XXV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Se tiene una progresión aritmética de números enteros tal que la suma de sus términos es igual a una potencia de 2. Demostrar que la cantidad de términos de la progresión es también una potencia de 2.
ACLARACIÓN: Una progresión aritmética es una secuencia de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumando un cierto número fijo d, llamado diferencia o razón de la progresión.

4 PUNTOS

2. En las casillas de un tablero de ajedrez de 8×8 se deben colocar fichas. Diremos que una ficha está amenazada si la casilla que ocupa, llamémosla y, es la segunda de una de una seguidilla de tres casillas en diagonal, x, y, z, y la casilla x está ocupada por una ficha, mientras que la casilla z está vacía. Determinar el máximo número de fichas que se pueden colocar de modo que cada ficha esté amenazada.

5 PUNTOS

3. Las ganancias de la empresa *La pompa de jabón*, cambian todos los días: aumentan o disminuyen n por ciento, donde n es un entero fijo, $0<n<100$ (los cálculos se realizan con absoluta precisión). Decidir si existe algún valor de n para el cual las ganancias puedan tomar dos días distintos el mismo valor.

5 PUNTOS

4. Se dan dos circunferencias que se cortan en dos puntos, A y B. La tangente común a estas circunferencias que está más cerca de B que de A toca a las circunferencias en los puntos E y F. La recta AB corta a la recta EF en M. Se elige K en la prolongación de AM de modo que $KM=MA$. La recta KE corta por segunda vez a la circunferencia que contiene a E en el punto C. La recta KF corta por segunda vez a la circunferencia que contiene a F en el punto D. Demostrar que los puntos A, C y D están alineados.

6 PUNTOS

5. Se tiene una mesa de billar con forma de polígono (no necesariamente convexo) tal que sus ángulos interiores sólo pueden medir 90^o o 270^o. En todos los vértices hay troneras (agujeros) tales que si una bola impacta en un vértice, cae en la tronera y desaparece de la mesa para siempre. Una bola parte de un vértice A de un ángulo interior de 90^o del polígono y rueda por la mesa de billar, rebotando en los bordes de acuerdo con la regla “el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión”. Demostrar que el recorrido de esta bola no puede finalizar en el vértice A.

6 PUNTOS

6. Inicialmente, en el pizarrón, está escrito el número 2004!. Dos jugadores juegan por turnos, uno a continuación del otro. En cada turno, el jugador al que le toca jugar, elige un número natural que tenga como mucho 20 factores primos distintos y sea menor que el número del pizarrón (cada factor puede figurar con exponente mayor que 1). Resta el número del pizarrón menos el que eligió, y borra todos los números del pizarrón salvo el resultado de la resta. Gana el juego el jugador que logra que la resta sea 0. Determinar cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora (el que empieza o el segundo) e indicar cuál es dicha estrategia, que le permite ganar no importa lo bien que juegue el oponente.
ACLARACIÓN: $2004!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2004$ es el producto (multiplicación) de todos los enteros desde 1 hasta 2004.

7 PUNTOS

XXV TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Las ganancias de la empresa *La pompa de jabón*, cambian todos los días: aumentan o disminuyen n por ciento, donde n es un entero fijo, $0<n<100$ (los cálculos se realizan con absoluta precisión). Decidir si existe algún valor de n para el cual las ganancias puedan tomar dos días distintos el mismo valor.

4 PUNTOS

2. Se tiene una mesa de billar con forma de polígono (no necesariamente convexo) tal que todos sus ángulos miden un número entero de grados (los ángulos no son necesariamente iguales y puede haber ángulos mayores que 180^{o}). En todos los vértices hay troneras (agujeros) tales que si una bola impacta en un vértice, cae en la tronera y desaparece de la mesa para siempre. Una bola parte de un vértice A de un ángulo interior del polígono que mide 1^{o} y rueda por la mesa de billar, rebotando en los bordes de acuerdo con la regla “el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión”. Demostrar que el recorrido de esta bola no puede finalizar en el vértice A.

6 PUNTOS

3. Dada una pirámide de base triangular, se proyecta en forma perpendicular sobre un plano de modo que esta proyección tenga la máxima área posible. Demostrar que el plano es paralelo a una de las caras de la pirámide o es paralelo a dos aristas opuestas de la pirámide.

6 PUNTOS

4. Inicialmente, en el pizarrón, está escrito el número 2004!. Dos jugadores juegan por turnos, uno a continuación del otro. En cada turno, el jugador al que le toca jugar, elige un número natural que tenga como mucho 20 factores primos distintos y sea menor que el número del pizarrón (cada factor puede figurar con exponente mayor que 1). Resta el número del pizarrón menos el que eligió, y borra todos los números del pizarrón salvo el resultado de la resta. Gana el juego el jugador que logra que la resta sea 0. Determinar cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora (el que empieza o el segundo) e indicar cuál es dicha estrategia, que le permite ganar no importa lo bien que juegue el oponente.
ACLARACIÓN: $2004!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2004$ es el producto (multiplicación) de todos los enteros desde 1 hasta 2004.

6 PUNTOS

5. En el plano se han trazado la parábola de ecuación $y=x^2$ y una circunferencia que tiene exactamente dos puntos en común con la parábola, A y B. Resultó que la recta tangente a la circunferencia, trazada por A coincide con la recta tangente a la parábola, trazada por A. Decidir si esto implica que las respectivas rectas tangentes trazadas por B también coinciden entre si.

7 PUNTOS

6. Sobre la mesa hay un mazo de 36 naipes que son 9 de cada palo (espada, oro, copa y basto); todos los naipes tienen su cara hacia abajo (no se ve). El asistente del mago mezcla el mazo, y luego, sin alterar el orden en que quedaron los naipes en el mazo, espía cada naipe y le hace una marca azul o una marca roja en el reverso, de acuerdo con un sistema arreglado previamente con el mago. (Todas las marcas azules están en el mismo lugar, son iguales y del mismo tamaño, y lo mismo ocurre con todas las marcas rojas.) En mago debe adivinar el palo de los 36 naipes, uno por uno: a la vista del reverso del único naipe visible, (el que está arriba de todos los demás) dice un palo. Ese naipe se da vuelta, el mago lo ve, y luego se descarta y no interviene más. A continuación, el mago mira el reverso del naipe que ahora está arriba de todos los demás, dice un palo, … y así siguiendo. Su objetivo es acertar la mayor cantidad posible de veces.
Decidir si utilizando este sistema el mago puede asegurarse de adivinar correctamente el palo de
(a) por lo menos 19 de los 36 naipes;

3 PUNTOS

(b) por lo menos 20 de los 36 naipes.

5 PUNTOS