Investigación y docencia

Ejemplos elementales de optimización con restricciones

por N. Aguilera

Estas notas forman parte de la colección de apuntes en la sección *Investigación y Docencia* de la Olimpíada Matemática Argentina, disponibles vía internet en http://oma.org.ar/invydoc.

Fecha de esta versión: 5 de agosto de 2023

A Juan Carlos,

alias El Jefe,

por todo lo que hizo

y sigue haciendo

Contenidos

Figuras

1. Introducción

Un lugar en el mundo

La vida actual no podría ser la misma sin las matemáticas. Pensemos en cálculos de estructuras, diseño y uso de redes viales o de internet, predicciones meteorológicas, y tantas otras. Hoy está de moda el análisis de “big data”, y ya damos por descontado que el celular encontrará para nosotros el camino más eficiente para ir de un lado al otro, exhibiendo mapas relevantes.

Buscando la punta del ovillo, hay muchas citas que vienen a la mente.(1)

Galileo (1564–1642) decía en *Il Saggiatore* de 1623:

> *... (el universo) está escrito en lenguaje matemático, y las letras son triángulos, círculos y otras figuras geométricas,...*

Se atribuye a otro gigante, C. F. Gauss (1777–1855), haber mencionado unos 200 años después:

> *La matemática es la reina de las ciencias, y la aritmética es la reina de la matemática.*

Aproximadamente 100 años más tarde E. T. Bell (1883–1960) tomó y reformuló esta frase dándole el título *Matemática: reina y sirvienta de la ciencia* a uno de sus libros (Bell, 1951).

---

(1) Las *fake news* de estas épocas nos hacen estar más atentos a la veracidad de las citas, y de paso disfrutar de la historia.

A fin de no interrumpir el flujo de la lectura con marcas de notas al pie (¡como ésta!), postergamos algunas notas y comentarios para el final de la sección.

El título de Bell se "viralizó" y fue usado —y sigue usándose— en muchas oportunidades. Así, unos 40 años después, el ilustre matemático M. Atiyah (1929–2019) daba una conferencia con un título casi idéntico en la Sociedad Americana de Filosofía (Atiyah, 1993).

Si bien intuimos una idea común, las citas fueron hechas con distintos enfoques.

Galileo hace referencia a objetos geométricos dentro de un trabajo sobre astronomía que es considerado como una de las piedras basales del método científico.

De ser cierta la cita de Gauss, posiblemente con "las ciencias" se refiriera fundamentalmente a las relacionadas con física, mientras que con "la aritmética" se refiriera a lo que hoy conocemos como teoría elemental de números.

Como nos muestra la obra maestra *Elementos* de Euclides (unos 300 años a. C.), durante largos períodos de la antigüedad no se hizo mucha separación entre geometría y números, lo que nos induce a creer que Galileo y Gauss estaban diciendo lo mismo.

Sin embargo, hay una tensión entre el planteo de Galileo, más inclinado a las aplicaciones, y el de Gauss, quien no duda de la utilidad de las matemáticas pero pone en su cima a los planteos mayormente teóricos de la teoría de números (aunque mucho después se encontraran aplicaciones prácticas).

Atiyah resalta esta tensión al plantear en su charla el "reina y sirviente" como dicotomía: ¿la matemática es arte o es ciencia?, ¿existe la separación entre "pura" y "aplicada"?

Mirando las fechas de las citas notamos también el fenomenal desarrollo de las matemáticas. Bell piensa su libro de 1951 como uno de difusión, presentando aspectos teóricos y prácticos de las ramas centrales del momento. Habla de álgebra, geometría, teoría de números, cálculo diferencial, probabilidad y estadística. Comenta al pasar la teoría de juegos que estaba naciendo con von Neumann (1903–1957) y colaboradores, y menciona la computadora como herramienta para el cálculo numérico, especialmente en ecuaciones diferenciales, temas en los que la influencia de von Neumann fue decisiva. Las aplicaciones en esa época eran fundamentalmente referidas a ciencias físicas y naturales.

No debe sorprendernos que Bell no mencionara ni teoría de grafos ni programación lineal, áreas que crecieron siguiendo de cerca las innovaciones en las computadoras, y ambas muy relacionados con el estudio de redes que mencionamos al principio.

Estos dos temas (grafos y programación lineal) tratan de problemas de *optimización con restricciones*, en los que se busca minimizar el costo o maximizar el beneficio cuando hay limitaciones en la elección de las variables involucradas.

Muchos de nosotros vimos problemas de optimización (con o sin restricciones) por primera vez al estudiar cálculo diferencial. Sin embargo, grafos y programación lineal están relacionados con esa teoría muy lejanamente, lo que permite que se vean con herramientas que poseen los estudiantes de secundaria.

Tanto es así, que Santaló propone en *La enseñanza de la matemática en la escuela media* (1986) incluir rudimentos de programación lineal entre los contenidos del tercer año, relegando tal vez para un sexto año la enseñanza del cálculo diferencial. Si bien no propuso en aquel entonces la enseñanza de grafos, propone —en forma reducida— su enseñanza en los cursos de profesorado en *La geometría en la formación de profesores* (1993).

A partir de 2019, la OMA comenzó a incorporar entre los temas que abarca a la modelización y resolución de problemas de la vida cotidiana. Por un lado para tratar de intervenir en olimpiadas internacionales sobre estos temas, pero fundamentalmente para acoplarse al movimiento mundial que trata de mostrar la influencia de las matemáticas en nuestras vidas, liberando a la enseñanza de temas que poco atraen a los estudiantes.

Así, la OMA organizó varias reuniones durante 2019 en las que trabajamos sobre sobre teoría de grafos, y en 2020 estaba previsto continuar con reuniones en temas de programación lineal.

Pero el hombre propone y la pandemia dispone.

OMA y covid-19

“Recalculando” las actividades para el primer semestre de 2020, presentamos estas notas como intermedio antes de meternos de lleno en cuestiones de programación lineal.

Retomando temas que vimos en cursos de OMA anteriores, veremos problemas de optimización de geometría euclidiana y de funciones polinómicas sencillas (eventualmente en varias variables).

Con más énfasis en la parte “pura” pero con bastante sabor a “aplicada”, veremos técnicas que pueden rastrearse hasta la época de los babilonios, unos 2000 años a. C.

Se trata en parte de temas propuestos por Santaló para tercer año junto a la programación lineal en *La enseñanza de la matemática en la escuela media* y a los que vuelve —con mayor profundidad— en *La geometría en la formación de profesores*.

También recomendamos los hermosos libros de Vasíliev y Gutenmájer (1980), que en los problemas abreviaremos como VG, y de Niven (1981) (en inglés), de los cuales hemos tomado ideas y problemas.

Sobre estos apuntes

- Si bien el contenido de estas notas es elemental, suponemos que el lector tiene ciertos conocimientos de matemáticas, como seguramente tienen los participantes de olimpíadas o los profes de secundaria. Por ejemplo inducción, subíndices, el factorial o símbolos como $\sum$ y $\in$.

  También suponemos que el lector sabe trabajar con aplicaciones de geometría dinámica, que acá denominaremos genéricamente como GeoGebra, aunque hay muchosn posibles.

A propósito, los gráficos acá están hechos con GeoGebra.

- Siguiendo el ejemplo de Gentile (1991), el núcleo de estas notas es la resolución de problemas y ejercicios, y no haremos distinción formal entre ellos. Están numerados consecutivamente, escritos en letra redonda y terminan con el símbolo "✄".

  Las definiciones y algunas notaciones también están escritas en redonda, pero terminan con el símbolo "♣".

  Por otra parte los enunciados de teoremas, propiedades y otros resultados están escritos en cursiva y no tienen símbolo final. Deben tomarse como "axiomas" o "verdades que no se discuten", y en algunos casos sus demostraciones se dan como ejercicios pautados.

- Entremezcladas en el texto aparecen algunas notas de menor importancia que comienzan con el símbolo "✍".

  ✍ ¡Como ésta!

- En `http://www.oma.org.ar/invydoc` se encuentra la versión electrónica actualizada de estas notas en un archivo "pdf".

  Además de ventajas tales como búsqueda, el archivo electrónico contiene vínculos o enlaces (*links*) remarcados en azul que llevan a una ubicación dentro del mismo archivo o en internet.

  Está diseñado de modo que puede leerse sin mayores inconvenientes en "tabletas" no muy chicas u ocupando media pantalla en un monitor más grande.

  El diseño también permite la impresión de dos páginas por carilla de hoja A4.

- Computadoras, calculadoras y celulares expresan los números poniendo un "punto" decimal en vez de la "coma", y para no confundirnos seguimos esa práctica: 1.589 es un número entre 1 y 2, y 1589 es un número entero, mayor que mil. A veces dejamos pequeños espacios entre las cifras, como en 123 456.789.

- A fin de simplificar la escritura (y tratando de no ser pedantes ni rimbombantes), en vez de poner "$a \in A$ y $b \in A$" a veces pondremos "$a, b \in A$". Del mismo modo, "$x \neq a, b$" debe entenderse como "$x \neq a$ y $x \neq b$".

  ✍ ¡Que quede entre nosotros y no salga de acá!

- Si A y B son puntos distintos del plano, AB indica tanto el segmento, como su longitud, como la recta que pasa por ambos.
- $\mathbb{R}$ denota el conjunto de números reales, y $\mathbb{R}^n$ indica el espacio euclidiano de dimensión n donde los puntos se representan mediante coordenadas cartesianas. En particular, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

  – a (con minúscula) puede indicar tanto un número real como un vector de $\mathbb{R}^n$.

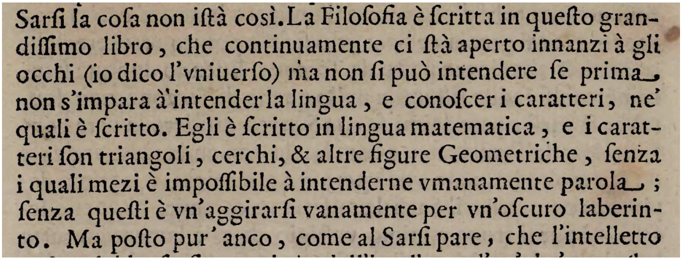
- Si $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ son puntos de $\mathbb{R}^n$, entonces $a \cdot b$ indica su *producto interno* o *escalar*,

$$a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

  – El *módulo* o *norma* de $a \in \mathbb{R}^n$ es $|a| = \sqrt{a \cdot a} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, y usamos la misma notación para el *módulo* o *valor absoluto* de un número real x: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Notas y comentarios

- El título completo del tratado de Galileo que mencionamos es *Il Saggiatore, nel quale con bilancia esquisita e giusta*



Sarſi la coſa non iſtà così. La Filoſofia è ſcritta in queſto grandiſſimo libro, che continuamente ci ſtà aperto innanzi à gli occhi (io dico l'vniuerſo) ma non ſi può intendere ſe prima non s'impara à intender la lingua, e conoſcer i caratteri, ne' quali è ſcritto. Egli è ſcritto in lingua matematica, e i caratteri ſon triangoli, cerchi, & altre figure Geometriche, ſenza i quali mezi è impoſſibile à intenderne vmanamente parola; ſenza queſti è vn'aggirarſi vanamente per vn'oſcuro laberinto. Ma poſto pur' anco, come al Sarſi pare, che l'intelletto

Figura 1: Párrafo de *Il Saggiatore* de Galileo.

si ponderano le cose contenute nella Libra astronomica e filosofica di Lotario Sarsi Sigensano.

En la figura 1 vemos un fragmento donde está la frase pertinente, extraída de `https://dl.wdl.org/4184/service/4184.pdf`, pág. 52 (pág. 25 en el original):

La versión moderna del texto en `https://it.wikisource.org/wiki/Il_Saggiatore/6` nos permite entenderlo mejor:

> *... La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche...*

- W. S. von Waltershausen, que era geólogo, en *Gauss zum Gedächtniss* (1856) atribuye a Gauss una variante de la frase mencionada al principio.
- La integración entre geometría y números se completa con la obra de Descartes (1596–1650).
- Es imposible comentar en pocas palabras la influencia de von Neumann en las matemáticas de posguerra y que llega

hasta ahora. Él fue uno de los inventores de la “arquitectura” de la computadora tal como la conocemos, y de la teoría de juegos y su relación con la programación lineal, e hizo contribuciones fundamentales al análisis funcional, las ecuaciones diferenciales y su cálculo numérico. También en física dejó su huella en hidrodinámica y mecánica cuántica.

- Entre las acepciones de la palabra intermedio, el diccionario de la RAE enuncia: *Baile, música, sainete, etc., que se ejecutaba en el intermedio de una comedia o de otra obra de teatro* ☺.

2. Resolución gráfica

2.1. Encontrar la superficie lateral y las de las "tapas" (inferior y superior) de un cilindro recto de radio r y altura h. ✄

2.2. Tengo un tacho de basura cilíndrico. El fondo tiene diámetro d, la altura es h, y no tiene tapa arriba. Me gustaría pintarlo por dentro de un color y por fuera de otro.

a) Si ignoro las rebarbas que unen la tapa con la superficie lateral y el ancho de las paredes, ¿qué superficie debo cubrir?

b) Sin embargo, las pinturas vienen por volumen (litros o cm^3). ¿Qué datos me faltan? ✄

La resolución de los dos problemas anteriores sólo requiere el conocimiento de algunas fórmulas y juntarlas. En cambio, el siguiente problema —que por ahora sólo enunciamos— es de mayor complejidad.

2.3 (Sólo enunciado). Quiero fabricar un recipiente cilíndrico con fondo pero sin tapa de volumen v, ¿cuáles deben ser sus dimensiones (diámetro y altura) para usar el mínimo de material (para la superficie)?

✍ Como en problemas similares, suponemos que no hay desperdicios en la junta de tapas con laterales, e ignoramos el espesor de las paredes. ✄

El nuevo problema es un *problema de optimización con restricciones* que podemos escribir en general como

> encontrar un óptimo de una *función objetivo* sujeto a *restricciones*.

2.4. En el problema 2.3, ¿cuáles son las restricciones?, ¿cuál es la función objetivo?, ¿hay que encontrar un máximo o un mínimo? ✄

En el plano (y bastante menos en el espacio) es posible encontrar soluciones aproximadas a problemas de optimización con métodos gráficos.

Antes de ilustar el método, repasemos una definición.

2.5. Si $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \to \mathbb{R}$ y $t \in \mathbb{R}$, la *curva de nivel t de f* es el conjunto

$$\{(x, y) \in A : f(x, y) = t\}.$$ ♣

✍ Las curvas de nivel aparecen al representar en los mapas las altitudes, temperaturas (isotermas), presiones (isobaras),...

✍ A pesar del nombre “curva”, es posible que el conjunto sea vacío o conste de curvas disconexas aún cuando $A = \mathbb{R}^2$ y f sea “suave”.

2.6. Encontrar el radio y altura de un cilindro de volumen v_0 y de superficie mínima incluidas sus dos tapas.

a) Dar fórmulas para el volumen, $v(r, h)$, y la superficie, $s(r, h)$, del cilindro de radio r y altura h.

b) Graficar con GeoGebra la curva de nivel $v(r, h) = v_0$, tomando r en el eje x, y h sobre el eje y.

- ➻ En la figura 2 es la curva en azul, con $v_0 = 5$.
- ➻ En GeoGebra se puede poner `CurvaImplícita(v(x, y) - v0)` en la barra de entrada.

c) Graficar varias curvas de nivel para distintos valores de las superficies.

- ➻ En la figura 2 son las curvas en verde, sobre las que hemos colocado un texto con el nivel correspondiente.
- ➻ En GeoGebra se puede usar `Secuencia(s(x, y) = smin + k dif, h, 0, ndiv)`, dando valores apropiados a `smin`, `dif` y `ndiv`.

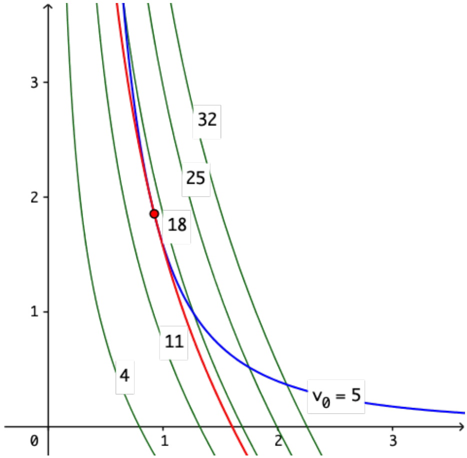


Figura 2: Volumen fijo, superficie mínima en el problema 2.6.

d) Como se puede apreciar en la figura 2, las superficies de los cilindros con sus tapas van aumentando de izquierda a derecha.

Podemos usar esa información observando, por ejemplo, que la curva correspondiente a las superficies que miden 4 no corta a la curva azul: no hay cilindros de superficie 4 y volumen 5. En cambio, la curva verde del nivel 18 corta a la curva azul en dos puntos, dividiendo a la curva en tres partes: la del medio hacia la izquierda correspondiente a cilindros de menor superficie y las dos partes separadas hacia la derecha correspondientes a cilindros con superficies superiores a 18 (pero siempre sobre la curva azul el volumen es $v_0 = 5$).

El óptimo se alcanzará en una curva de nivel de superficie que por un lado corte a la curva azul (para que haya una configuración de volumen v_0), y por otro lado que toda otra curva de menor nivel no toque a la curva azul. Acá dibujamos la curva buscada en rojo, y en este ejemplo es la única curva de nivel que corta en exactamente un punto a la azul, es decir, las curvas son tangentes.

e) Para encontrar gráficamente la curva de nivel marcada en rojo, se puede proponer una curva de nivel para la superficie y modificar el nivel hasta obtener una curva aceptable.

➝ En GeoGebra se puede crear un *deslizador* `niv` y considerar `CurvaImplícita(s(x, y) - niv)`.

De esta forma obtenemos el valor 16.2 para la superficie cuando $v_0 = 5$, mientras que el valor teórico es aproximadamente 16.1868…

f) Suponiendo que el valor de la superficie óptima es s_0, ¿cómo encontrar el radio y la altura del cilindro óptimo?

g) Calcular el cociente entre la altura y el radio para distintos valores de v_0 y ver que siempre es aproximadamente 2, esto es, la proporción entre la altura y el radio es independiente del volumen. ¿Tiene sentido?

✍ Se puede ver, por ejemplo usando las técnicas de la sección 4, que en el óptimo la altura coincide con el diámetro: las “latas óptimas” son “homotéticas”. ✄

Hay problemas que pueden considerarse como *duales*: el objetivo y restricciones de uno son las restricciones y objetivo del otro. Por ejemplo, un posible dual del problema 2.6 sería encontrar el cilindro de máximo volumen que tenga superficie dada, incluyendo ambas tapas.

2.7. En este problema repetimos los pasos del problema 2.6 para encontrar el cilindro de volumen máximo si tiene una superficie s_0 con sus tapas incluidas.

La idea es obtener una figura similar a la figura 3, en la que usamos $s_0 = 16$.

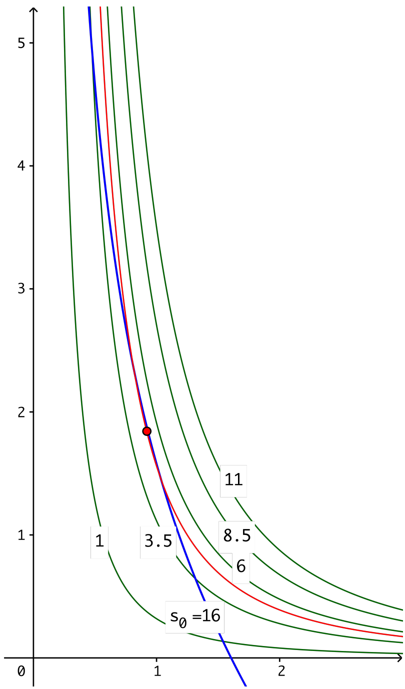


Figura 3: Superficie fija, volumen máximo en el problema 2.7.

a) Dibujar en GeoGebra la curva de nivel $s(r,h) = s_0$.

b) Graficar curvas de nivel de los volúmenes para distintos valores, y observar que éstos aumentan de izquierda a derecha.

En la figura 3 vemos que la curva correspondiente al volumen 3.5 corta a la curva azul en dos partes, lo que implica que hay cilindros de superficie 16 que tienen volumen mayor a 3.5 y otros que tienen volumen menor. Por otro lado, la curva correspondiente al volumen 6 no corta a la curva azul: no hay cilindros de superficie 16 con volumen 6.

c) Encontrar una curva de nivel con valor óptimo (en rojo en la figura 3) y los valores correspondientes de r y h.

d) Calcular el cociente entre la altura y el radio para distintos valores de s_0 y ver que siempre es aproximadamente el mismo, esto es, la proporción entre la altura y el radio es independiente de la superficie. ¿Es el valor del cociente el mismo que el encontrado en el problema 2.6.*g*)?, ¿tiene sentido? ✄

Notas y comentarios

- Es posible aproximar máximos o mínimos de una función de una variable mediante métodos numéricos iterativos como la *búsqueda dorada* o la variante de *búsqueda de Fibonacci*, que en cierta forma generalizan el método de la bisección para encontrar una raíz. Sin embargo, para funciones de más de una variable no hay generalizaciones eficientes, y debe apelarse a generalizaciones del *método de Newton* (buscando dónde se anula la derivada o gradiente).
- Es usual llamar *problemas de extremos ligados* a los problemas de optimización cuando aparecen restricciones.

  Para resolver estos problemas muchas veces se usa el método de *multiplicadores de Lagrange* que se basa en las ideas que usamos acá: dentro de una familia de curvas (o superficies) buscar una que sea tangente a otra dada. Para ello se apela a la noción de tangencia en cálculo diferencial: las curvas se tocan en un punto y sus gradientes son paralelos allí.

El método da lugar a procedimientos numéricos, en general basados en el método de Newton para encontrar soluciones a ecuaciones.

El caso de programación lineal es muy particular, porque los óptimos deben aparecer en los vértices de la región poliedral determinada por las restricciones, y hay muchas tangentes posibles en cada vértice del poliedro.

- A pesar de que los problemas 2.6 y 2.7 sugieren que para ahorrar en el costo del envoltorio los envases cilíndricos deberían tener siempre las misma proporciones (diámetro = altura), es claro que en la práctica esto no se hace: las proporciones de una lata de arvejas y una de atún son muy diferentes.

  Esto se debe a que el costo del envase es en general mucho menor que el contenido, y las marcas prefieren seguir cuestiones estéticas y de tradición ("branding" incluido).

- En el problema 2.6 pedimos que la superficie fuera exactamente v_0, con un planteo de la forma

  $$\min s(r,h) \text{ sujeto a } v(r,h) = v_0,$$

  pero también podríamos haberlo puesto en forma equivalente como

  $$\min s(r,h) \text{ sujeto a } v(r,h) \geq v_0,$$

  ya que con las mismas proporciones, el volumen más chico tendrá superficie menor.

  No siempre podemos hacer este cambio, pero si nos permitimos ampliar la cantidad de restricciones o variables, podemos llegar a formulaciones equivalentes (una con igualdades y la otra con desigualdades), como es usual hacer en programación lineal.

3. Mucha geometría y poca álgebra

En esta sección planteamos algunos problemas geométricos en los que en general bastará una solución no muy formal. Algunos son sencillos, pero es posible que para otros ayude mirar la situación con algún software de geometría dinámica como GeoGebra.

Como varios de los ejercicios que siguen se refieren a triángulos, para no repetir las notaciones fijamos las siguientes convenciones:

- los vértices del triángulo ABC son (¡ehem!) A, B y C,
- a es el lado opuesto a A, b a B, c a C,
- el ángulo (interno) en A es α, en B es β, en C es γ.

Como no podía ser de otro modo, empezamos con algo que no involucra triángulos, al menos explícitamente.

3.1. Si A y B son puntos del plano a un mismo lado de la recta ℓ, encontrar la curva de menor longitud con extremos en A y B que pasa por ℓ. *Ayuda*: si ℓ separara a los puntos, la curva buscada sería el segmento AB. ✂

3.2. Consideremos todos los triángulos ABC rectángulos que tienen la hipotenusa BC fija.

a) ¿Cuál es el lugar geométrico donde puede estar el vértice A?

b) ¿Cuál es el triángulo de mayor área?

✍ Pusimos "el" en el último apartado, pero podría pensarse que hay dos: uno "arriba" y otro "abajo", ambos con la misma área.
En varios de los problemas que siguen tendremos situaciones parecidas, y dejaremos al lector que considere por sí mismo la unicidad de soluciones.

✍ Comparar con el problema 4.24. ✂

3.3. Consideremos todos los triángulos ABC que tienen fijos tanto el lado BC como el perímetro.

a) ¿Cuál es el lugar geométrico donde puede estar el vértice A?

b) ¿Cuál es el triángulo de mayor área?

✍ Comparar con el problema 4.28. ✂

3.4 (VG, págs. 82 y 83). Consideremos todos los triángulos que tienen fijos el ángulo α y la base BC.

a) ¿Cuál es el lugar geométrico donde puede estar el vértice A?

b) ¿Cuál es el triángulo de mayor área?

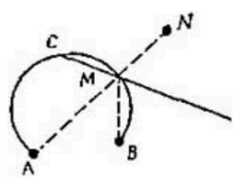
✍ Comparar con el problema 4.26.

c) Escoger el triángulo para el cual el radio de la circunferencia inscripta sea el mayor.

✍ Lo correcto es decir ”inscrita”, pero prefiero decir “septiembre” y no “setiembre”, y nunca diría “descrición” en vez de “descripción”: ¡estoy viejo! ✂

3.5 (VG, pág. 33). Consideremos dos puntos del plano A y B, y la familia $\mathscr{F}$ de todas las rectas que pasan por B. Encontrar el lugar geométrico de los puntos C que son simétricos de A respecto de alguna recta en $\mathscr{F}$. ✂

3.6 (VG, pág. 42). Consideremos dos puntos A y B en una circunferencia, y sea M un punto arbitrario de la circunferencia. Sea C la intersección de la mediatriz de AB con el arco $\widehat{AB}$ de la circunferencia que contiene a M.



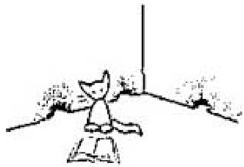
En la prolongación del segmento AM, desde el punto M se marca un segmento MN de longitud igual al segmento BM.

a) Ver que N es el simétrico de B respecto de la recta CM.

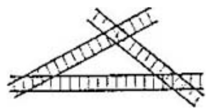
b) Hallar el lugar geométrico de los puntos N (recordar que hay dos arcos con extremos A y B en la circunferencia). ✂

3.7 (VG, pág. 85). Entre los triángulos con ángulo α y base BC fijos, elegir el de mayor perímetro.

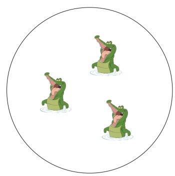
3.8 (VG, pág. 85). El ratoncito tiene tres salidas de su ratonera situados en los puntos A, B y C que el gato conoce. ¿Dónde tiene que sentarse el gato para encontrarse a la menor distancia posible de la salida más lejana?



3.9 (VG, pág. 87). En una parte del bosque, limitada por tres ferrocarriles rectos, vive un oso. ¿En qué punto del bosque debe hacerse el oso la guarida para encontrarse a la mayor distancia posible del ferrocarril más cercano?

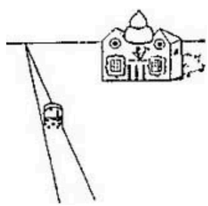


3.10 (VG, pág. 87). En un lago redondo viven tres cocodrilos. ¿Dónde deben situarse para que la mayor de las distancias desde cualquier punto del lago hasta el cocodrilo más cercano sea la menor posible?



¿Y con 4 cocodrilos?

3.11 (VG, pág. 93). Por una carretera recta marcha un autobús con excursionistas. A un lado de la carretera, en ángulo a ella, está situado un palacio. ¿En qué punto de la carretera tiene que pararse el autocar para que desde éste los excursionistas puedan contemplar lo mejor posible el palacio?



4. Más álgebra que geometría: medias elementales

Antes de ver técnicas más elaboradas, resolvamos problemas más sencillos con técnicas similares a las que veremos más adelante.

4.1. Supongamos que a, b y c son números reales con $a \neq 0$, y para $x \in \mathbb{R}$ definamos $f(x)$ mediante

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

a) $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4a}$.

✍ Por supuesto, es la clásica expresión de "completar cuadrados", a partir de la cual se deduce la fórmula para encontrar los ceros de una ecuación cuadrática.

b) $c - b^2/(4a)$ es el valor mínimo posible de f si $a > 0$ y el máximo si $a < 0$. En cualquier caso, este valor se alcanza cuando $x = -b/(2a)$. ✄

4.2. En dimensión 2, la trayectoria ideal de un proyectil que en el instante $t = 0$ parte desde $(0,0)$ se da por las relaciones

$$x(t) = ut, \quad y(t) = -gt^2 + vt,$$

donde t es el tiempo, u es la velocidad inicial en la dirección horizontal x, v la velocidad inicial en la dirección vertical y, y g es la magnitud de la aceleración de la gravedad (que en La Tierra es aproximadamente 9.8m/s^2).

a) Encontrar la posición (x, y) de altura máxima si $v_y > 0$, determinando el tiempo en que llega a esa posición.

b) Generalizar el apartado anterior a tres dimensiones (incluyendo las ecuaciones). ✄

4.3. Determinar el punto de la recta $y = 3x + 5$ que está más cerca del origen de dos formas:

a) Encontrando (analíticamente) la intersección de la recta y la perpendicular a ella que pasa por el origen.

b) Usando los resultados del problema 4.1.

c) Comprobar la solución obtenida con GeoGebra.

✍ Ver el problema 4.25. ✂

La siguiente es una definición casera y posiblemente no sea reconocida en otros ámbitos.

4.4. Consideremos n números reales $x_1, x_2, \dots, x_n$ y definamos

$$m = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

$p \in \mathbb{R}$ es una *media* o *promedio* de los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ si

$$m \le p \le M.$$ ♣

El siguiente ejercicio muestra algunos ejemplos elementales pero muy usados en las aplicaciones.

4.5 (Ejemplos de medias). Con las notaciones en la definición 4.4, demostrar los siguientes apartados.

a) m y M son medias.

b) Posiblemente la media más conocida sea la *media aritmética* o *promedio aritmético*, y a veces directamente *promedio*, definida por

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ver que efectivamente S es una media, es decir, satisface la definición dada en 4.4.

✍ En probabilidad y estadística a veces se la llama simplemente *media* (teórica o muestral), y suele denotarse con los símbolos μ o $\overline{x}$.

c) Si $p_1, p_2, \dots, p_n$ son números positivos tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, entonces

$$P = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

es una media.

✍ La media aritmética S es el caso particular cuando $p_i = 1/n$ para $i = 1, \dots, n$.

✍ Si p_i indica la probabilidad de que un suceso tome el valor x_i, P es llamado *esperanza* o *valor esperado*.

✍ Usando producto interno, podemos escribir $P = p \cdot x$ donde $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

d) La *mediana*, que acá indicamos con M_e, se obtiene de la siguiente manera:

– Se ordenan los datos de menor a mayor.

– Si n es impar se toma el valor que está en la posición $(n+1)/2$ de los datos ordenados.

– Si n es par, se toma el promedio (media aritmética) de los valores en la posiciones $n/2$ y $1 + n/2$ de los datos ordenados.

Ver que M_e es una media.

e) Si los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son todos positivos, entonces

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}}$$

es una media, llamada *media armónica*.

✍ H es el inverso multiplicativo de la media aritmética de los inversos multiplicativos de $x_1, x_2, \dots, x_n$.

f) $R = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ se denomina *media cuadrática*. No es una media en el sentido de la definición 4.4, puesto que los valores x_i pueden ser negativos, pero verifica

$$\min\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\} \le R \le \max\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\}.$$

✍ Su nombre en inglés es (*Root Mean Square*, por lo que a veces es abreviada como RMS.

✍ R está relacionada con el método de mínimos cuadrados para obtener una descripción sencilla de algún fenómeno. Se toma la raíz cuadrada para que el resultado tenga las mismas dimensiones de los datos originales.

✍ La *desviación estándar* o *típica* de probabilidad y estadística es una variante, definida como

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2},$$

donde μ es la esperanza de los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$.

g) Si los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son todos no negativos, entonces

$$G = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n}$$

es una media, llamada *media geométrica*.

✍ Para $n = 2$, G da el lado de un cuadrado de área igual a la de un rectángulo de lados x_1 y x_2, y de modo similar, el lado de un cubo de volumen igual al de un prisma rectangular cuando $n = 3$.

✍ G puede pensarse como la exponencial de un promedio de logaritmos, esto es,

$$G = a^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log_a x_i},$$

donde a es una constante positiva y distinta de 1.

En general, se usa $a > 1$, como $a = 2$ o $a = 10$. ✄

En lo que resta de la sección usamos las notaciones introducidas en 4.4 y 4.5.

4.6. Las siguientes son propiedades sencillas de las medias.

a) $m = M$ si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

b) (Pero Grullo) Si p es una media y $m = M$, entonces $p = m$ (en particular esto sucede cuando $n = 1$ ☺).
¿Puede ser p media, $p = m$ y $m \neq M$?

c) Ver que si alguno de S, P o M_e es igual a m entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = m$. Lo mismo es cierto para H, R o G cuando todos los valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ son positivos.

✍ Por supuesto, lo mismo vale si alguna de esas medias es igual a M.

✍ Recordar que en la definición de P en 4.5.*c*) hemos pedido $p_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. ✄

4.7. En un año la inflación fue del 20% y en el siguiente de 30%.

a) ¿Cuál fue la inflación acumulada durante los dos años?

b) ¿Cual fue la inflación *promedio* durante esos dos años?
Aclaración: Se pide encontrar r tal que si la inflación en cada año es la constante r, la inflación acumulada es la obtenida en *b*).

c) ¿Cuál es la relación con la media geométrica? ✄

4.8. Fui de mi casa al trabajo a una velocidad de 60 km/h y volví a una velocidad de 40 km/h. ¿Cuál fue la velocidad promedio en todo el trayecto (entre ida y vuelta)?
¿Qué relación hay con la media armónica? ✄

Dedicamos el resto de la sección para estudiar relaciones entre algunas de las medias que vimos, empezando por el caso más sencillo donde $n = 2$.

4.9. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces:

a) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = ab.$

b) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2}.$

c) $(c-a)(b-c)+ab = c(a+b-c).$ ✂

4.10. Demostrar las siguientes propiedades cuando $n = 2$ usando el problema 4.9.

a) $|S| \le R$ con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$.

En los siguientes apartados suponemos que x_1 y x_2 son positivos.

b) $G \le S$ con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$.

c) $H = \dfrac{G^2}{S} = G \times \dfrac{G}{S}.$

d) $H \le G$ con igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$.

Resumiendo, cuando $n = 2$ y x_1 y x_2 son positivos,

$$H \le G \le S \le R,$$

donde vale una igualdad si y sólo si $x_1 = x_2$, y en este caso H, G, S y R coinciden. ✂

El próximo problema da una interpretación geométrica de las relaciones que vimos en el problema 4.10, y nos permite imaginar cómo los babilonios pudieron tener conocimiento de desigualdades como la 4.10.*b*).

4.11. Sea ABC un triángulo rectángulo en C, P el pie de la altura por C, y pongamos $a = AP$, $b = BP$, $c = CP$, $d = a+b$ (ver figura 4.*a*)).

Tomando $x_1 = a$ y $x_2 = b$, queremos relacionar los valores de S, G, H y R correspondientes.

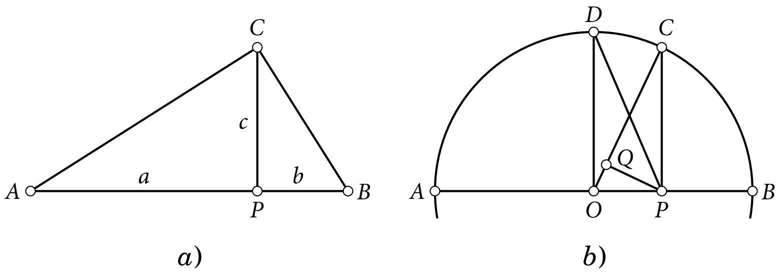


Figura 4: Gráficos para el ejercicio 4.11.

a) Ver que los triángulos ACB, APC y CPB son semejantes (tomando vértices correspondientes en el orden indicado).
En consecuencia, $c/a = b/c$, es decir, $c = \sqrt{ab} = G$.

Llamemos O al centro de la circunferencia circunscripta y $r = d/2$. Guiándonos por la figura 4.*b*), donde suponemos $a > b$, y recordando las convenciones sobre el la notación AB, consideremos:

- D en la circunferencia tal que $OD \perp AB$,
- Q en OC tal que $PQ \perp OC$.

Es claro que $OD = r$ es la media aritmética $S = (a+b)/2 = r$, y ya hemos visto que $PC = c$ es la media geométrica $G = \sqrt{ab}$.

Ver que:

b) $OP = \left|\dfrac{a-b}{2}\right|$.

✍ Esto da otra forma de ver que $c = \sqrt{ab}$, usando Pitágoras y 4.10.*c*).

c) QC es la media armónica $H = \dfrac{2ab}{a+b}$. *Posibilidad*: los triángulos PQC y OPC son semejantes y usar 4.10.*c*).

d) PD es la media cuadrática $R = \sqrt{(a^2+b^2)/2}$. *Posibilidad*: Pitágoras y 4.9.*b*).

Usando que en triángulos rectángulos la hipotenusa es mayor que cualquier cateto, ver la validez de las desigualdades $H \le G \le S \le R$ (ya estudiadas en 4.10).

Nos abocamos ahora a ver que cuando los valores de $x_1, x_2, \dots, x_n$ son todos positivos, las relaciones $H \le G \le S \le R$ (con igualdad únicamente cuando $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$) son válidas para cualquier n (entero positivo).

El próximo resultado es de gran importancia en muchas ramas de matemáticas, habiéndose generalizado a espacios de infintas dimensiones (espacios de Hilbert, espacios L^p,...). Su origen es más humilde, ya que en un espacio euclidiano relaciona algebraicamente los vectores no nulos x y y con el ángulo θ que forman:

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{|x|\,|y|} \qquad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

El "ángulo" es un objeto de dimensión 2, y la igualdad anterior es equivalente al teorema del coseno. En cualquier dimensión, los vectores x, y son perpendiculares (u ortogonales) si y sólo si $x \cdot y = 0$.

4.12 Desigualdad de Cauchy-Schwarz. *Si x, y son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$|x \cdot y| \le |x|\,|y|,$$

con igualdad si y sólo si x es múltiplo de y o y es múltiplo de x.

La siguiente es una de las demostraciones más populares entre las muchas que hay del teorema 4.12.

4.13 (Demostración de 4.12).

a) Si $t \in \mathbb{R}$ y $x = ty$, entonces $|x \cdot y| = |x|\,|y|$.

b) Si $y \neq \mathbf{0}$, $t = (x \cdot y)/|y|^2$ está bien definido y

$$|x - ty|^2 = \frac{|x|^2\,|y|^2 - (x \cdot y)^2}{|y|^2}.$$

c) Demostrar la validez del enunciado en 4.12. ✂

4.14. Demostrar que $|S| \leq R$, esto es,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Más aún, vale la igualdad si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Posibilidad: ¿cuál podría ser un valor de y para usar 4.12? ✂

4.15. Teniendo en cuenta el ejercicio anterior, ¿se puede dar que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i| = R,$$

pero que no todos los x_i $(i = 1, \dots, n)$ sean iguales? ✂

4.16. Demostrar que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ son positivos, entonces:

a) $H \leq S$, esto es,

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Posibilidad: $n = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ y $1 = x_1 (1/x_1) = \cdots = x_n (1/x_n)$.

b) $H = S$ si y sólo si $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

✍ En 4.19 veremos que, más aún, $H \leq G \leq S$. ✂

4.12 y la siguiente propiedad son los resultados teóricos más importantes de esta sección.

4.17 Desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. *Con las notaciones del problema 4.5,*

$$G \leq S \quad \text{con igualdad si y sólo si } x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Hay muchas demostraciones de la propiedad 4.17. En el próximo ejercicio presentamos una elemental tomada de Niven (1981), y al final de esta sección una versión usando logaritmos.

4.18 (Demostración de 4.17). Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ números positivos con $n \geq 2$, m y M definidos como en 4.4, S y G como definidos en 4.5.

Sean j y k tales que $x_j = m$ y $x_k = M$, y definamos $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ mediante

$$x'_i = \begin{cases} S & \text{si } i = j, \\ (m + M - S) & \text{si } i = k, \\ x_i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Finalmente pongamos

$$m' = \text{mín}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad M' = \text{máx}\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$
$$S' = \frac{1}{n} \sum_i x'_i, \quad G' = \sqrt[n]{x'_1 \times x'_2 \times \cdots \times x'_n}.$$

Entonces:

a) $S = S'$.

b) Si $m \neq M$ entonces $m = x_j$ y $M = x_k$ son distintos de S. *Sugerencia*: recordar 4.6.*c*).

c) Si $m \neq M$ entonces $m \leq m'$, $M' \leq M$ y $G < G'$. *Sugerencia*: recordar 4.9.*c*).

d) $G = G'$ si y sólo si $m = M$ (y en ese caso $G = S$).

e) Denotando el cardinal del conjunto finito A por $\#A$, ver que

$$\#\{i : 1 \leq i \leq n, x_i = S\} \leq \#\left\{i : 1 \leq i \leq n, x'_i = S\right\},$$

con igualdad si y sólo si $m = M$.

f) Si $m' \neq M'$, construimos $x''_1, x''_2, \dots, x''_n$, m'', M'', G'' y S'' a partir de $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ repitiendo la construcción anterior, y así sucesivamente. En cada paso hay al menos un valor que cambia a S, y a lo sumo en n pasos, llegamos a un juego de números, digamos $y_1, y_2, \dots, y_n$, tales que

$$G < G' \leq G'' \leq \cdots \leq \sqrt[n]{y_1 \times y_2 \times \cdots \times y_n} = \frac{1}{n} \sum_i y_i = S.$$

g) Si $n = 2$ y $m < M$, ¿cuántos pasos del procedimiento se realizan como máximo? ¿Y si $n > 2$?

Para cada n dar un ejemplo de números $x_1, x_2, \dots, x_n$ para los cuales haya que realizar la máxima cantidad de pasos posibles para llegar a que todos los valores numéricos coincidan.

4.19. Si los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son positivos,

$$H \le G \le S \le R,$$

donde si alguna vale con igualdad, entonces las otras también y $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

4.20. Suponiendo que los números $x_1, x_2, \dots, x_n$ son positivos, y recordando que indicamos la mediana por M_e (en 4.5.*d*), decidir si se pueden dar los siguientes casos, dando demostraciones o contrajemplos adecuadamente.

a) $M_e < H$.

b) $G < M_e < S$.

c) $M_e > R$.

Dedicaremos el resto de la sección a ver aplicaciones de la relación entre las desigualdades. Arrancamos con un ejemplo ilustrando la técnica.

Supongamos que queremos encontrar el punto (x, y) del primer cuadrante del plano que está en la hipérbola $xy = 1$ y tiene distancia mínima al origen $(0, 0)$.

Lo que queremos es encontrar

$$\min \sqrt{x^2 + y^2}$$

sujeto a las restricciones $xy = 1$, $x, y > 0$.

¿Cómo puede llevarse el problema a algo de la forma $G \le S$?

Tenemos una suma, $x^2 + y^2$ y un producto xy. La suma deberá relacionarse con la media aritmética y el producto con la media geométrica. Teniendo en cuenta que encontrar el mínimo de $\sqrt{x^2 + y^2}$ es equivalente a encontrar el mínimo de $x^2 + y^2$, y también que —como pedimos x y y posivos— la media geométrica se los cuadrados es $\sqrt{x^2 y^2} = xy$, vemos que en cualquier caso tenemos

$$xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

El miembro de la izquierda está fijo, $xy = 1$, y sabemos que habrá igualdad si y sólo si $x = y$. Por lo tanto el mínimo buscado es $\sqrt{2}$ y se encuentra cuando $x = y = 1$.

4.21. Ilustrar la situación anterior con GeoGebra o software similar, dibujando la hipérbola (bastará la rama en el primer cuadrante), y una circunferencia de radio variable y centro en $(0,0)$. Comprobar que efectivamente la circunferencia de menor radio que toca a la hipérbola tiene el radio igual a $\sqrt{2}$. ✂

4.22. Resolver el problema anterior en tres dimensiones, esto es, encontrar un punto (x, y, z) del primer octante que esté en la superficie $xyz = 1$ y tenga menor distancia al origen $(0,0,0)$. ✂

4.23. Encontrar las dimensiones a y b de los lados de un rectángulo de perímetro dado p, de modo que el área del rectángulo sea lo mayor posible. *Sugerencia*: tomar una suma fija y maximizar un producto.

¿Existe una solución para el problema de encontrar el área mínima si el perímetro está fijo? ✂

Resumiendo, una técnica posible —de ninguna manera absoluta— para aplicar la propiedad 4.17 en la resolución de un problema de optimización con restricciones:

- *Tratar de encontrar n variables de modo que en el problema aparezcan su producto y su suma.*

- *Si hay que minimizar tendría que quedar fijo el producto, y si hay que maximizar debería quedar fija la suma.*
- *Si todas las variables pueden tomar el mismo valor, ese será el óptimo.*

Por supuesto, a veces conviene aplicar otra desigualdad (en vez de $G \leq S$) y hay que adaptar la técnica.

Resolver los siguientes problemas usando las propiedades algebraicas que vimos en esta sección.

4.24. Recordando el problema 3.2, consideremos todos los triángulos rectángulos de hipotenusa dada.

a) ¿Cuál es el de mayor área?
Idea: si la hipotenusa es c, el área es ab.

b) ¿Y el de mayor perímetro?
Ayuda: ¿usar 4.14 en vez de 4.17?

c) ¿Y el de menor perímetro?
Ayuda: recordar 4.9.b).

4.25. Supongamos que una recta ℓ tiene ecuación $ax + by = c$, con $|a| + |b| > 0$.

a) Ver que el punto de ℓ más cercano al origen es $(x, y) = t(a, b)$, donde $t = c/\sqrt{a^2 + b^2}$.

b) ¿Qué relación hay entre el apartado anterior y el apartado a) del problema 4.3?

✍ (a, b) es el *gradiente* de la función $f(x, y) = ax + by$. La tangente a la curva (o superficie en más dimensiones) es la recta (o hiperplano) perpendicular al gradiente.

Las rectas $ax + by = c$, con c variando, son las curvas de nivel de la función f.

c) En general, ¿cuál será el punto de ℓ más cercano a un punto (u, v)?

4.26. Resolver el problema 3.4.b). *Posibilidad*: usar el teorema del coseno.

4.27. Supongamos que los lados de un triángulo son a, b, c, e indiquemos por s su semiperímetro,

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

a) ¿Es cierto que $\max\{a, b, c\} < s$?, ¿por qué?

b) Demostrar la fórmula de Herón para el área en términos de los lados:

$$A(a, b, c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

c) Encontrar las dimensiones de un triángulo de área máxima entre todos los que tienen un perímetro dado.

4.28. Rehacer el problema 3.3.b) con las ideas de esta sección.

4.29. Resolver (analíticamente) el problema 2.3.

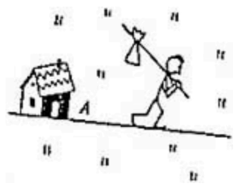
Sugerencia: encontrar una suma a minimizar y un producto que permanezca constante, y elegir dos o tres variables para ponerlos como medias.

✍ *Sugerencia si la anterior no alcanza*: si el cilindro tiene radio r y altura h, tomar $x = r^2$, $y = z = rh$, $xyz = r^4 h^2$.

Respuesta: $r = h = \sqrt[3]{v/\pi}$.

Una forma de resolver el problema usando derivadas es despejar una variable en términos de la otra y encontrar los puntos donde se anula la derivada de la nueva funcón. Si se conoce esta técnica, usarla para comprobar la respuesta obtenida anteriormente.

4.30 (VG, pág. 83). Por el pueblo A, rodeado de praderas, pasa un camino recto. Una persona puede ir por el camino a una velocidad de 5 km/h, y por la pradera, a una velocidad de 2 km/h (en cualquier dirección).



¿Qué ruta tendrá que elegir la persona para llegar cuanto antes del pueblo A a la casita B, que está a 13 km de éste y a 5 km del camino?

Notas y comentarios

- Una demostración sencilla, aunque no elemental, de la desigualdad $G \le S$ en 4.17, es escribir G en términos de logaritmos como vimos al dar su definición.

  Recordemos que si $a > 0$ y $a \neq 1$, el logaritmo tiene como función inversa a la exponencial,

  $$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y.$$

  Si además $a > 1$, el logaritmo y la exponencial son estrictamente crecientes. Más aún, el logaritmo es una función cóncava, o sea,

  $$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log_a x_i \le \log_a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

  (suponiendo $x_i > 0$ para $i = 1, \dots, n$), y usando que la exponencial es creciente resulta

  $$G = a^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_a x_i} \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = S,$$

  demostrando la desigualdad en 4.17 (la parte de la igualdad es sencilla pues el logaritmo es *estrictamente* cóncavo y la exponencial *estrictamente* creciente).

Para ver que el logaritmo es estrictamente creciente y estrictamente cóncavo es necesario meterse en las definiciones del logaritmo o la exponencial, lo que requiere conocimientos más profundos de los que queremos usar en este apunte.

Referencias

M. A. Atiyah, 1993. Mathematics: Queen and Servant of the Sciences. *Proceedings of the American Philosophical Society*, 137(4):527–531. (*pág. 2*)

E. T. Bell, 1951. *Mathematics: Queen and Servant of Science*. McGraw-Hill. (*pág. 1*)

E. Gentile, 1991. *Aritmética elemental en la formación matemática*. Red Olímpica. (*pág. 5*)

I. Niven, 1981. *Maxima and Minima Without Calculus*. Mathematical Association of America. (*págs. 4 y 28*)

L. A. Santaló, 1986. *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Editorial Docencia, Buenos Aires. (*pág. 3*)

L. A. Santaló, 1993. *La geometría en la formación de profesores*. Red Olímpica, Buenos Aires. (*pág. 3*)

N. B. Vasíliev y V. L. Gutenmájer, 1980. *Rectas y curvas*. MIR, Moscú. (*págs. 4, 18, 19 y 34*)