XXXI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2010 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Se tiene un trozo de queso. Se elige un número positivo $a \neq 1$, no necesariamente entero, que queda fijo en todo el proceso, y se corta el queso en etapas. En la primera etapa se divide el trozo de queso en dos pedazos que estén en la proporción 1 : *a*. Luego, en cada etapa, se puede elegir cualquiera de los pedazos existentes hasta ese momento y dividirlo en dos nuevos pedazos, en la proporción 1 : *a*. Decidir si es posible elegir el número *a* de modo que al cabo de varias etapas convenientemente seleccionadas, el total de los pedazos de queso obtenidos se puedan agrupar en dos pilas con el mismo peso.

ACLARACIÓN: Dos números *x*, *y* están en la proporción 1 : *a* si $\frac{x}{y} = \frac{1}{a}$. 3 PUNTOS

2. En un triángulo *ABC* sean *M* el punto medio del lado *AC* y *P* un punto del lado *BC*. Los segmentos *AP* y *BM* se cortan en el punto *O*. Se sabe que *BO* = *BP*. Determinar el valor de la fracción $\frac{OM}{PC}$. 4 PUNTOS

3. Alrededor de una circunferencia hay escritos 999 números, cada uno de ellos igual a 1 o igual a – 1. Los dos valores aparecen. Se calculan todos los productos de 10 números consecutivos, y se suman todos los productos obtenidos.

a) ¿Cuál es el mínimo valor posible de la suma? 3 PUNTOS

b) ¿Cuál es el máximo valor posible de la suma? 3 PUNTOS

4. Decidir si existe algún número entero positivo *n* tal que la suma de los dígitos de *n* sea 100 y la suma de los dígitos de n^3 sea $100^3 = 1000000$? 6 PUNTOS

5. a) Tres caballeros cabalgan alrededor de una pista circular en el sentido de las agujas del reloj. Hay un único punto de la pista en el que un caballero puede pasar a otro caballero. Determinar si es posible que cabalguen un tiempo tan largo como se quiera si cada caballero tiene velocidad constante y distinta de cada uno de los otros caballeros. 3 PUNTOS

b) ¿Cuál es la respuesta si los que cabalgan son 10 caballeros? 5 PUNTOS

6. En el plano se traza una poligonal abierta y sin entrecruzamientos de 31 lados (dos lados consecutivos están siempre contenidos en rectas distintas). Luego se trazan las 31 rectas que contienen lados de la poligonal (algunas de estas rectas pueden coincidir). ¿Cuál es el número mínimo posible de rectas distintas que puede haber? 8 PUNTOS

7. Se tiene un tablero de 10×10. En algunas casillas hay pulgas, a lo sumo una pulga en cada casilla. Cada minuto todas las pulgas saltan simultáneamente de la casilla en la que se encuentran hacia una casilla adyacente (es decir, la casilla en la que finaliza el salto tiene un lado común con la casilla de partida). Cada pulga mantiene una misma dirección en todos sus saltos salvo cuando, para hacerlo, debería saltar fuera del tablero; en ese caso, cambia la dirección hacia la opuesta, y a continuación conserva esta nueva dirección. Transcurrida una hora de comenzado el movimiento, no ha habido ningún momento en el que dos o más pulgas estuvieron juntas en una misma casilla. Determinar el número máximo de pulgas que puede haber en el tablero. 11 PUNTOS

XXXI TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2010 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. Consideramos todas las rectas del plano. Decidir si es posible agruparlas en pares de rectas de manera que en cada par las dos rectas sean perpendiculares y cada recta esté en exactamente uno de los pares.

3 PUNTOS

2. a) Se tiene un trozo de queso. Se elige un número irracional $a > 0$, que queda fijo en todo el proceso, y se corta el queso en etapas. En la primera etapa se divide el trozo de queso en dos pedazos que estén en la proporción 1 : *a*. Luego, en cada etapa, se puede elegir cualquiera de los pedazos existentes hasta ese momento y dividirlo en dos nuevos pedazos, en la proporción 1 : *a*. Decidir si es posible elegir el número *a* de modo que al cabo de varias etapas convenientemente seleccionadas, el total de los pedazos de queso obtenidos se puedan agrupar en dos pilas con el mismo peso.

2 PUNTOS

b) La misma pregunta que en a) para un número racional positivo $a \neq 1$.

2 PUNTOS

ACLARACIÓN: Dos números *x*, *y* están en la proporción 1 : *a* si $\frac{x}{y} = \frac{1}{a}$.

3. ¿Es posible obtener el número entero 2001 aplicando repetidas veces las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, arco seno, arco coseno, arco tangente y arco cotangente a partir del número entero 1? (Cada función se puede aplicar un número arbitrario de veces, de modo que se permiten expresiones del tipo “sen cos arcsen cos sen”).

ACLARACIÓN: Las funciones arco seno, arco coseno, arco tangente y arco cotangente son las respectivas funciones inversas de seno, coseno, tangente y cotangente.

6 PUNTOS

4. En un congreso se reúnen 5000 cinéfilos; cada uno de ellos ha visto al menos una película. Los participantes se deben dividir en grupos que sean de alguna de dos posibles clases. En un grupo de la primera clase, todos los integrantes tienen que haber visto una misma película. En un grupo de la segunda clase, cada integrante tiene que haber visto una película que no haya visto ningún otro integrante de ese grupo. Demostrar que es posible dividir a los cinéfilos en exactamente 100 grupos. (Puede haber grupos de una sola persona.)

6 PUNTOS

5. Hay 33 caballeros que cabalgan alrededor de una pista circular en el sentido de las agujas del reloj. Hay un único punto de la pista en el que un caballero puede pasar a otro caballero. Determinar si es posible que cabalguen un tiempo tan largo como se quiera si cada caballero tiene velocidad constante y distinta de cada uno de los otros caballeros.

7 PUNTOS

6. Un cuadrilátero *ABCD* posee una circunferencia inscrita de centro *I*. Sean *M* y *N* los puntos medios de los lados *AB* y *CD*, respectivamente. Se sabe que $\frac{IM}{AB} = \frac{IN}{CD}$. Demostrar que *ABCD* es un trapecio o un paralelogramo.

8 PUNTOS

7. Dado un entero positivo, la operación permitida es insertar signos + entre sus dígitos, a elección, y calcular la suma indicada (por ejemplo, del número 123456789 se puede obtener 12345+6+789=13140). Al número obtenido se le puede aplicar una operación permitida, y así siguiendo. Demostrar que a partir de cualquier entero positivo se puede llegar a un número de un solo dígito al cabo de a lo sumo 10 operaciones permitidas.

9 PUNTOS