Torneos y Competencias... Matemáticas

1. Introducción

Sobre gustos no hay nada escrito, y aunque es posible que haya gustos que merezcan palos, voy a comentar en estas notas sobre un problema que me ha gustado particularmente.

Se trata del sexto problema del tercer nivel del último Certamen Nacional de la OMA (el XIII, en Tucumán), donde nos vemos involucrados en un apasionante torneo de tenis. Es posible que todos ya conozcan el enunciado (y aún la solución), pero por completitud vamos a copiarlo:

✍ **Problema 1.** *En un torneo de tenis de* 10 *jugadores, todos jugaron contra todos una vez. En este torneo, si el jugador* i *ganó el partido contra el jugador* j*, entonces la cantidad de partidos que perdió* i *más la cantidad de partidos que ganó* j *es mayor o igual que* 8*. Diremos que tres jugadores* i, j, k *forman un trío* atípico *si* i *le ganó a* j, j *le ganó a* k, *y* k *le ganó a* i.

Demostrar que en el torneo hubo exactamente 40 *tríos* atípicos.

El lector observará que en estas notas los problemas están señalados con ✍, una forma "sutil" de decir: *¡sentarse con lápiz y papel y pensar el problema antes de seguir!*

En particular, si el lector no ha pensado aún el problema planteado, es conveniente que lo haga ahora antes de continuar. Lo que sigue será entonces mucho más provechoso.

Retomando el hilo principal, ¿qué es lo que me llamó la atención sobre este problema?. Varias cosas: lo curioso de la condición sobre los partidos ganados y perdidos, los "tríos atípicos", el número "exacto" 40, que nos digan que puede haber un torneo así, y otras preguntas que van surgiendo a medida que pensamos el problema.

Vamos a ordenarnos, y aclaremos algunos "tantos" del torneo y de estas notas:

✓ Cualquier número que aparezca en estas notas será entero no-negativo, salvo que *claramente* no lo sea.

- ✓ En lo que sigue, siempre (o casi) nos referiremos a un torneo de n jugadores, donde cada jugador juega exactamente una vez con cada uno de los restantes jugadores. Para que tenga sentido y haya al menos un partido, pedimos $n \geq 2$.
- ✓ Los jugadores se indicarán con letras como i, j, k. Podemos pensar, aunque no es necesario, que los jugadores tienen los nombres $1, \ldots, n$.
- ✓ La cantidad de partidos que el jugador i ha ganado al finalizar el torneo, o sea los puntos obtenidos por i, se indicará con g_i.
- ✓ $i \to j$ es una manera alternativa de expresar que el jugador i le ganó al jugador j.
- ✓ Tres jugadores i, j y k forman un *trío atípico* si $i \to j$, $j \to k$ y $k \to i$.

Observemos que si en un torneo hay n jugadores, cada jugador participa en $n - 1$ partidos, y entonces el número de partidos perdidos por el jugador i es $(n - 1) - g_i$, por lo que la condición sobre partidos ganados y perdidos puede ser enunciada (no demasiado formalmente) como:

Condición ❦: Un torneo *satisface la condición ❦* si $i \to j$ implica $g_j \geq g_i - 1$.

Desconozco el nombre del símbolo ❦, y como hay que llamarlo de alguna manera, propongo llamar a la condición, "condición del amor imposible", por el corazón (¿o será una frutilla?) que aparece y lo difícil que es dibujarlo. El nombre es un poco largo, así que algunos la abreviaran a "condición del amor", y otros a "condición imposible". Dejemos a los psicólogos las interpretaciones de éstas y otras posibilidades que aparezcan, y volvamos a lo nuestro.

El propósito de estas notas es estudiar las dos preguntas siguientes:

✍ **Problema 2.** *¿Cuáles son los valores de n para los que existe un torneo que satisface la condición ❦?*

✍ **Problema 3.** *Encontrar el número de "tríos atípicos" en un torneo de n jugadores que satisface la condición ❦.*

El plan es el siguiente: comenzamos por estudiar algunas propiedades de un torneo que satisface la condición ❦, luego estudiamos la existencia de torneos que satisfacen la condición ❦ primero para n impar y después para n par, seguimos con un estudio más detallado para n impar, para concluir con el estudio de los tríos "atípicos". Al final del artículo resumimos los principales resultados obtenidos, pero no los indicamos acá para mantener el suspenso[1].

Antes de seguir, y será la última vez que insista sobre el tema, pido al lector que cada vez que aparezca un problema presentado con ✍, se detenga a pensarlo antes de continuar, la lectura será entonces mucho más provechosa.

Ahora *¡a arremangarse!*[2]

2. Análisis de la condición ❦

En esta sección nos familiarizaremos con la condición ❦, y obtendremos propiedades que son interesantes y nos serán útiles en el resto de las notas.

[1] *Para los ansiosos*: efectivamente, el asesino es el mayordomo.
[2] Rápido: ¿cuál es el torneo?, ¿cuál es la competencia?

Si hay n jugadores en el torneo, se jugaron

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

partidos, que es la suma de los puntos obtenidos por todos los jugadores, puesto que en cada partido hay exactamente un ganador. Entonces el promedio de puntos obtenido por cada jugador es

$$p = \text{promedio} = \frac{\#(\textit{partidos})}{\#(\textit{jugadores})} = \frac{n-1}{2}$$

(*claramente*, p puede no ser entero).

Veamos qué posibilidades tenemos para los puntajes obtenidos por los jugadores en un torneo que satisface la condición ❦. Supongamos que M es el máximo puntaje obtenido y m el mínimo. Si $M = m$, todos los jugadores obtuvieron el mismo puntaje, $M = m = p$. Supongamos entonces que $M > m$, y consideremos un jugador, x, con M puntos y otro, y, con m puntos. Pueden suceder varias cosas (recordemos que estamos suponiendo $M > m$):

a) $x \to y$. Entonces $g_y = m \geq g_x - 1 = M - 1$. Como $M > m$ entonces $M = m + 1$ y sólo hay dos puntajes posibles, m y $m + 1 = M$.

b) Supongamos que $x \not\to y$. Entonces $y \to x$ (y $n > 2$). De modo que entre los jugadores que perdieron con x (que son M) debe haber alguno que le ganó a y, pues si no, y tendría más puntos que x, habiendo ganado (al menos) a los mismos contrincantes que x y también a x. Por lo tanto habrá un tercer jugador, z, tal que $x \to z$ y $z \to y$. Por la condición ❦,

$$g_y = m \geq g_z - 1 \geq (g_x - 1) - 1 = M - 2$$

por lo que

$$M \leq m + 2$$

y hay entonces a lo sumo 3 puntajes posibles (m, $m+1$ y $m+2$).

Nota: Observar que podría suceder $M = m + 1$, y entonces no habría jugador con $m + 2$ puntos. ✄

Por lo que hemos demostrado el siguiente resultado:

✌ **Resultado 1.** *En cualquier torneo que satisface la condición ❦, no hay más de 3 valores posibles para los puntajes. Más aún, estos valores deben ser consecutivos, digamos $a = b - 1$, b y $c = b + 1$.*

Nos será conveniente introducir la siguiente notación:

✓ Dados a, b, y c, con $a = b - 1$ y $c = b + 1$, pondremos

$$\mathcal{A} = \{i : g_i = a\}, \qquad \mathcal{B} = \{i : g_i = b\}, \qquad \mathcal{C} = \{i : g_i = c\} \tag{1}$$

donde por el momento no nos importa que alguno (o varios[3]) de estos conjuntos sea vacío.

[3] Por ejemplo si todos los jugadores tienen el mismo puntaje.

Como el lector puede verificar, la condición ❦ implica que

✌ **Resultado 2.** *En un torneo que satisface la condición ❦, cada vez que un jugador de $\mathcal{A}$ jugó con uno de $\mathcal{C}$, ganó el de $\mathcal{A}$. Es decir no hay "flechas" desde $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$.*

Podemos pensar al revés:

✌ **Resultado 3.** *Si en un torneo de n jugadores podemos encontrar tres números consecutivos $a = b - 1$, b y $c = b + 1$ de modo que*

i) *todo jugador esté en alguno de los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ o $\mathcal{C}$, dados por las ecuaciones (1) (podría haber alguno/s vacío/s), y*

ii) *cualquier jugador de $\mathcal{A}$ le ganó a cualquier jugador de $\mathcal{C}$ (como en el Resultado 2),*

entonces el torneo satisface la condición ❦.

Queda para el lector la demostración de este resultado:

✍ **Problema 4.** *Demostrar el Resultado 3.*

En lo que sigue, en vez de verificar la condición ❦, usaremos el Resultado 3, que es más práctico y caracteriza a los torneos que satisfacen la condición ❦.

Dados a, b y c como antes, y los correspondientes conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, si ponemos

$$h_a = \#(\mathcal{A}), \qquad h_b = \#(\mathcal{B}), \qquad h_c = \#(\mathcal{C})$$

la totalidad de puntos (o partidos) en el torneo es

$$ah_a + bh_b + ch_c = \frac{n(n-1)}{2} = pn \tag{2}$$

Como hay n jugadores, debe ser

$$h_a + h_b + h_c = n$$

y dado que $a < b < c$,

$$an = a(h_a + h_b + h_c) < ah_a + bh_b + ch_c = pn < c(h_a + h_b + h_c) = cn$$

de donde se deduce que

$$a = b - 1 < p < b + 1 = c \tag{3}$$

Puesto que a, b y c son enteros, pero p puede no serlo, tenemos las siguientes posibilidades:

a) $p \in \mathbb{N}$ y entonces n es impar. Por la ecuación (3), debe ser $b = p$.

b) $p \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, y entonces n es par. Por la ecuación (3) hay, a su vez, dos posibilidades:

   i) $a = b - 1 < p < b$,
   ii) $b < p < b + 1 = c$.

Nuestro próximo objetivo es estudiar la condición ❦ en cada uno de estos casos.

3. La condición ❦ cuando n es impar. Parte I

Ya hemos estudiado un poco la condición ❦. Es hora de tratar de ir dando respuesta a las preguntas sobre existencia de torneos que la satisfacen (Problema 2).

Empecemos considerando el caso de un torneo que satisface la condición ❦ con n jugadores, n impar. En este caso podemos escribir $n = 2m + 1$ y entonces el promedio es $p = (n - 1)/2 = m$. Según la notación que hemos introducido en la sección anterior, en este caso necesariamente $a = m - 1$, $b = m = p$ y $c = m + 1$.

Recordando la ecuación (2) obtenemos

$$pn = ah_a + bh_b + ch_c = p(h_a + h_b + h_c) + (-h_a + h_c) = pn + (-h_a + h_c)$$

por lo que $h_a = h_c$.

Poniendo

$$\alpha = h_a = h_c \tag{4}$$

$$\beta = h_b = n - 2\alpha = 2(m - \alpha) + 1 \tag{4'}$$

podemos escribir el siguiente resultado:

✌ **Resultado 4.** *Si un torneo satisface la condición ❦ y $n = 2m + 1$ es impar, entonces existen tres conjuntos, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de cardinales α, β y α respectivamente (podría ser que α fuera 0), tales que todo jugador está en alguno de los conjuntos, y los jugadores de $\mathcal{A}$ tienen $m - 1$ puntos, los de $\mathcal{B}$ tienen m puntos y los de $\mathcal{C}$ tienen $m + 1$ puntos.*

Naturalmente ahora nos preguntamos:

✍ **Problema 5.** *¿Para qué valores de n, α y β se puede encontrar un torneo que satisfaga la condición ❦?*

O más sencillamente,

✍ **Problema 6.** *Dado n impar, ¿existe un torneo que satisface la condición ❦?*

Empecemos por éste último, que parece más fácil y que por otra parte es un caso particular del problema de existencia de torneos con la condición ❦ (Problema 2) que nos preocupa.

Nuestro objetivo es: *dado n impar, $n \geq 2$, asignar "flechas" entre los (pares de) n jugadores, determinando partidos ganados y perdidos, de manera tal que el torneo que hemos armado satisfaga la condición ❦.*

Claro que en este caso tenemos libertad de elegir α. Empecemos eligiendo $\alpha = 0$, es decir, todos los jugadores deberán tener el mismo puntaje.

Para "armar" el torneo, ordenemos los $n = 2m + 1$ jugadores en una ronda, y hagamos que cada jugador gane a los m que tiene a la izquierda, y consecuentemente, pierda con los m que tiene a la derecha.

✍ **Problema 7.** *Hacer una ronda como la sugerida para $n = 5$.*

✍ **Problema 8.** *Ver que efectivamente la propuesta es una solución para el caso n impar, $\alpha = 0$, es decir, ver que el torneo resultante satisface la condición ❦. (Sugerencia: usar el Resultado 3).*

Para referencia futura, apuntamos el resultado:

☃ **Resultado 5.** *Si n es impar, podemos "armar" un torneo de modo que todos los jugadores obtengan el mismo puntaje, $(n-1)/2$.*

En particular, siempre podemos armar un torneo que satisfaga la condición ❦ cuando n es impar.

Nos animamos y probamos otros valores de α, por ejemplo $\alpha = 1$. En este caso $\beta = 2m - 1$, y los conjuntos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{C}$ deberán tener un solo jugador (cada uno). Elijamos entonces dos jugadores, x y y, y pongamos desde ya $\mathcal{A} = \{x\}$, $\mathcal{C} = \{y\}$, y los restantes β jugadores en el conjunto $\mathcal{B}$.

El jugador y debe tener $m + 1$ puntos. Como no debe ganarle a x (por el Resultado 3), no hay otra posibilidad que dividir el conjunto $\mathcal{B}$ en dos partes, digamos $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, con $m + 1$ y $m - 2$ jugadores respectivamente, y hacer que y gane a los jugadores de $\mathcal{B}_1$ y pierda con los jugadores de $\mathcal{B}_2$. De este modo y obtiene $m + 1$ puntos.

Por su parte, hagamos que x gane a y (como debe) y a los $m - 2$ jugadores de $\mathcal{B}_2$, y pierda con los jugadores de $\mathcal{B}_1$. Entonces x tiene efectivamente $m - 1$ puntos.

Ahora tenemos que arreglar los partidos de los jugadores de $\mathcal{B}$ entre sí. Usando el Resultado 5 (con β como n), podemos hacer que cada jugador de $\mathcal{B}$ gane exactamente $(\beta - 1)/2 = m - 1$ partidos contra los otros jugadores de $\mathcal{B}$. El punto que nos falta se consigue porque el jugador en $\mathcal{B}$ le ganó a x si está en B_1 o a y si está en $\mathcal{B}_2$.

✍ **Problema 9.** *En la propuesta presentada para $\alpha = 1$ se necesita $m \geq 2$. ¿En qué partes se usó este hecho?, ¿cómo son los torneos con $m = 0$ o $m = 1$ (y $n = 2m + 1$)?*

✍ **Problema 10.** *Ver que efectivamente la propuesta es una solución para el caso n impar, $\alpha = 1$.*

Antes de seguir incrementando los valores de α, miremos el otro extremo. Por las ecuaciones (4) y (4′), sabemos que si un torneo de n jugadores satisface la condición ❦ debe ser $\beta \geq 1$ y $0 \leq \alpha \leq m$. Pero en general, no puede ser $\alpha = m$, o equivalentemente $\beta = 1$, ya que según el Resultado 2, cada jugador en $\mathcal{A}$ (que tiene $m-1$ puntos) le gana (al menos) a los α jugadores en $\mathcal{C}$ y entonces $m - 1 \geq \alpha$.

✍ **Problema 11.** *En el reciente razonamiento se usó que $n \geq 3$, ¿por qué?*

Más adelante veremos que en realidad α debe ser bastante más chico que m, pero antes miremos un poco al caso n par.

4. La condición ❦ cuando n es par

Abordamos ahora el problema de existencia de torneos que satisfacen la condición ❦ (Problema 2), cuando n es par.

Supongamos entonces que un torneo con $n = 2m$ jugadores satisface la condición ❦. En este caso el promedio es $p = (n - 1)/2 = m - 1/2$ y por la ecuación 3 hay dos casos a considerar:

I) $a = b - 1 < p < b$,

II) $b < p < b + 1 = c$.

El sub-caso *i*): Tenemos

$$a = p - \frac{1}{2} = m - 1, \qquad b = p + \frac{1}{2} = m, \qquad c = p + \frac{3}{2} = m + 1$$

y usando la ecuación (2),

$$pn = ah_a + bh_b + ch_c = p(h_a + h_b + h_c) - \frac{1}{2}(-h_a + h_b + 3h_c) = pn - \frac{1}{2}(-h_a + h_b + 3h_c)$$

Entonces

$$h_a = h_b + 3h_c \geq h_b + h_c \qquad \text{y} \qquad 2h_a \geq h_a + h_b + h_c = n$$

de modo que en este sub-caso $h_a \geq n/2 = m > 0$.

Veamos que debe ser $h_c = 0$. Supongamos que no, entonces $h_c > 0$ y existe un jugador $j \in \mathcal{C}$. Ahora, de acuerdo con el Resultado 2, cada uno de los h_a jugadores en $\mathcal{A}$ le ha ganado a j, por lo que usando que $h_a \geq m$,

$$c = g_j \leq (n - 1) - h_a \leq (2m - 1) - m = m - 1 < p < c$$

lo que es un absurdo.

Por lo tanto, $h_c = 0$, y como $h_a = h_b + 3h_c$ tenemos que $h_a = h_b = n/2 = m$ y hay m jugadores con $p - 1/2 = m - 1$ puntos y m jugadores con $p + 1/2 = m$ puntos.

El sub-caso *ii*): Este caso es similar. Aquí

$$a = p - \frac{3}{2} = m - 2, \qquad b = p - \frac{1}{2} = m - 1, \qquad c = p + \frac{1}{2} = m$$

Repitiendo los pasos anteriores:

$$pn = ah_a + bh_b + ch_c = pn - \frac{1}{2}(-3h_a - h_b + h_c)$$

$$h_c = 3h_a + h_b \geq h_a + h_b$$

$$h_c \geq \frac{n}{2} = m > 0$$

En este sub-caso debe ser $h_a = 0$, pues de lo contrario existe un jugador $i \in \mathcal{A}$ que, según el Resultado 2, ha ganado a cada uno de los h_c jugadores en $\mathcal{C}$, y entonces

$$a = g_i \geq h_c \geq m \geq p > a$$

lo que es un absurdo. Concluimos que $h_a = 0$ y que $h_c = h_b = n/2 = m$.

Juntando los dos sub-casos podemos escribir:

✌ **Resultado 6.** *En un torneo de n jugadores que satisface la condición* ❦ *cuando $n = 2m$ es par, hay m jugadores con $m - 1$ puntos y m jugadores con m puntos.*

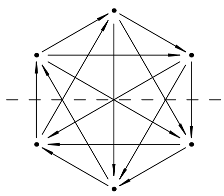
Como en el caso n impar, nos preguntamos

✍ **Problema 12.** *Dado n par, ¿existe un torneo que satisface la condición* ❦*?*

En otras palabras, el objetivo es: *dado $n = 2m$ par, $n \geq 2$, determinar "flechas" entre los jugadores de modo que m jugadores tengan $m - 1$ puntos y los otros m jugadores tengan m puntos*, ya que en este caso el torneo resultante satisface la condición ❦, según el Resultado 3.

Para resolverlo, una posibilidad es usar la idea de la "ronda" que vimos en la solución al Problema 6. Separamos a los jugadores en dos conjuntos: $\mathcal{M}_-$ y $\mathcal{M}_+$, de los jugadores que van a tener $m - 1$ y m puntos, respectivamente. Colocamos a todos los jugadores en una ronda, poniendo a los jugadores de $\mathcal{M}_-$ enfrentados con los jugadores de $\mathcal{M}_+$. Ahora hacemos que cada jugador (sea de $\mathcal{M}_-$ o $\mathcal{M}_+$) gane a los $m-1$ que tiene a la izquierda y pierda con los $m-1$ que tiene a su derecha, y hacemos que cada jugador de $\mathcal{M}_+$ gane además al jugador que tiene en frente, que está en $\mathcal{M}_-$.

En la figura del costado se ilustra el procedimiento para el caso $n = 6$, donde hemos puesto a los jugadores de $\mathcal{M}_+$ arriba de la línea de puntos y los de $\mathcal{M}_-$ abajo.



✍ **Problema 13.** *Hacer un asignación posible (dibujando "flechas") para el caso $n = 8$.*

✍ **Problema 14.** *Ver que efectivamente la propuesta es una solución para el caso n par.*

Podemos resumir lo visto en esta sección enunciando el siguiente:

✌ **Resultado 7.** *Dado n par, $n \geq 2$, siempre existe un torneo que satisface la condición* ❦*. Los jugadores se dividen en dos grupos de $m = n/2$ jugadores cada uno, obteniendo los de un grupo $m - 1$ puntos y los del otro grupo m puntos cada uno.*

Nos queda todavía estudiar con más detalle el caso n impar, cosa que haremos en la próxima sección.

5. La condición ❦ cuando n es impar. Parte II

Nuestra preocupación hasta el momento ha sido caracterizar los n para los que existe un torneo que satisface la condición (Problema 2). Ya hemos visto que esto es posible para todo $n \geq 2$, ya sea que es par (Resultado 7), o impar (Resultado 5).

Sin embargo, vimos (en el Resultado 4) que cuando n es impar aparecen números α y β, asociados a los cardinales de los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, y nos queda por determinar cuáles son los valores posibles para ellos.

En esta sección caracterizaremos estos α's y β's. Recordemos entonces el Resultado 4, y las notaciones correspondientes:

- ✓ $n = 2m + 1$.
- ✓ $\mathcal{A} = \{i : g_i = m - 1\}$, $\mathcal{B} = \{i : g_i = m\}$, $\mathcal{C} = \{i : g_i = m + 1\}$.
- ✓ $\alpha = \#(\mathcal{A}) = \#(\mathcal{C})$, $\beta = \#(\mathcal{B}) = n - 2\alpha = 2(m - \alpha) + 1$.
- ✓ α podría ser 0.
- ✓ No hay "flechas" que vayan desde $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$.

Ya hemos visto, en la Parte I del estudio de la condición ❦ en el caso n impar, que α puede tomar los valores 0 y 1, pero no m. Ahora veremos que α debe ser bastante menor que m. Para ello contemos *todas* las "flechas" que salen y/o llegan a los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ en un torneo que satisface la condición ❦:

De un conjunto en sí mismo: $F_{\mathcal{A}\to\mathcal{A}} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, $F_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = \dfrac{\beta(\beta-1)}{2}$, $F_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

De un conjunto hacia todos: (cantidad de partidos ganados por los jugadores del conjunto)

$$F_{\mathcal{A}\to\,todos} = \sum_{i\in\mathcal{A}} g_i = (m-1)\#(\mathcal{A}) = (m-1)\alpha$$

$$F_{\mathcal{B}\to\,todos} = \sum_{i\in\mathcal{B}} g_i = m\#(\mathcal{B}) = m\beta$$

$$F_{\mathcal{C}\to\,todos} = \sum_{i\in\mathcal{C}} g_i = (m+1)\#(\mathcal{C}) = (m+1)\alpha$$

De un conjunto hacia otros:

$$F_{\mathcal{A}\to\,otros} = F_{\mathcal{A}\to\,todos} - F_{\mathcal{A}\to\mathcal{A}} = (m-1)\alpha - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{\alpha(\beta+\alpha-2)}{2}$$

$$F_{\mathcal{B}\to\,otros} = F_{\mathcal{B}\to\,todos} - F_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}} = m\beta - \beta(\beta-1)/2 = \alpha\beta$$

$$F_{\mathcal{C}\to\,otros} = F_{\mathcal{C}\to\,todos} - F_{\mathcal{C}\to\mathcal{C}} = (m+1)\alpha - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{\alpha(\beta+\alpha+2)}{2}$$

De $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$: (por el Resultado 2) $F_{\mathcal{C}\to\mathcal{A}} = 0$

De $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{C}$: (por el Resultado 2) $F_{\mathcal{A}\to\mathcal{C}} = \alpha\alpha = \alpha^2$

De $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{B}$: $F_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = F_{\mathcal{C}\to\,otros} - F_{\mathcal{C}\to\mathcal{A}} = F_{\mathcal{C}\to\,otros} = \dfrac{\alpha(\beta+\alpha+2)}{2}$

De $\mathcal{A}$ hacia $\mathcal{B}$: $F_{\mathcal{A}\to\mathcal{B}} = F_{\mathcal{A}\to\,otros} - F_{\mathcal{A}\to\mathcal{C}} = \dfrac{\alpha(\beta+\alpha-2)}{2} - \alpha^2 = \dfrac{\alpha(\beta-\alpha-2)}{2}$

Hacia un conjunto: (partidos perdidos, es decir partidos jugados menos partidos ganados por los jugadores del conjunto)

$$F_{todos \to \mathcal{A}} = (n-1)\alpha - F_{\mathcal{A} \to todos} = (n-1)\alpha - (m-1)\alpha = (m+1)\alpha$$
$$F_{todos \to \mathcal{B}} = (n-1)\beta - F_{\mathcal{B} \to todos} = (n-1)\beta - m\beta = m\beta$$
$$F_{todos \to \mathcal{C}} = (n-1)\alpha - F_{\mathcal{C} \to todos} = (n-1)\alpha - (m+1)\alpha = (m-1)\alpha$$

De otros hacia el conjunto:

$$F_{otros \to \mathcal{A}} = F_{todos \to \mathcal{A}} - F_{\mathcal{A} \to \mathcal{A}} = (m+1)\alpha - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{\alpha(\beta+\alpha+2)}{2}$$
$$F_{otros \to \mathcal{B}} = F_{todos \to \mathcal{B}} - F_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}} = m\beta - \frac{\beta(\beta-1)}{2} = \alpha\beta$$
$$F_{otros \to \mathcal{C}} = F_{todos \to \mathcal{C}} - F_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}} = (m-1)\alpha - \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \frac{\alpha(\beta+\alpha-2)}{2}$$

De $\mathcal{B}$ hacia $\mathcal{A}$: $F_{\mathcal{B} \to \mathcal{A}} = F_{otros \to \mathcal{A}} - F_{\mathcal{C} \to \mathcal{A}} = \dfrac{\alpha(\beta+\alpha+2)}{2} - 0 = \dfrac{\alpha(\beta+\alpha+2)}{2}$

De $\mathcal{B}$ hacia $\mathcal{C}$: $F_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}} = F_{\mathcal{B} \to otros} - F_{\mathcal{B} \to \mathcal{A}} = \alpha\beta - \dfrac{\alpha(\beta+\alpha+2)}{2} = \dfrac{\alpha(\beta-\alpha-2)}{2}$

Observamos que varias cantidades aparecen repetidas. Esto es debido a la *simetría* del problema: si cambiamos el sentido de todas las "flechas" entre jugadores, los jugadores de $\mathcal{A}$ pasan a ser los jugadores del "nuevo" $\mathcal{C}$, los de $\mathcal{B}$ quedan en el "nuevo" $\mathcal{B}$, y los de $\mathcal{C}$ pasan al "nuevo" $\mathcal{A}$, quedando el "nuevo" torneo con los mismos valores de n, m, α y β. Como las cantidades que encontramos son independientes del torneo, y dependen sólo de n, m, α y β (que podríamos reducir a n y α), aparece la repetición de resultados. Por ejemplo, $F_{\mathcal{A} \to \mathcal{A}} = F_{\mathcal{C} \to \mathcal{C}}$, $F_{\mathcal{A} \to \mathcal{B}} = F_{\mathcal{B} \to \mathcal{C}}$, etc.

La simetría también apareció al estudiar los sub-casos *i*) y *ii*) del caso n par, cuando en un sub-caso miramos a un jugador de $\mathcal{C}$ y en otro a un jugador de $\mathcal{A}$.

✍ **Problema 15.** *Si el tema de la "simetría" es así, ¿por qué $F_{\mathcal{A} \to \mathcal{C}} \neq F_{\mathcal{C} \to \mathcal{A}}$?*

Estudiar un poco más este tema de la "simetría", considerando los casos n par y n impar separadamente. En particular, ver que si el "viejo" torneo satisface la condición ❦, entonces el "nuevo" también la satisface.

También observamos que todas las cantidades que aparecen deben ser no-negativas, por lo que tenemos que prestar atención a las que tienen signos "$-$". La no-negatividad de algunas implica la no negatividad de otras, y podemos resumir todas en una sola condición, que complementa a un resultado anterior (el 4):

✌ **Resultado 8.** *Si un torneo con $n = 2m+1$ jugadores satisface la condición ❦, entonces*

$$\alpha + 2 \leq \beta$$

o, equivalentemente, $3\alpha + 2 \leq n$ o $\alpha < \frac{2}{3}m$.

Veamos ahora que la desigualdad $\alpha + 2 \leq \beta$ es también condición suficiente, permitiéndonos caracterizar completamente la existencia de torneos que satisfacen la condición ❦:

✌ **Resultado 9.** *Si n y α son dos números dados tales que*

a) *n es impar y $n \geq 3$,*

b) *$0 \leq \alpha$ y $3\alpha + 2 \leq n$,*

entonces podemos construir un torneo de n jugadores que satisface la condición ❦, en el que los conjuntos correspondientes $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tienen cardinales α, $n - 2\alpha$ y α respectivamente.

Lo que resta de la sección estará dedicado a la demostración de este resultado.

Supongamos entonces que n y α están dados, que $m = (n-1)/2$ y $\beta = n-2\alpha$, y separemos los n jugadores en tres conjuntos, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de cardinales α, β y α respectivamente. Nuestro objetivo es determinar las "flechas" entre pares de jugadores de modo que los jugadores de $\mathcal{A}$ obtenga $m - 1$ puntos, los de $\mathcal{B}$ obtengan m puntos, los de $\mathcal{C}$ obtengan $m+1$ puntos y no haya "flechas" desde $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$, resultando así un torneo que satisface la condición ❦ por el Resultado 3.

Comencemos considerando el caso α impar.

Como β es siempre impar, podemos usar el Resultado 5 para armar minitorneos de los jugadores de $\mathcal{A}$ entre sí, los de $\mathcal{B}$ entre sí, y los de $\mathcal{C}$ entre sí. De esta forma cada jugador de $\mathcal{A}$ o $\mathcal{C}$ consigue $(\alpha - 1)/2$ puntos, mientras que los jugadores de $\mathcal{B}$ consiguen $(\beta - 1)/2$ puntos.

Nos falta arreglar las "flechas" entre grupos. Teniendo en cuenta la cantidad de "flechas" que llegan y/o salen de $\mathcal{B}$ y que α y β son impares, vemos que podemos dividir al conjunto $\mathcal{B}$ en dos: $\mathcal{B}_+$ con $(\beta + \alpha + 2)/2$ jugadores, y $\mathcal{B}_-$ con $(\beta - \alpha - 2)/2$ jugadores. Esto es posible pues las dos cantidades en cuestión son enteras, no-negativas y suman β. Ahora queda más claro cómo seguir para terminar de armar el torneo: como se esquematiza en la figura al costado, hacemos que

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[dr] & \\
\mathcal{B}_- \arrow[ur] & & \mathcal{B}_+ \arrow[dl] \\
& \mathcal{A} \arrow[ul] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

✓ los jugadores de $\mathcal{C}$ ganen a los jugadores de $\mathcal{B}_+$, de modo que el puntaje final de cada jugador de $\mathcal{C}$ es

$$\frac{\alpha - 1}{2} + \frac{\beta + \alpha + 2}{2} = \frac{n+1}{2} = m + 1$$

✓ los jugadores de $\mathcal{B}_+$ ganen a los jugadores de $\mathcal{A}$, de modo que el puntaje final de cada jugador de $\mathcal{B}_+$ es

$$\frac{\beta - 1}{2} + \alpha = \frac{n-1}{2} = m$$

✓ los jugadores de $\mathcal{B}_-$ ganen a los jugadores de $\mathcal{C}$, de modo que cada jugador de $\mathcal{B}_-$ obtiene m puntos (como el caso anterior), y finalmente

✓ los jugadores de $\mathcal{A}$ ganen a los jugadores de $\mathcal{B}_-$ y $\mathcal{C}$, de modo que el puntaje final de cada jugador de $\mathcal{A}$ es

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-\alpha-2}{2}+\alpha=\frac{\beta+2\alpha-3}{2}=\frac{n-3}{2}=m-1$$

Queda para el lector:

✍ **Problema 16.** *Verificar que la solución propuesta es correcta.*

✍ **Problema 17.** *Comparar la solución propuesta para $\alpha = 1$ con la dada en la Parte I del caso n impar.*

Pasemos al caso α par, siempre con n impar y $\alpha+2 \leq \beta$. Ya hemos resuelto el caso $\alpha = 0$, pues es el caso tratado en el Resultado 5, así que supongamos que $\alpha \geq 2$.

Hay varias opciones: por ejemplo tratar de reducir este caso a algo que ya conocemos, o tratar de resolver un caso sencillo como orientación para el caso general. Para la segunda opción, observamos que el menor α par para el que desconocemos el resultado es 2 y como β debe ser impar y $\beta \geq \alpha+2$, el menor n es 9. Dejamos al lector resolver este caso antes de resolver el caso general:

✍ **Problema 18.** *Encontrar un torneo de $n = 9$ jugadores que satisfaga la condición ❦, con $\alpha = 2$ y $\beta = 5$.*

Veamos ahora una posible solución para el caso general $n = 2m+1$ impar, α par, $\alpha \geq 2$, $\beta = n-2\alpha$ y $\alpha+2 \leq \beta$.

Como β es impar y α es par, si $\alpha' = \alpha+1$ también debe ser $\alpha'+2 \leq \beta$. Poniendo $n' = \beta+2\alpha' = n+2$, como n' y α' son impares, podemos armar un torneo como acabamos de hacer obteniendo

✓ Conjuntos $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}'$ de cardinales α', β y α', respectivamente.

✓ Los jugadores de $\mathcal{A}'$ tienen $m'-1 = m$ puntos cada uno, los de $\mathcal{B}$ tienen $m' = m+1$ puntos, y los de $\mathcal{C}'$ tienen $m'+1 = m+2$ puntos.

✓ Cada jugador de $\mathcal{A}'$ gana $(\alpha'-1)/2$ puntos jugando con los otros jugadores de $\mathcal{A}$, los de $\mathcal{B}$ ganan $(\beta-1)/2$ puntos entre sí, y los de $\mathcal{C}'$ ganan $(\alpha'-1)/2$ entre sí.

✓ $\mathcal{B} = \mathcal{B}_+ \cup \mathcal{B}_-$, donde $\#(B_+) = (\beta+\alpha'+2)/2$ y $\#(B_-) = (\beta-\alpha'-2)/2$ (que podría ser 0).

✓ Cada jugador de $\mathcal{C}'$ gana a los jugadores de $\mathcal{B}_+$, cada jugador de $\mathcal{B}_+$ gana a los jugadores de $\mathcal{A}'$, cada jugador de $\mathcal{A}'$ gana a los jugadores de $\mathcal{B}_-$ y de $\mathcal{C}'$, y cada jugador de $\mathcal{B}_-$ gana a los jugadores de $\mathcal{C}'$.

Nuestro propósito es eliminar un jugador de $\mathcal{A}'$ y otro de $\mathcal{C}'$ para quedarnos con el número deseado de jugadores y “arreglar” los partidos para que el torneo con n jugadores resultante satisfaga la condición ❦.

Para esto tomemos un jugador $u \in \mathcal{A}'$ y un jugador $v \in \mathcal{C}'$. Observemos que esto siempre es posible porque los cardinales de estos conjuntos son mayores que 0.

Separemos ahora al conjunto $\mathcal{A}'$ en tres partes: el jugador u; el conjunto $\mathcal{A}'_-$ de los que perdieron con u, de cardinal $\alpha/2$; y el conjunto $\mathcal{A}'_+$ de los que ganaron a u, también de cardinal $\alpha/2$.

De forma análoga dividimos el conjunto $\mathcal{C}'$, obteniendo los conjuntos $\mathcal{C}'_-$ de los que perdieron con v y $\mathcal{C}'_+$ de los que ganaron a v, $\#(\mathcal{C}'_-) = \#(\mathcal{C}'_+) = \alpha/2$.

Observamos que al sacar al jugador u del torneo, (v todavía está) sucede que

✓ Los jugadores de $\mathcal{A}'_+$ pierden un punto, quedando con $m-1$ puntos.

✓ Los jugadores de $\mathcal{B}_+$ pierden un punto, quedando con m puntos.

Si ahora sacamos también al jugador v del torneo,

✓ Los jugadores de $\mathcal{C}'_+$ pierden un punto, quedando con $m+1$ puntos.

✓ Los jugadores de $\mathcal{B}_-$ pierden un punto, quedando con m puntos.

✓ Los jugadores de $\mathcal{A}'_-$ pierden un punto, quedando con $m-1$ puntos.

✓ Los jugadores de $\mathcal{A}'_+$ pierden un punto, quedando con $m-2$ puntos.

Si $\mathcal{A} = \mathcal{A}'_- \cup \mathcal{A}'_+$ y $\mathcal{C} = \mathcal{C}'_- \cup \mathcal{C}'_+$, vemos que tenemos que modificar los puntajes de $\mathcal{A}'_+$ (en un punto hacia arriba) y de $\mathcal{C}'_-$ (en un punto hacia abajo). Para hacerlo, consideramos un jugador w en $\mathcal{B}_+$ (posible porque tiene cardinal positivo). w perdió con los $\alpha/2$ jugadores de $\mathcal{C}'_-$ y ganó a los $\alpha/2$ jugadores de $\mathcal{A}'_+$. Si cambiamos el sentido de estas α "flechas", sucederá que:

✓ w queda con los mismo puntos.

✓ Cada jugador de $\mathcal{C}'_-$ pierde un punto, quedando con $m+1$ puntos.

✓ Cada jugador de $\mathcal{A}'_+$ gana un punto, quedando con $m-1$ puntos.

De esta forma, los conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son los deseados, y no habiendo "flechas" desde $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$, el torneo obtenido satisface la condición ❦, según el Resultado 3.

Sería interesante que el lector comparara esta construcción con la que haya obtenido para el Problema 18. Por nuestra parte dejamos el tema: ya es hora de ocuparnos de los "tríos atípicos".

6. Los tríos "atípicos"

En esta sección respondemos la pregunta del Problema 3, determinando la cantidad de tríos "atípicos" en un torneo de n jugadores que satisface la condición ❦.

Recordemos que los jugadores i, j, k forman un trío "atípico" si $i \to j$, $j \to k$ y $k \to i$. Si esos son los "a-típicos", ¿cuáles son los "típicos"? Peor: ¿qué son los tríos?

Empecemos por el principio: un *trío* es un subconjunto de 3 jugadores. En cualquier torneo[4] de n jugadores la cantidad de tríos es

$$\#(\mathit{Tríos}) = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Al terminar el torneo, aparecen "flechas" entre los jugadores. Para un trío cualquiera, ahora con "flechas", hay dos posibilidades:

1. Hay un jugador del cual salen dos "flechas", o
2. Sale una "flecha" y llega una "flecha" de cada jugador en el trío.

Los primeros forman un trío que podríamos llamar *típico*, mientras los segundos son nuestros conocidos tríos "atípicos".

En vez de contar directamente los tríos "atípicos", podríamos calcular el número de tríos "típicos", y después el número de tríos "atípicos" mediante

$$\#(\mathit{Atípicos}) = \#(\mathit{Tríos}) - \#(\mathit{Típicos})$$

Para calcular la cantidad de tríos "típicos", observemos que éstos tienen un jugador distinguido, digamos i, de modo que si j y k son los otros jugadores en el trío, sucede que $i \to j$ y $i \to k$. La cantidad de tríos "típicos" que tienen a i como distinguido se obtiene considerando todos los pares de la forma $\{j, k\}$ tales que $i \to j$ y $i \to k$, donde no interesa el orden de j y k pues no nos importa si $j \to k$ o $k \to j$. Estos pares son los subconjuntos de dos elementos del conjunto de jugadores que perdieron con i, es decir hay $\binom{g_i}{2}$ tríos que tienen a i como distinguido.
Nota: Si $g_i < 2$, el jugador i no será distinguido para ningún trío atípico. De cualquier forma ponemos $\binom{g_i}{2}$, sobreentendiendo que el combinatorio $\binom{r}{s}$ es 0 para $0 \leq r < s$ (r y s enteros, claro). ✄

Entonces la totalidad de tríos "típicos" es[5]

$$\#(\mathit{Típicos}) = \sum_i \binom{g_i}{2}.$$

Supongamos ahora que el torneo satisface la condición ❦. Como hemos hecho anteriormente, es conveniente estudiar separadamente los casos n par o impar:

El caso n par: En este caso, según el Resultado 6, hay $m = n/2$ jugadores con $m-1$ puntos y m jugadores con m puntos. Entonces

$$\#(\mathit{Típicos}) = \sum_i \binom{g_i}{2} = \sum_{i:g_i=m-1} \binom{g_i}{2} + \sum_{i:g_i=m} \binom{g_i}{2} = m\binom{m-1}{2} + m\binom{m}{2} =$$

$$= m\frac{(m-1)(m-2)}{2} + m\frac{m(m-1)}{2} = \frac{m(m-1)}{2}(m-2+m) = m(m-1)^2$$

Reemplazando $n = 2m$, la cantidad total de tríos es:

$$\#(\mathit{Tríos}) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{2(2m-1)m(m-1)}{3}.$$

[4]Aunque el torneo no satisfaga la condición ❦.

[5]Otra vez, no importa si el torneo satisface o no la condición ❦.

y la cantidad de "tríos atípicos" será

$$\#(\textit{Atípicos}) = \#(\textit{Tríos}) - \#(\textit{Típicos}) = \frac{2(2m-1)m(m-1)}{3} - m(m-1)^2 =$$

$$= \frac{m(m-1)}{3}(4m-2-3m+3) = \frac{(m+1)m(m-1)}{3}$$

Nota: Recordemos que en el Nacional, $n = 10$, $m = 5$ y el número de tríos atípicos era $\frac{6\cdot5\cdot4}{3} = 40$. ✄

El caso n impar: Cuando $n = 2m+1$, según el Resultado 4, existen tres conjuntos, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, de cardinales α, β y α respectivamente, tales que todo jugador está en alguno de los conjuntos, y los jugadores de $\mathcal{A}$ tienen $m-1$ puntos, los de $\mathcal{B}$ tienen m puntos, los de $\mathcal{C}$ tienen $m+1$ puntos (y no hay "flechas" de $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$).

Entonces, la cantidad total de "tríos típicos" es

$$\#(\textit{Típicos}) = \sum_i \binom{g_i}{2} = \sum_{i:g_i=m-1} \binom{g_i}{2} + \sum_{i:g_i=m} \binom{g_i}{2} + \sum_{i:g_i=m+1} \binom{g_i}{2} =$$

$$= \alpha\frac{(m-1)(m-2)}{2} + \beta\frac{m(m-1)}{2} + \alpha\frac{(m+1)m}{2}$$

Sustituyendo $n = 2m+1$, la cantidad de "tríos atípicos" será

$$\#(\textit{Atípicos}) = \#(\textit{Tríos}) - \#(\textit{Típicos}) =$$

$$= \frac{(2m+1)m(2m-1)}{3} - \left(\alpha\frac{(m-1)(m-2)}{2} + \beta\frac{m(m-1)}{2} + \alpha\frac{(m+1)m}{2}\right)$$

que después de un poco de álgebra se simplifica a

$$\#(\textit{Atípicos}) = \frac{(2m+1)(m+1)m}{6} - \alpha.$$

7. Punto final, pero. . .

Hemos concluido la tarea que teníamos prevista. Antes de despedirnos, es bueno hacer un resumen de los resultados más importantes que vimos sobre torneos de n jugadores (aunque en el medio hemos visto otros):

✓ Dado $n \geq 2$, siempre hay un torneo con n jugadores que satisface la condición ❦.

✓ En cualquier torneo que satisface la condición ❦, no hay más de 3 valores posibles (y consecutivos) para los puntajes.

✓ Cuando $n = 2m$ es par, los jugadores se dividen en dos grupos de m jugadores cada uno. Uno es el de jugadores con $m-1$ puntos y otro el de los jugadores con m puntos.

✓ Cuando $n = 2m+1$ es impar, las cosas son un poco más complicadas:

a) Aparecen dos números, α y β tales que

   I) $n = \beta + 2\alpha$, o equivalentemente, $\beta = 2(m - \alpha) + 1$.

   II) $\alpha \geq 0$ y $\alpha + 2 \leq \beta$.

b) Los jugadores se dividen en tres conjuntos: $\mathcal{A} = \{i : g_i = m - 1\}$, $\mathcal{B} = \{i : g_i = m\}$ y $\mathcal{C} = \{i : g_i = m + 1\}$, con cardinales $\#(\mathcal{A}) = \#(\mathcal{C}) = \alpha$ y $\#(\mathcal{B}) = \beta$.

c) No hay "flechas" que vayan desde $\mathcal{C}$ hacia $\mathcal{A}$.

Dados n, α y β como en *a.i*), siempre existe un torneo que satisface la condición ❦ (y *b*)) con esos valores.

✓ Desde otro punto de vista, cuando n es impar es "fácil" armar un torneo de modo que todos los jugadores obtengan el mismo puntaje, $(n - 1)/2$.

✓ Cuando $n = 2m$ es par, la cantidad de tríos "atípicos" es

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{3}$$

mientras que si $n = 2m + 1$ es impar, hay que tener en cuenta el valor de α:

$$\frac{(2m+1)(m+1)m}{6} - \alpha$$

Sin embargo, la historia no termina. Podríamos plantear varias preguntas más, como por ejemplo:

☞ **Para pensar.** *Varias de las soluciones para la existencia de torneos fueron dadas en términos de "rondas", pero*

1. *¿Es cierto que en los torneos donde todos los jugadores obtienen el mismo puntaje (y por lo tanto n es impar) se pueden organizar en una ronda como en la solución propuesta al Problema 6?*

2. *Cuando n es par, ¿es cierto que todos los torneos que satisfacen la condición ❦ se pueden organizar en una ronda como la propuesta en la solución al Problema 12?*

3. *Cuando n es impar, $\alpha > 0$ y $3\alpha + 2 \leq n$, nuestra solución no fue dada en términos de una ronda. ¿Cómo podría plantearse una solución en términos de una ronda para α impar?, ¿para α par?*

☞ **Para pensar.** *Hemos visto que para cualquier n entero mayor o igual que 2, existe un torneo que satisface la condición ❦. Si distinguimos a los jugadores numerándolos de 1 a n, ¿cuántos de estos torneos hay para cada n?, ¿cómo es la dependencia en α cuando n es impar?*

☞ **Para pensar.** *Si decimos que dos torneos son* equivalentes *cuando hay una permutación de los jugadores que lleva un torneo al otro (conservando "flechas"), ¿cuántos torneos hay de n jugadores, que satisfacen la condición ❦ y que NO son "equivalentes" entre sí?, ¿cómo es la dependencia en α cuando n es impar?*

☞ **Para pensar.** *Si cambiamos la condición ❦ por: "$i \to j$ implica $g_j \geq g_i - r$" con r entero, ¿qué se puede decir?*

El tema que hemos visto es parte de lo que llamamos "combinatoria", pero también de la teoría de grafos, evidenciado por las "rondas" y "flechas". Sería interesante ver una teoría más general de torneos bajo la óptica de la teoría de grafos. Pero eso quedará para otras notas.