

## SEGUNDO PRETORNEO 2007 JUVENIL

**1.** Dos números naturales de 21 dígitos cada uno se dicen *amigos* si es posible suprimir 5 dígitos de cada uno de ellos de modo que los dos números de 16 dígitos que se obtienen sean iguales. Por ejemplo 258345527712139454218 y 383452571621395421787 son amigos, porque se pueden suprimir 5 dígitos de cada uno, convenientemente elegidos, para obtener en ambos casos 8345571213954218.

Demostrar que si dos números naturales de 21 dígitos cada uno son amigos es posible intercalar 5 dígitos en cada uno de ellos (convenientemente elegidos) de modo que los dos números de 26 dígitos que se obtienen sean iguales.

4 PUNTOS

**2.** Hallar el menor número de torres que se deben colocar en un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$  de manera que todas las casillas blancas del tablero estén amenazadas.

ACLARACIÓN: Una torre amenaza a la casilla en que se encuentra y a todas las casillas de su fila y de su columna.

5 PUNTOS

**3.** Maxi dibujó un pentágono y prolongó los lados del pentágono, obteniendo de este modo 5 triángulos exteriores al pentágono. Luego recortó los 5 triángulos y resultó que esos 5 triángulos eran iguales entre sí. Decidir si con esta información se puede afirmar con certeza que el pentágono de Maxi es regular, es decir, que sus 5 ángulos son iguales y sus 5 lados son iguales.

5 PUNTOS

**4.** Se tiene una caja triangular y una torta con la misma forma y tamaño que la caja, pero invertida, es decir que para meter la torta en la caja habría que darla vuelta, que lo de arriba quede abajo y viceversa. Hay que cortar la torta en dos partes de modo que los dos pedazos se puedan colocar en la caja sin superponerlos ni dar vuelta ninguno de los pedazos.

a) Indicar una manera de cortar si uno de los ángulos del triángulo es el triple de otro de estos ángulos.

2 PUNTOS

b) Indicar una manera de cortar si uno de los ángulos del triángulo es obtuso e igual al doble de uno de los ángulos agudos.

3 PUNTOS

## SEGUNDO PRETORNEO 2007 MAYOR

1. Se tiene un tablero de  $9 \times 9$  coloreado como el de ajedrez, con sus cuatro esquinas de color blanco. Hallar el menor número de torres que se deben colocar en el tablero de manera que todas las casillas blancas del tablero estén amenazadas.

ACLARACIÓN: Una torre amenaza a la casilla en que se encuentra y a todas las casillas de su fila y de su columna.

4 PUNTOS

2. Se tienen tres números reales  $a, b, c$ , todos distintos de cero, tales que cualquiera sea el orden en que estos tres números se usen como coeficientes de una ecuación cuadrática, resulta que la ecuación tiene (al menos) una raíz real. Es decir, cada una de las 6 ecuaciones  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $ax^2 + cx + b = 0$ ,  $bx^2 + ax + c = 0$ ,  $bx^2 + cx + a = 0$ ,  $cx^2 + ax + b = 0$ ,  $cx^2 + bx + a = 0$  tiene al menos una raíz real. Demostrar que cada una de estas 6 ecuaciones tiene al menos una raíz positiva.

5 PUNTOS

3. Se construye una sucesión de términos iguales a 0 o 1 con el siguiente procedimiento: el término de la posición  $k$  es 0 si la suma de los dígitos de  $k$  es par y es 1 si dicha suma es impar. Los primeros términos son 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0 ... pues la suma de los dígitos de 1, de 3, de 5, de 7, de 9, de 10, de 12 son impares y la suma de los dígitos de 2, de 4, de 6, de 8, de 11, de 13 son pares. Demostrar que la sucesión no es periódica.

ACLARACIÓN: Una sucesión es periódica si es la repetición de una secuencia fija de dígitos.

5 PUNTOS

4. Se tiene una caja triangular y una torta con la misma forma y tamaño que la caja, pero invertida, es decir que para meter la torta en la caja habría que darla vuelta, que lo de arriba quede abajo y viceversa. Hay que cortar la torta en dos partes de modo que los dos pedazos se puedan colocar en la caja sin superponerlos ni dar vuelta ninguno de los pedazos.

a) Indicar una manera de cortar si uno de los ángulos del triángulo es obtuso e igual al doble de uno de los ángulos agudos.

2 PUNTOS

b) Indicar una manera de cortar si los ángulos del triángulo miden  $20^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $130^\circ$ .

ACLARACIÓN: El corte no es necesariamente una línea recta.

3 PUNTOS