XXVI Olimpíada Matemática de la Cuenca del Pacífico

Marzo 2014

Duración: 4 horas *Cada problema vale 7 puntos*

** Los problemas son confidenciales hasta su publicación en el sitio web oficial de APMO* http://www.daryn.kz/apmo.*Por favor, no publicar ni discutir los problemas en Internet hasta esa fecha.*

No se puede usar calculadora.

Problema 1. Para un entero positivo *m* denotamos $S(m)$ y $P(m)$ a la suma y el producto, respectivamente, de los dígitos de *m*. Demostrar que para cada entero positivo *n*, existen enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfacen las siguientes condiciones:

$S(a_1) < S(a_2) < \ldots < S(a_n)$ y $S(a_i) = P(a_{i+1})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

(Hacemos $a_{n+1} = a_1$.)

Problema 2. Sea $S = \{1, 2, \ldots, 2014\}$. Para cada subconjunto no vacío $T \subseteq S$, se elige uno de sus números como su *representante*. Hallar la cantidad de maneras de asignar representantes a todos los conjuntos no vacíos de *S* de modo que si un subconjunto $D \subseteq S$ es la unión disjunta de subconjuntos no vacíos $A, B, C \subseteq S$, entonces el representante de *D* es también el representante de al menos uno de los conjuntos *A*, *B*, *C*.

Problema 3. Hallar todos los enteros positivos *n* tales que para todos entero *k* existe un entero *a* para el cual $a^3 + a - k$ es divisible por *n*.

Problema 4. Sean *n* y *b* enteros positivos. Decimos que *n* es *b-discriminante* si existe un conjunto que consiste de *n* enteros positivos distintos menores que *b* que no tiene dos subconjuntos distintos *U* y *V* tales que la suma de todos los elementos de *U* sea igual a la suma de todos los elementos de *V*.

(a) Demostrar que 8 es 100-discriminante.
(b) Demostrar que 9 no es 100-discriminante.

Problema 5. Sean ω y Ω dos circunferencias que se cortan en dos puntos *A* y *B*. Sea *M* el punto medio del arco AB de la circunferencia ω (*M* está en el interior de Ω). Una cuerda *MP* de la circunferencia ω corta a Ω en *Q* (*Q* está en el interior de ω). Sea ℓ_P la recta tangente a ω en *P*, y sea ℓ_Q la recta tangente a Ω en *Q*. Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo formado por las rectas ℓ_P, ℓ_Q y *AB* es tangente a Ω.