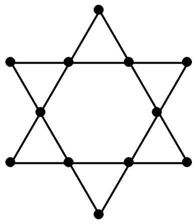
PRIMER NIVEL

XXX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1
En la figura se marcaron los 12 puntos que son vértices de triángulos. Se distribuyen los números enteros de 1 a 12, sin repeticiones, en los puntos marcados, de modo que la suma de los 4 números en cada uno de los 6 segmentos es la misma.



Sobre todas las posibles distribuciones de $1, 2, \ldots, 12$ con esta propiedad, hallar el valor mínimo de la suma de los 6 números asignados a los vértices exteriores de los triángulos.

Problema 2
Dado un número entero positivo *N*, la operación permitida es restarle su mayor divisor propio (distinto de *N*). Inicialmente se tiene el número $N = 19^{19}$. Luego de aplicar varias veces la operación permitida se obtiene el número 1. Determinar cuántas veces se aplicó la operación permitida.

Problema 3
En el pizarrón está dibujado un cuadrilátero no convexo *ABCD* de lados *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, con todos sus lados distintos y $A = B = C = 45^{\circ}$. Beto midió uno solo de los seis segmentos *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, *AC*, *BD*, a su elección, y obtuvo el valor 6. Él afirma que con esta información se puede calcular el área del cuadrilátero *ABCD*. Calcular dicha área.
ACLARACIÓN: Un cuadrilátero es no convexo si uno de sus ángulos es mayor que 180º.

PRIMER NIVEL

XXX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4
En una fila hay 20 monedas aparentemente iguales. Una de ellas pesa 9 gramos y la siguiente, a su derecha, pesa 11 gramos. Las otras 18 monedas pesan 10 gramos cada una. Describir cómo se determina la moneda de 11 gramos mediante a lo sumo 3 pesadas en una balanza de platos.
ACLARACIÓN: Una balanza de platos solo informa si el plato izquierdo pesa más, igual o menos que el derecho.

Problema 5
Cubrir un tablero cuadrado de 13×13 con cuadrados de 2×2 y formas en L de tres cuadrados unitarios de modo que el número de formas en L sea lo menor posible.

Justificar por qué no se puede usar menos formas en L.
ACLARACIÓN: Cada cuadrado de 2×2 cubre exactamente 4 casillas del tablero. Cada forma en L cubre exactamente 3 casillas del tablero. Las formas en L se pueden girar. El cubrimiento no tiene huecos ni superposiciones y no sobresale del tablero,

Problema 6
Dos jugadores, A y B, juegan al siguiente juego en una tira infinita que está dividida en casillas. En cada movida A marca dos casillas arbitrarias que no fueron marcadas antes. En cada movida B borra cualquier bloque de marcas consecutivas (puede ser una sola). El objetivo de A es obtener 10 marcas consecutivas; el objetivo de B es impedírselo. ¿Cuál de los dos tiene una estrategia ganadora?

SEGUNDO NIVEL

XXX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1
Hay varias monedas en una fila y la movida permitida es sacar de la fila exactamente una moneda, que puede ser la primera o la última. En la distribución inicial hay n monedas de valores no necesariamente iguales. Ana y María mueven alternadamente. Comienza Ana, que hace dos movidas, a continuación, María hace una movida, luego Ana hace dos movidas y así siguiendo hasta que no quedan monedas: Ana hace dos movidas y María, una. (Solo en la última movida Ana puede sacar 1 moneda si solo queda una moneda.) El objetivo de Ana es asegurarse sacar al menos $\frac{2}{3}$ del valor total de las monedas.
Determinar si puede lograr su objetivo con certeza si
a) $n = 2013$; b) $n = 2014$.
Si la respuesta es sí, dar una estrategia para lograrlo; si la respuesta es no, dar una secuencia específica de monedas e indicar cómo María le impide a Ana lograr su objetivo.

Problema 2
Sea ABC un triángulo rectángulo. Se sabe que hay puntos D en el lado AC y E en el lado BC tales que $AB = AD = BE$ y BD es perpendicular a DE. Calcular $\frac{AB}{BC}$ y $\frac{BC}{CA}$.

Problema 3
Hallar el menor número entero positivo n con la siguiente propiedad: En cada sucesión de enteros positivos de n términos tales que la suma de los n números es igual a 2013 hay algunos términos consecutivos cuya suma es igual a 31.

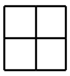
SEGUNDO NIVEL

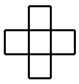
XXX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4
En un colegio de doble escolaridad, por la mañana el profesor de lengua dividió a los alumnos en 200 grupos para realizar una actividad. Por la tarde, el profesor de matemática dividió a los mismos alumnos en 300 grupos para otra actividad. Diremos que un alumno es *especial* si el grupo al que perteneció a la tarde es de menor tamaño que el grupo al que perteneció a la mañana. Hallar el número mínimo de alumnos especiales que puede haber en el colegio.
ACLARACIÓN: Cada grupo tiene por lo menos un alumno.

Problema 5
Cada casilla de un tablero de $n\times n$ está coloreada de blanco o de negro. Diremos que la coloración es *buena* si todo cuadrado de 2×2 cubre un número par de casillas negras y toda cruz cubre un número impar de casillas negras. Hallar todos los $n\geq 3$ tales que en cada coloración buena las casillas de las cuatro esquinas del tablero son del mismo color.
ACLARACIÓN: Cada cuadrado de 2×2 cubre exactamente 4 casillas del tablero. Cada cruz cubre exactamente 5 casillas del tablero.





Problema 6
Decidir si existe un cuadrado de lado menor que 1 que pueda cubrir por completo cualquier rectángulo de diagonal 1.

TERCER NIVEL

XXX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
PRIMER DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 1
En una mesa hay 2013 naipes que tienen escritos, cada uno, un número entero distinto, desde 1 hasta 2013; todos los naipes están boca abajo (no se puede ver qué número tienen). Está permitido seleccionar cualquier conjunto de naipes y preguntar si el promedio de los números escritos en esos naipes es entero. La respuesta será verdadera.
a) Hallar todos los números que se pueden determinar con certeza mediante varias de estas preguntas.
b) Queremos dividir los naipes en grupos tales que se conozca el contenido de cada grupo aunque no se conozca el valor individual de cada naipe del grupo. (Por ejemplo, hallar un grupo de 3 cartas que contenga 1, 2 y 3, sin saber qué número tiene cada carta.) ¿Cuál es el máximo número de grupos que se puede obtener?

Problema 2
En un cuadrilátero convexo $ABCD$ los ángulos A y C son iguales y la bisectriz de B pasa por el punto medio del lado CD. Si se sabe que $CD = 3AD$, calcular $\frac{AB}{BC}$.

Problema 3
Hallar cuántos son los números de 2013 dígitos $d_1 d_2 ... d_{2013}$ con dígitos impares $d_1, d_2, ..., d_{2013}$ tales que la suma de 1809 términos $d_1 \cdot d_2 + d_2 \cdot d_3 + ... + d_{1809} \cdot d_{1810}$ tiene resto 1 al dividirla por 4 y la suma de 203 términos $d_{1810} \cdot d_{1811} + d_{1811} \cdot d_{1812} + ... + d_{2012} \cdot d_{2013}$ tiene resto 1 al dividirla por 4.

TERCER NIVEL

XXX OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA
CERTAMEN NACIONAL
SEGUNDO DÍA

ESCRIBIR EN LA HOJA DE SOLUCIONES LOS CÁLCULOS Y RAZONAMIENTOS QUE JUSTIFICAN LAS RESPUESTAS

Problema 4
Sean $x \geq 5$, $y \geq 6$, $z \geq 7$ y $x^2 + y^2 + z^2 \geq 125$. Hallar el mínimo de $x + y + z$.

Problema 5
Dados varios enteros no negativos (se permiten repeticiones), la operación permitida es elegir un número entero positivo a y reemplazar cada número b mayor o igual que a por $b - a$ (los números a, si hay alguno, se reemplazan por 0). Inicialmente en el pizarrón están escritos los números enteros desde 1 hasta 2013 inclusive. Al cabo de unas cuantas operaciones los números del pizarrón tienen suma igual a 10. Determinar cuáles pueden ser los números que quedaron en el pizarrón. Hallar todas las posibilidades.

Problema 6
Diremos que un entero positivo n es *lindo* si cada divisor d de n con $1 < d < n$ es igual a la resta de dos divisores d_1, d_2 de n con $1 \leq d_1, d_2 \leq n$ (puede ser $d_1 = d$ o $d_2 = d$). Hallar el menor múltiplo lindo de 401 que es mayor que 401.