

XXV Olimpiada Matemática de la Cuenca del Pacífico



Marzo 2013

Duración: 4 horas

Cada problema vale 7 puntos

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO <http://www.daryn.kz/apmo>. Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha.*

No se puede usar calculadora.

Problema 1. Sea ABC un triángulo con alturas AD , BE y CF , y sea O su circuncentro. Demostrar que los segmentos OA , OF , OB , OD , OC OE dividen al triángulo ABC en tres pares de triángulos que tienen áreas iguales.

Problema 2. Determinar todos los enteros positivos n para los que $\frac{n^2+1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2+2}$ es un

entero. Aquí $\lfloor r \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que r .

Problema 3. Para los $2k$ números reales $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ se define la sucesión de números X_n mediante

$$X_n = \sum_{i=1}^k \lfloor a_i n + b_i \rfloor \quad (n=1, 2, \dots).$$

Si la sucesión X_n es una progresión aritmética, demostrar que $\sum_{i=1}^k a_i$ debe ser entero.

Aquí $\lfloor r \rfloor$ denota al mayor entero menor o igual que r .

Problema 4. Sean a y b enteros positivos, y sean A y B conjuntos finitos de números enteros que satisfacen:

(i) A y B son disjuntos;

(ii) si un entero i pertenece a A o a B , entonces $i+a$ pertenece a A o $i-b$ pertenece a B .

Demostrar que $a|A|=b|B|$. (Aquí $|X|$ denota el número de elementos del conjunto X .)

Problema 5. Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia ω , y sea P un punto en la prolongación de AC tal que PB y PD son tangentes a ω . La tangente que pasa por C corta a PD en Q y a la recta AD en R . Sea E el segundo punto de intersección entre AQ y ω . Demostrar que B , E , R son colineales.