XXVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

PRIMER DÍA (02/08/12)

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. Un triángulo equilátero de lado 7 está dividido en 49 triangulitos equiláteros de lado 1 mediante paralelas a sus lados. Se recortan del triángulo paralelogramos con un par de lados iguales a 1 y el otro par iguales a 2, siguiendo líneas de la grilla. Determinar el mayor número de estos paralelogramos que se pueden cortar.

2. Sea *ABC* un triángulo y *O* un punto en su interior. Sea *D* en *BC* tal que *OD* sea perpendicular a *BC* y *E* en *AC* tal que *OE* sea perpendicular a *AC*. Si *F* es el punto medio del lado *AB* y *DF* = *EF*, demostrar que $O\hat{B}D = O\hat{A}E$.

3. En algunos vértices de un tablero cuadrado de 2012 × 2012 hay una mosca y *k* arañas. En cada segundo, primero la mosca se mueve a un vértice vecino o se queda quieta, y a continuación cada una de las *k* arañas se mueve a un vértice vecino o se queda quieta (puede haber más de una araña en un mismo vértice). En todo momento, la mosca y las arañas saben las posiciones de todas las demás. Hallar el menor valor de *k* tal que las arañas pueden atrapar a la mosca en un tiempo finito, no importa las posiciones iniciales de la mosca y de las arañas.

(Dos vértices son vecinos si están unidos por una arista. Una araña atrapa a la mosca si ambas están en el mismo vértice.)

XXVII OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA

PRUEBA DE SELECCIÓN

SEGUNDO DÍA (03/08/12)

EN TODOS LOS PROBLEMAS,
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

4. Hay 30 personas, cada una de las cuales es un caballero o es un mentiroso, sentadas alrededor de una mesa redonda. Los lugares alrededor de la mesa están numerados de 1 a 30 en orden consecutivo. Los caballeros siempre dicen la verdad y los mentirosos siempre mienten. Cada persona tiene exactamente un amigo entre los restantes 29. Además el amigo de cada caballero es un mentiroso y el amigo de cada mentiroso es un caballero. Cada persona responde a la siguiente pregunta: "¿Es verdad que tu amigo es vecino tuyo en la mesa?" Las 15 personas sentadas en las posiciones con número impar de la mesa respondieron "Sí". Determinar cuántas personas ubicadas en posiciones con número par también respondieron "Sí".

5. Demostrar que es posible colorear los enteros positivos con dos colores de modo que se verifiquen las siguientes dos condiciones:

- Para cada primo *p* y para cada entero positivo *n* los números p^n, p^{n+1} y p^{n+2} no son los tres del mismo color;
- No existe una progresión geométrica infinita de números del mismo color.

ACLARACIÓN: Una progresión geométrica es una secuencia de números tales que cada uno se obtiene del anterior multiplicando por un cierto número fijo *r*, llamado razón de la progresión.

6. Hay *n* niños ($n \geq 3$), todos de distintas alturas, colocados alrededor de una circunferencia. Un niño en esta configuración se dice *alto* si es más alto que sus dos vecinos. Hallar todos los posibles números de niños altos que puede haber en la configuración.