores de 180º) llamamos a una diagonal *bisectora* si divide al área en dos partes iguales y también divide al perímetro en dos partes iguales. ¿Cuál es el número máximo de diagonales bisectoras que puede tener el pentágono convexo?

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

6^a Olimpiada Iraní de Geometría
Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio official de la IGO en la web: *http://igo-official.ir*

---

1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 de centros O_1 y O_2 respectivamente se cortan en los puntos A y B, y el punto O_1 pertenece a ω_2. Sea P un punto arbitrario de ω_1. Las rectas BP, AP y O_1O_2 cortan a ω_2 por segunda vez en los puntos X, Y y C respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero $XPYC$ es un paralelogramo.

2. Hallar todos los cuadriláteros $ABCD$ tales que los cuatro triángulos DAB, CDA, BCD y ABC son semejantes entre sí.

3. Tres circunferencias ω_1, ω_2 y ω_3 por un punto común P. La recta tangente a ω_1 por P corta a ω_2 y ω_3 por segunda vez en los puntos $P_{1,2}$ y $P_{1,3}$, respectivamente. De manera similar se definen los puntos $P_{2,1}$, $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ y $P_{3,2}$. Demostrar que las mediatrices de los segmentos $P_{1,2}P_{1,3}$, $P_{2,1}P_{2,3}$ y $P_{3,1}P_{3,2}$ son concurrentes.

4. Sea $ABCD$ un paralelogramo y sea K el punto de la recta AD tal que $BK = AB$. Supongamos que P es un punto arbitrario en AB, y la mediatriz de PC corta a la circunferencia circunscrita del triángulo APD en los puntos X, Y. Demostrar que la circunferencia circunscrita del triángulo ABK pasa por el ortocentro del triángulo AXY.

5. Sea ABC un triángulo con $A = 60^{\circ}$. Los puntos E y F son los pies de las bisectrices desde los vértices B y C respectivamente. Se consideran los puntos P y Q tales que los cuadriláteros $BFPE$ y $CEQF$ son paralelogramos. Demostrar que $PAQ > 150^{\circ}$. (Considerar el ángulo PAQ que no contiene al lado AB del triángulo.)

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

6^a Olimpiada Iraní de Geometría

Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

Los problemas de la prueba son confidenciales hasta que se publiquen en el sitio official de la IGO en la web: *http://igo-official.ir*

1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 se cortan en los puntos A y B. El punto C pertenece a la tangente trazada por A a ω_1 tal que $ABC = 90^\circ$. Una recta arbitraria ℓ pasa por C y corta a ω_2 en los puntos P y Q. Las rectas AP y AQ cortan por segunda vez a ω_1 en los puntos X y Z respectivamente. Sea Y el pie de la altura desde A a ℓ. Demostrar que los puntos X, Y, Z son colineales.

2. ¿Es cierto que en todo polígono convexo de n lados, con $n > 3$ existe un vértice y una diagonal que pasa por ese vértice tal que los ángulos que forma esa diagonal con los dos lados que concurren en dicho vértice son agudos?

3. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 tienen centros O_1 y O_2 respectivamente. Estas dos circunferencias se cortan en X e Y. Sean A en ω_1 y B en ω_2 tales que la recta AB es una tangente común a las dos circunferencias. Las rectas tangentes a ω_1 y ω_2 trazadas por X cortan a la recta O_1O_2 en los puntos K y L respectivamente. Supongamos que la recta BL corta por segunda vez a ω_2 en M y la recta AK corta por segunda vez a ω_1 en N. Demostrar que las rectas AM, BN y O_1O_2 son concurrentes.

4. Sea ABC un triángulo no isósceles con circunferencia circunscrita Γ. Sean M el punto medio del segmento BC y N el punto medio del arco BC de Γ (que no contiene a A). Sean X e Y los puntos de Γ tales que $BX \parallel CY \parallel AM$. Supongamos que existe un punto Z en el segmento BC tal que la circunferencia circunscrita del triángulo XYZ es tangente a BC. Sea ω la circunferencia circunscrita del triángulo ZMN. La recta AM corta a ω por segunda vez en P. Sean K un punto de ω tal que $KN \parallel AM$, ω_b la circunferencia que pasa por B, por X y es tangente a BC, y ω_c la circunferencia que pasa por C, por Y y es tangente a BC. Demostrar que la circunferencia de centro K y radio KP es tangente a las tres circunferencias ω_b, ω_c y Γ.

5. Sean A, B, C puntos de una parábola Δ tal que el punto H, ortocentro del triángulo ABC, coincide con el foco de la parábola Δ. Demostrar que si se cambia la posición de los puntos A, B, C sobre Δ de modo que el ortocentro H siga coincidiendo con H, el inradio del triángulo ABC permanece sin cambios.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos