SEGUNDO PRETORNEO 2010
JUVENIL

1. Juan dibujó un ángulo y afirma que es agudo (menor que 90º). Pedro debe decidir si lo que afirma Juan es o no verdadero, utilizando exclusivamente un compás. Describir cómo puede Pedro lograr el objetivo.

4 PUNTOS

2. Se tienen 6 canastos con peras, ciruelas y manzanas y no necesariamente todos llevan igual cantidad de fruta. El número de ciruelas en cada canasto es igual al número total de manzanas, en conjunto, de los otros 5 canastos. El número de manzanas en cada canasto es igual al número total de peras, en conjunto, de los otros 5 canastos. Demostrar que el número total de frutas es múltiplo de 31.

5 PUNTOS

3. Ana y Beto dividen una torta cuadrada. Primero Ana elige un punto de la torta que no esté en el borde. A continuación Beto hace un corte recto desde el punto que eligió Ana hasta un borde (en la dirección que él quiera). Luego Ana hace un nuevo corte que va desde el punto que eligió hasta un borde y es perpendicular al corte que hizo Beto. De este modo la torta se dividió en dos pedazos. El más chico de estos pedazos es el que le corresponde a Beto. El objetivo de Beto es que su pedazo sea mayor o igual a un cuarto de la torta. Decidir si Ana se lo puede impedir.

5 PUNTOS

4. En el pizarrón están escritos los cuadrados de los primeros 41 números enteros positivos, desde $1^2 = 1$ hasta $41^2 = 1681$:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots,\ 1600,\ 1681.$$

La operación permitida es borrar dos números del pizarrón y luego escribir en el pizarrón la diferencia de los dos números recién borrados (el mayor menos el menor).
Al cabo de 40 operaciones permitidas, en el pizarrón hay un solo número. Determinar el menor valor que puede tener este último número.
(Indicar las operaciones para llegar a ese número y explicar por qué es imposible lograr un número menor que el hallado.)

5 PUNTOS

SEGUNDO PRETORNEO 2010
MAYOR

1. Juan dibujó un ángulo y afirma que mide 31º. Pedro debe decidir si lo que afirma Juan es o no verdadero, utilizando exclusivamente un compás. Describir cómo puede Pedro lograr el objetivo.

4 PUNTOS

2. Se tienen bananas, limones y duraznos distribuidos en 2010 barcos de carga y no necesariamente todos llevan igual carga. El número de bananas en cada barco es igual al número total de limones que llevan, en conjunto, los otros 2009 barcos. El número de limones en cada barco es igual al número total de duraznos que llevan, en conjunto, los otros 2009 barcos. Demostrar que el número total de frutas es múltiplo de 31.

5 PUNTOS

3. Demostrar que es posible cubrir la superficie de un octaedro regular, sin huecos ni superposiciones, con hexágonos regulares todos iguales (de un tamaño adecuado). Los hexágonos se pueden doblar (en las aristas del octaedro) pero no se pueden cortar.
ACLARACIÓN: El octaedro regular se obtiene uniendo por sus bases dos pirámides iguales de base cuadrada y lados iguales. Resulta así un sólido de 6 vértices; todas sus caras son triángulos equiláteros y cada vértice pertenece a 4 caras.

5 PUNTOS

4. En el pizarrón están escritos los cuadrados de los primeros 101 números enteros positivos, desde $1^2 = 1$ hasta $101^2 = 10201$:

1 , 4, 9, 16, 25, 36, …., 10000, 10201.

La operación permitida es borrar dos números del pizarrón y luego escribir en el pizarrón la diferencia de los dos números recién borrados (el mayor menos el menor).
Al cabo de 100 operaciones permitidas, en el pizarrón hay un solo número. Determinar el menor valor que puede tener este último número.
(Indicar las operaciones para llegar a ese número y explicar por qué es imposible lograr un número menor que el hallado.)

5 PUNTOS