

SEGUNDO PRETORNEO 2008 JUVENIL

1. Se tienen 30 tarjetas en blanco. Pablo eligió tres números enteros a , b , c , todos distintos, con a menor que b y b menor que c , y escribió en 10 tarjetas el número a , en otras 10 tarjetas el número b y en las restantes 10 tarjetas el número c de modo que se verifique lo siguiente:

Si Alex elige 5 tarjetas, las que él quiera, Pablo puede a continuación seleccionar 5 tarjetas entre las 25 restantes de modo que la suma de los 10 números de las tarjetas, las 5 de Pablo más las 5 de Alex, sea igual a cero.

Si se sabe que $a = -100$, determinar los posibles valores de los números b y c .

ACLARACIÓN: Pablo puede usar números positivos, negativos o cero.

4 PUNTOS

2. Hay que dibujar en el plano 10 segmentos iguales de modo que cada vez que dos de los segmentos se cortan, el punto de intersección divida a cada uno de esos dos segmentos en la proporción 3:4. A continuación, se colorea de rojo todos los puntos en los que se cortan entre sí dos o más segmentos. Determinar cuál es el número máximo de puntos rojos que se puede obtener con este procedimiento.

ACLARACIÓN: Un punto P del segmento AB lo divide en la proporción 3:4 si $\frac{AP}{BP} = \frac{3}{4}$ o

$$\frac{BP}{AP} = \frac{3}{4}.$$

5 PUNTOS

3. Se tiene una tabla como la de la figura. La operación permitida es permutar sus filas y permutar sus columnas, en cualquier orden que se desee. Determinar cuántas tablas diferentes se pueden obtener mediante estas operaciones, a partir de la tabla dada.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

5 PUNTOS

4. Las casillas de un tablero de 10×10 se han coloreado con 3 colores, rojo, azul y blanco, de modo que dos casillas con un lado común sean siempre de distinto color. El número de casillas rojas es 20.

(a) Demostrar que siempre es posible recortar del tablero 30 rectángulos que abarquen cada uno exactamente dos casillas del tablero y que estas casillas sean una blanca y la otra azul.

2 PUNTOS

(b) Dar una coloración del tablero en las condiciones del problema tal que sea posible recortar del tablero 40 rectángulos como los del inciso (a). (Explicar por qué el ejemplo tiene las propiedades deseadas.)

2 PUNTOS

(c) Dar una coloración del tablero en las condiciones del problema tal que sea imposible recortar del tablero más de 30 rectángulos como los del inciso (a). (Explicar por qué el ejemplo tiene las propiedades deseadas.)

2 PUNTOS

SEGUNDO PRETORNEO 2008 MAYOR

1. Se tiene un hexágono $ABCDEF$ tal que sus lados opuestos son respectivamente paralelos, es decir, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel FA$. Si se sabe que $AB = DE$, demostrar que $BC = EF$ y $CD = FA$.

4 PUNTOS

2. Se tienen 30 tarjetas en blanco. Pablo tiene que elegir tres números reales a , b , c , todos distintos, con a menor que b y b menor que c , y escribir en 10 tarjetas el número a , en otras 10 tarjetas el número b y en las restantes 10 tarjetas el número c de modo que se verifique lo siguiente:

Si Alex elige 5 tarjetas, las que él quiera, Pablo pueda a continuación seleccionar 5 tarjetas entre las 25 restantes de modo que la suma de los 10 números de las tarjetas, las 5 de Pablo más las 5 de Alex, sea igual a cero.

Determinar los posibles valores del número b .

5 PUNTOS

3. Determinar si existen enteros positivos n , m tales que el mínimo común múltiplo de todos los números desde 1 hasta n sea igual a 8 multiplicado por el mínimo común múltiplo de todos los números de 1 hasta m , es decir, $\text{mcm}(1, 2, 3, \dots, n) = 8 \cdot \text{mcm}(1, 2, 3, \dots, m)$.

5 PUNTOS

4. Se tiene una tabla como la de la figura. La operación permitida es permutar sus filas y permutar sus columnas, en cualquier orden que se desee. Determinar cuántas tablas diferentes se pueden obtener mediante estas operaciones, a partir de la tabla dada.

1	2	3	4	5	6	7
7	1	2	3	4	5	6
6	7	1	2	3	4	5
5	6	7	1	2	3	4
4	5	6	7	1	2	3
3	4	5	6	7	1	2
2	3	4	5	6	7	1

6 PUNTOS