

**XXVIII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA**  
**PRUEBA DE SELECCIÓN**  
**PRIMER DÍA (08/08/13)**

EN TODOS LOS PROBLEMAS,  
LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.

1. Un triángulo equilátero de lado 12 está dividido, mediante paralelas a sus lados, en 144 triangulitos de lado 1. Llamamos casillas a los triangulitos de lado 1. Algunas casillas están infectadas. Una casilla no infectada se contagia si al menos dos de sus vecinas (con las que comparte un lado) están infectadas. Determinar el número mínimo inicial de casillas que deben estar infectadas para que, en algún momento, todas las casillas del triángulo de lado 12 estén infectadas.

2. Hallar todos los pares de números enteros  $a$  y  $b$  tales que

$$\frac{a^2 + 1}{2b^2 - 3} = \frac{a - 1}{2b - 1}.$$

3. Sea  $ABC$  un triángulo isósceles de base  $AB$ . Se eligen los puntos  $P$  en el lado  $AC$  y  $Q$  en el lado  $BC$  tales que  $AP + BQ = PQ$ . La recta paralela a  $BC$  que pasa por el punto medio del segmento  $PQ$  corta al segmento  $AB$  en  $N$ . La circunferencia que pasa por los vértices del triángulo  $PNQ$  corta a la recta  $AC$  en los puntos  $P$  y  $K$ , y a la recta  $BC$  en los puntos  $Q$  y  $L$ . Si  $R$  es el punto de intersección de las rectas  $PL$  y  $QK$ , demostrar que la recta  $PQ$  es perpendicular a la recta  $CR$ .

**XXVIII OLIMPIÁDA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA**  
**PRUEBA DE SELECCIÓN**  
**SEGUNDO DÍA (09/08/13)**

EN TODOS LOS PROBLEMAS, LA RESPUESTA TIENE QUE ESTAR DEBIDAMENTE JUSTIFICADA.
--

4. Dado un triángulo  $ABC$  con  $AC = \frac{AB+BC}{2}$ , sea  $BL$  la bisectriz del ángulo  $ABC$ ; sean  $K$  y  $M$  los puntos medios de  $AB$  y  $BC$  respectivamente. Calcular el valor del ángulo  $KLM$  si se sabe que  $\angle ABC = \beta$ .

5. Hallar todos los números naturales  $n$  para los cuales es posible partir el conjunto  $\{1, 2, \dots, 3n\}$  de los primeros  $3n$  números naturales en conjuntos de tres elementos  $\{a, b, c\}$  tales que  $b-a$  y  $c-b$  son dos elementos distintos del conjunto  $\{n-1, n, n+1\}$ .

6. Se tiene un cubo de  $10 \times 10 \times 10$  dividido en 1000 cubitos unitarios mediante planos paralelos a sus caras. Inicialmente todos los cubitos son blancos. Alejo y Beto juegan al siguiente juego. Alejo elige una o varias tiras de  $1 \times 1 \times 10$  en cualquiera de las tres direcciones posibles del cubo, tales que no haya dos de estas tiras que tengan puntos en común, y colorea de negro todos sus cubitos unitarios. A continuación, Beto, que no ve el cubo, selecciona algunos cubitos unitarios y le pregunta a Alejo que color tienen. Determinar el menor número de cubitos unitarios que debe elegir Beto para determinar con certeza todos los cubito negros a partir de la respuesta de Alejo.