XXIX TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Juan multiplicó dos números enteros positivos consecutivos.
a) Demostrar que Pedro puede agregar dos dígitos a la derecha del número que obtuvo Juan de manera que el nuevo número sea un cuadrado perfecto.

2 PUNTOS

b) Demostrar que si el número que obtuvo Juan es mayor que 12 entonces Pedro tiene una sola manera de elegir los dos dígitos para lograr lo enunciado en a).

2 PUNTOS

2. En un triángulo ABC, sean K y M puntos de los lados AB y BC respectivamente, tales que KM es paralelo a AC. Los segmentos AM y KC se cortan en O. Se sabe que $AK = AO$ y $KM = MC$. Demostrar que $AM = KB$.

5 PUNTOS

3. Se tiene una franja infinita en ambas direcciones, de ancho 1, dividida en casillas de 1×1. En la franja hay dos casillas negras, separadas entre si por N casillas. Inicialmente un grillo se encuentra en una de esas N casillas. En cada movida, elegimos un entero mayor o igual que 0, y a continuación el grillo salta hacia la izquierda o hacia la derecha (a su elección) dejando ese número de casillas entre su salida y su llegada. En todo momento podemos ver donde se encuentra el grillo. Determinar los valores de N para los cuales podemos elegir enteros de modo que en una secuencia de movidas el grillo caiga finalmente en una de las casillas negras, independientemente de su posición inicial y de qué direcciones elija en sus saltos.

6 PUNTOS

4. Juan eligió varios puntos del plano (una cantidad finita) y los pintó usando cuatro colores, de modo que haya por lo menos un punto de cada color. Entre los puntos que eligió Juan no hay tres que estén alineados. Demostrar que Pedro puede elegir tres triángulos distintos (que pueden cortarse) cada uno con sus tres vértices pintados de tres colores distintos, y de modo que cada uno de estos triángulos no contenga puntos coloreados en su interior.
ACLARACIÓN: Los triángulos que elige Pedro pueden tener vértices comunes.

6 PUNTOS

CONTINÚA AL DORSO

5. Hay 99 chicos formando una ronda. Inicialmente cada uno de ellos tiene una pelota. Cada minuto, cada chico que en ese instante tenga una pelota, se la da a uno de sus dos vecinos. Si un chico recibe simultáneamente dos pelotas (una de cada vecino) entonces arroja una de ellas afuera, y ésta ya no interviene más en el juego. Determinar el menor período de tiempo que debe transcurrir hasta que pueda quedar solo una pelota en juego.

7 PUNTOS

6. Determinar si existen enteros positivos *a*, *b*, *c*, *d* tales que

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=1, \quad \frac{a}{d}+\frac{c}{b}=2008.$$

7 PUNTOS

7. Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo de lados *AB*, *BC*, *CD*, *DA*, que no tiene lados paralelos. Se sabe que los ángulos entre la diagonal *AC* y los lados del cuadrilátero son, en algún orden, iguales a 16º, 19º, 55º y 55º. Hallar todos los valores posibles del ángulo agudo que se forma entre las diagonales *AC* y *BD*.

8 PUNTOS

XXIX TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Un triángulo de papel con uno de sus ángulos igual a α se divide en varios triángulos. Determinar si es posible que todos los ángulos de todos los triángulos obtenidos sean menores que α si
a) $\alpha = 70^o$;

3 PUNTOS

b) $\alpha = 80^o$.

3 PUNTOS

2. Un grillo está sobre un punto P de la recta real. Los puntos 0 y 1 son trampas. En cada movida, elegimos un número positivo y luego el grillo salta hacia la izquierda o hacia la derecha, a su elección, una distancia igual a dicho número. En todo instante vemos donde se encuentra el grillo. Para qué puntos P podemos elegir números de modo que el grillo caiga en una de las trampas mediante una secuencia de movidas correspondientes a los números que elegimos, independientemente de las direcciones que elija para sus saltos.

6 PUNTOS

3. Un polinomio de grado $n > 1$ tiene n raíces reales distintas $x_1, x_2, ..., x_n$. Su derivado tiene $n - 1$ raíces $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$. Demostrar la desigualdad

$$\frac{x_1^2 + ... + x_n^2}{n} > \frac{y_1^2 + ... + y_{n-1}^2}{n-1}.$$

ACLARACIÓN: Dado un polinomio $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, su polinomio derivado es el polinomio $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1$.
Por ejemplo, el derivado de $3x^5 + 4x^4 - 4x^2 + x + 11$ es $15x^4 + 16x^3 - 8x + 1$.

6 PUNTOS

4. Cada uno de dos amigos, Pedro y Alex, dibuja un cuadrilátero convexo que no tiene lados paralelos. Luego cada uno de los chicos traza una diagonal de su cuadrilátero y calcula los ángulos entre esa diagonal y los lados del cuadrilátero. Pedro obtiene los números α, α, β y γ, en algún orden, y Alex obtiene los mismos números (posiblemente en otro orden). Demostrar que el ángulo que forman entre si las dos diagonales del cuadrilátero de Pedro es igual al ángulo que forman entre si las dos diagonales del cuadrilátero de Alex.

7 PUNTOS

CONTINÚA AL DORSO

5. Se escriben todos los enteros positivos en una línea infinita, en algún orden (cada número figura exactamente una vez). Determinar si es necesariamente cierto que hay un segmento (finito) de la línea (que contiene más de un número) tal que la suma de todos los números de ese segmento es igual a un número primo. (El segmento no tiene obligación de comenzar en el primer número de la línea.)

8 PUNTOS

6. Once magos se someten a la siguiente prueba: Inicialmente los once tienen los ojos vendados, y a cada uno de ellos se le coloca un sombrero de un color distinto, elegido entre 1000 colores posibles. A continuación se quitan las vendas de los ojos y cada mago ve todos los sombreros excepto el propio. A continuación, y todos en el mismo instante, cada mago muestra una tarjeta negra o una tarjeta blanca. Finalmente, todos deben adivinar simultáneamente el color de sus propios sombreros. Decidir si los magos pueden ponerse de acuerdo previamente en un procedimiento que les permita cumplir el objetivo.

8 PUNTOS

7. Se tienen dos circunferencias y tres rectas tales que para cada recta, las dos cuerdas que determina al cortar a cada una de las dos circunferencias son de igual longitud. Los puntos de intersección de estas rectas forman un triángulo. Demostrar que su circunferencia circunscrita pasa por el punto medio del segmento que une los centros de las circunferencias dadas.
ACLARACIÓN: La *circunferencia circunscrita* de un triángulo es la que pasa por los tres vértices del triángulo. Su centro es la intersección de las mediatrices de los lados del triángulo.

8 PUNTOS

XXIX TORNEO DE LAS CIUDADES

(PRIMAVERA 2008 HEMISFERIO NORTE)

APELLIDO:

NOMBRES:

D.N.I.:

AÑO QUE CURSÓ EN 2007, CONTANDO DESDE EL PRIMER GRADO DE PRIMARIA:

DIRECCIÓN ELECTRÓNICA (E-MAIL):

DOMICILIO:

LOCALIDAD:

PROVINCIA:

TELÉFONO (INCLUIR TELEDISCADO):

CELULAR:

CÓDIGO POSTAL:

NOMBRE DE LA ESCUELA: