XXXIII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2012 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL JUVENIL

1. Una cantidad par de peras se han puesto en una fila de modo que el peso de dos peras vecinas difiere como mucho en 1 gramo. Demostrar que siempre es posible distribuir las peras en paquetes de dos peras cada uno y luego colocar estos paquetes en una fila de manera que el peso de dos paquetes vecinos difiera como mucho en 1 gramo. 4 PUNTOS

2. En el plano hay marcados 100 puntos entre los que no hay tres alineados. Determinar si siempre es posible dividir estos puntos en 50 grupos de dos puntos cada uno y unir los dos puntos de cada grupo con un segmento de modo que cada uno de los 50 segmentos corte a cada uno de los otros 49.

4 PUNTOS

3. En un equipo de guardias cada guardia tiene un rango, que es un entero positivo. Un guardia de rango N trabaja N días seguidos y está libre los siguientes N, de nuevo trabaja N días y descansa N, y así siguiendo. Para cada dos guardias, el cociente entre el mayor rango y el menor rango es mayor o igual que 3. Determinar si es posible que en ese equipo de guardias en cada momento haya al menos un guardia trabajando. (Los guardias no necesariamente comienzan su turno de trabajo el mismo día.) 6 PUNTOS

4. En cada casilla de un tablero de $n \times n$ hay un + o un –. En cada paso se puede elegir una fila o una columna y cambiar todos los signos de esa línea. Se sabe que, a partir de la posición inicial, se puede obtener la tabla que tiene en todas sus casillas un +, mediante algún número de pasos. Demostrar que siempre se puede lograr en como mucho n pasos.

6 PUNTOS

5. Sea p un número primo. Un conjunto de $p+2$ enteros positivos (no necesariamente distintos) se dice *interesante* si la suma de cualesquiera p de estos enteros es un múltiplo de cada uno de los otros dos. Hallar todos los conjuntos interesantes. 8 PUNTOS

6. Un banco tiene un millón de clientes. Cada cliente tiene su único código que consiste de seis dígitos (clientes distintos tienen códigos distintos). El doctor Claw conoce la lista de todos los clientes. Además el puede ingresar en la cuenta de cada cliente, pero solo una vez. Al ingresar en una cuenta él puede conocer N dígitos, a elección, del código de ese cliente. La elección de las N posiciones puede variar de cliente en cliente.
El propósito del doctor Claw es conocer el código de su adversario, el inspector Gadget (que también es cliente). Hallar el menor valor de N para el que el doctor Claw puede conocer por completo y con certeza el código del inspector Gadget. 8 PUNTOS

7. Sea ABC un triángulo equilátero y AH su altura. Sea I el incentro del triángulo ABH y sean L, K y J los incentros de los triángulos ABI, BCI y CAI respectivamente. Determinar la medida del ángulo KJL. 8 PUNTOS

XXXIII TORNEO INTERNACIONAL DE LAS CIUDADES
PRIMAVERA 2012 DEL HEMISFERIO NORTE
NIVEL MAYOR

1. En un equipo de guardias cada guardia tiene un rango, que es un entero positivo. Un guardia de rango *N* trabaja *N* días seguidos y está libre los siguientes *N*, de nuevo trabaja *N* días y descansa *N*, y así siguiendo. Para cada dos guardias, el cociente entre el mayor rango y el menor rango es mayor o igual que 3. Determinar si es posible que en ese equipo de guardias en cada momento haya al menos un guardia trabajando. (Los guardias no necesariamente comienzan su turno de trabajo el mismo día.) 4 PUNTOS

2. Dentro de un círculo hay marcados 100 puntos entre los que no hay tres alineados. Demostrar que es posible dividir estos puntos 50 en grupos de dos puntos cada uno de modo que los 50 segmentos que unen los dos puntos del mismo grupo se corten todos entre si dentro del círculo. 5 PUNTOS

3. Sea *n* un entero positivo. Demostrar que existen enteros $a_1, a_2, ..., a_n$ tales que para todo entero *x* el número $(...((x^2+a_1)^2+a_2)^2+...+a_{n-1})^2+a_n$ es divisible por $2n-1$. 6 PUNTOS

4. Alex marcó seis puntos en un cubo unitario, un punto en cada cara. A continuación unió con segmentos cada par de puntos marcados en caras vecinas. Finalmente, calculó la suma total de las longitudes de estos segmentos. Demostrar que el número que obtuvo fue mayor o igual que $6\sqrt{2}$. 6 PUNTOS

5. La recta ℓ es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo *ABC*. Sean ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c las simétricas de ℓ con respecto a las bisectrices exteriores del triángulo *ABC*. Demostrar que el triángulo formado por estas tres rectas es congruente al triángulo *ABC*. 8 PUNTOS

6. a) Se tiene una sucesión infinita de rectángulos tales que, para cada *n*, el área del *n* – ésimo rectángulo es n^2. Determinar si siempre es posible cubrir el plano con estos rectángulo. (Está permitido superponer rectángulos.) 3 PUNTOS
b) Se tiene una sucesión infinita de cuadrados tales que para cada número *N* existen cuadrados de área total mayor que *N*. Determinar si es necesariamente posible cubrir el plano con estos cuadrados. (Está permitido superponer cuadrados.) 6 PUNTOS

7. Konstantin tiene una pila de 100 piedras. En cada movida, elige una pila y la divide en dos más chicas hasta tener 100 pilas de una piedra cada una. Demostrar que

a) en algún momento, entre las pilas habrá 30 pilas que contienen en total exactamente 60 piedras; 6 PUNTOS

b) en algún momento, entre las pilas habrá 20 pilas que contienen en total exactamente 60 piedras; 3 PUNTOS

c) Konstantin puede mover de modo que en ningún momento haya entre las pilas 19 pilas que contengan en total exactamente 60 piedras. 3 PUNTOS