XII Olimpíada Matemática Rioplatense

San Isidro – 10 de diciembre de 2003

Nivel 2 – Primer Día Versión en Español

(1) Sea ABC un triángulo con $AB = 30$, $BC = 50$, $CA = 40$. Las rectas ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c son paralelas a BC, CA, AB, respectivamente, y cortan al triángulo. Las distancias entre ℓ_a y BC, ℓ_b y CA, ℓ_c y AB son 1, 2, 3, respectivamente. Hallar los lados del triángulo que determinan ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c.

(2) Decidir si para algún entero $n \geqslant 3$ existen n enteros positivos tales que para cada par de ellos, su suma divida a la suma de los n enteros.

(3) Se tiene una sucesión infinita que utiliza los dígitos $1, 2, \ldots, 9$. Consideramos cada tramo de dígitos consecutivos de la sucesión como un entero positivo escrito en base 10.

Demostrar que para cualquier entero $n \geqslant 2$ al menos una de las siguientes dos afirmaciones es verdadera:

(i) Se pueden encontrar n números A_1, A_2, $\ldots$, A_n formados por dígitos consecutivos de la sucesión, cada uno estrictamente a la derecha del anterior, cada uno con n^2 dígitos y tales que $A_1 < A_2 < \cdots < A_n$.

(ii) La sucesión contiene un número de a lo sumo $n-1$ dígitos que se repite consecutivamente por lo menos $n+2$ veces.

Duración: $3\frac{1}{2}$ *horas*