PRIMER PRETORNEO 2011
JUVENIL

1. En la frontera entre dos países hay una máquina para cambiar dinero. La tasa es X pirulos por un frico o $\frac{1}{X}$ fricos por cada pirulo, donde X es un número real positivo. La máquina solo tiene monedas de un pirulo y de un frico, y solo acepta para cambiar monedas de un pirulo o de un frico. El número de monedas que entrega la máquina se redondea al entero más cercano. Si el número de monedas está exactamente en la mitad entre dos enteros, se redondea al entero más grande.
Hallar un valor de X tal que sea posible ganar con el cambio cambiando algunos pirulos por fricos y luego cambiando todos los fricos recibidos por pirulos. Para el valor de X hallado, dar un ejemplo de transacción en la que se gana.

4 PUNTOS

2. En un instituto de idiomas todos los estudiantes estudian por lo menos dos idiomas entre alemán, francés o inglés. El 25% de los alumnos estudia simultáneamente inglés y alemán; el 50% de los alumnos estudia simultáneamente inglés y francés, y el 62,5% de los alumnos estudia simultáneamente francés y alemán. Calcular el porcentaje de alumnos que estudia simultáneamente los tres idiomas.

5 PUNTOS

3. En una casilla de un tablero de ajedrez de 8×8 se coloca un cubo de $1 \times 1 \times 1$ de modo que su cara inferior coincida con una casilla del tablero. El cubo rueda sobre un lado de su cara inferior de modo que ahora la cara adyacente se apoya en el tablero. De este modo el cubo viaja a lo largo del tablero, apoyándose al menos una vez en cada casilla. Demostrar que este viaje se puede hacer de modo que haya una cara del cubo que jamás se apoye en el tablero.

5 PUNTOS

4. En una circunferencia se marcan $2N$ puntos que la dividen en $2N$ arcos de longitud 1. Pablo unió entre sí pares de puntos de modo que cada punto se usó exactamente una vez, y quedaron dibujadas N cuerdas. Cada cuerda divide a la circunferencia en dos arcos, y la longitud de cada uno de los dos arcos es un número entero par. Demostrar que N es par.
ACLARACIÓN: Dos cuerdas se pueden cortar.

5 PUNTOS

PRIMER PRETORNEO 2011
MAYOR

1. En un tablero de $m \times n$ las filas se numeran de 1 a m y las columnas de 1 a n. En cada casilla se escribe el resultado de multiplicar el número de la fila por el de la columna. Luego se quitan las casillas interiores del rectángulo de $(m - 2) \times (n - 2)$, dejando un marco de ancho 1. Las casillas de este marco se pintan alternativamente de blanco y negro. Si m y n son ambos impares, calcular la resta de la suma de los números de las casillas negras menos la suma de los números de las casillas blancas.

4 PUNTOS

2. En un torneo de 21 jugadores se juega un partido por vez, y el que pierde se retira del campeonato. En cada partido el número de victorias anteriores de los dos participantes difiere a lo sumo en 1. Hallar el máximo número de partidos que puede jugar el ganador del torneo.

5 PUNTOS

3. Sea $ABCD$ un trapecio isósceles de bases BC y AD, con $BC < AD$, y lados $AB = CD$, tal que tiene una circunferencia inscrita. Demostrar que la bisectriz de $\hat{C}$ divide al cuadrilátero en dos figuras de igual área.
ACLARACIÓN: La circunferencia inscrita a un trapecio es la circunferencia tangente a sus cuatro lados.

5 PUNTOS

4. En un camino infinito en ambas direcciones, el correcaminos sale a velocidad constante. Al rato sale el coyote a perseguirlo, a velocidad constante. La velocidad del correcaminos es igual al 90% de la velocidad del coyote. El coyote no sabe a qué hora salió el correcaminos y tampoco sabe en qué dirección salió. Demostrar que de todos modos el coyote puede alcanzar al correcaminos.

5 PUNTOS