Máximos y Mínimos sin Derivadas
Soluciones a los Problemas

Soluciones a los problemas de la Entrega 1

Indicamos acá algunas soluciones posibles. Sería interesante que enviaran (vía correo electrónico a `invydoc@mail.oma.org.ar`) otras soluciones que ustedes pensaron y/o que discutieran o comentaran las presentadas aquí.

***Solución al Problema 1*:** Los triángulos rectángulos considerados pueden inscribirse en una circunferencia cuyo diámetro es la hipotenusa común y que pensamos como base común. Tendrá mayor área aquel triángulo que tenga mayor altura. La mayor altura posible es el radio de la circunferencia. Por lo tanto, entre los triángulos rectángulos con hipotenusa dada, el de mayor área es el isósceles. □

***Solución al Problema 2*:** Con un argumento parecido al de la solución anterior, tenemos que buscar el triángulo que tiene mayor altura. Esto sucederá cuando la altura esté en la mediatriz de la base. Por lo tanto, el de mayor área es el isósceles. □

✎ *Nota*: ¿Qué pasa si sacamos el requerimiento de que la base esté fija? (¡Pensar antes de seguir!). Si consideramos un triángulo de lados a, b, c, inscripto en una circunferencia dada, dejando fijo a y pensándolo como base, sabemos (por lo que acabamos de ver) que el que tiene mayor área es el isósceles, cuya altura esta sobre la mediatriz de la base, es decir ganamos en área si $b = c$. Parece claro que partiendo de ese triángulo isósceles y dejando fijo otro lado, por ejemplo b, aumentaremos el área si ponemos $a = c$, y así sucesivamente, dejando fijos c, a, b, c, etc.

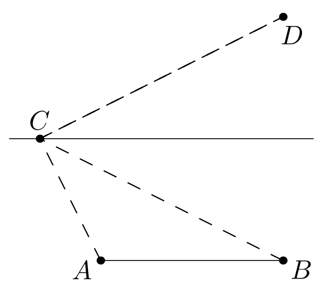
Intuitivamente parece que nos acercamos a un triángulo equilátero. El problema con esto es que el proceso es infinito y formalizarlo implica nociones de convergencia que no queremos tratar. ¿Será posible rescatar el argumento sin complicarse demasiado? Más adelante veremos otras herramientas para resolver esta variante de otra forma. ✐

***Solución al Problema 3*:** Si los triángulos tienen vértices A, B, C, con la longitud de AB común, y el perímetro también es común, debe ser que la suma de las longitudes de BC y CA es el mismo para todos los triángulos. Entonces C recorre una elipse con focos en A y B (¡Hacer un dibujo aproximado!). Como en los casos anteriores, la mayor altura (y por lo tanto área) corresponde al caso en que la mediatriz de AB contiene la altura, es decir el triángulo de mayor área en este caso es también el isósceles. □

***Solución al Problema 4*:** Supongamos que los vértices de un triángulo considerado son A, B y C, donde (por ejemplo) AB y BC están fijos. Tomemos AB como base. El vértice C está sobre una circunferencia de radio BC (fijo) con centro en B. La máxima área resulta de ubicar al punto C a la mayor distancia posible de la recta por A y B (la distancia da la altura: hacer un esquema). Por lo tanto, el triángulo de mayor área es el rectángulo (recto en B). □

***Solución al Problema 5*:** Nos ayudamos con la figura al costado.

La base AB está fija, C varía sobre una recta paralela a AB definida por la altura fija. D es el simétrico de B respecto a esta recta. Entonces el perímetro del triángulo ABC es $AB+BC+CA$. Como AB está fijo, maximizar o minimizar el perímetro es lo mismo que maximizar o minimizar $BC+CA$. Pero $BC+CA = DC+CA$. Esta longitud es mínima cuando C está sobre la recta AD, es decir cuando el triángulo ABC es isósceles. Por otro lado, no hay triángulo con perímetro máximo puesto que podemos hacer AC tan largo como queramos (y por lo tanto el perímetro). □



***Solución al Problema 6*:** Si $a = \min_i a_i$, entonces

$$ka = \underbrace{a + a + \cdots + a}_{k \text{ veces}} \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_k = km \quad \text{y} \quad a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ veces}} \leq a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k = g^k,$$

por lo que $a \leq m$ y $a \leq g$. Análogamente se pueden demostrar las desigualdades $m \leq \max_i a_i$ y $g \leq \max_i a_i$. □

Solución al Problema 8: La longitud de OP es el radio de la circunferencia, que es la mitad del diámetro, y la longitud de éste es $a+b$.

Los triángulos AQC, ABQ y QBC son semejantes, pues AC es diámetro de la circunferencia, y entonces $\widehat{AQC} = \widehat{ABQ} = \widehat{QBC} = 90°$, lo que implica que $\widehat{QAC} = \widehat{BQC}$, de donde se deduce la semejanza. Entonces, si ℓ es la longitud del segmento BQ,

$$\frac{a}{\ell} = \frac{AB}{BQ} = \frac{QB}{BC} = \frac{\ell}{b}.$$

De aquí que $\ell^2 = ab$, es decir, ℓ es la media geométrica entre a y b. □

Solución al Problema 9:

$$y = x(a-x) = xa - x^2 = \frac{a^2}{4} - \Bigl(\frac{a^2}{4} - 2\frac{a}{2}x + x^2\Bigr) = \frac{a^2}{4} - \Bigl(x - \frac{a}{2}\Bigr)^2.$$

Como el cuadrado es no negativo, $y \le a^2/4$ con igualdad si sólo si $x = a/2$. □

Solución al Problema 10: La vida es mas fácil con trigonometría, que en realidad es sólo una forma compacta de expresar semejanza de triángulos. Si los lados del triángulo son a, b y c, y los correspondientes ángulos opuestos son α, β y γ, tenemos que el área A es $(\textit{base} \times \textit{altura})/2$, o sea

$$A = \frac{ab \operatorname{sen}\gamma}{2} = \frac{bc \operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{ac \operatorname{sen}\beta}{2}, \tag{2}$$

pero queremos que no aparezcan los ángulos en la fórmula final. Recordemos la ley del coseno, que permite expresar un ángulo en términos de los lados:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Como en las ecuaciones (2) para A dadas anteriormente aparece $\operatorname{sen}\gamma$, podríamos poner el seno en terminos del coseno mediante la relacion pitagórica

$$\operatorname{sen}^2\gamma + \cos^2\gamma = 1,$$

por lo que es conveniente considerar el cuadrado de A en vez de A:

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4}a^2\,b^2\,\operatorname{sen}^2\gamma = \frac{1}{4}a^2\,b^2\,(1-\cos^2\gamma) = \\ &= \frac{1}{4}a^2\,b^2\left(1 - \frac{\bigl(a^2+b^2-c^2\bigr)^2}{4a^2b^2}\right) = \frac{4a^2b^2 - \bigl(a^2+b^2-c^2\bigr)^2}{16}. \end{aligned}$$

En el numerador tenemos la diferencia de dos cuadrados que podemos expresar como el producto

$$\bigl(2ab - (a^2+b^2-c^2)\bigr)\bigl(2ab + a^2 + b^2 - c^2\bigr).$$

Eliminando paréntesis y agrupando, cada factor es nuevamente diferencia de cuadrados:

$$\begin{aligned} \bigl(c^2 - (a-b)^2\bigr)\bigl((a+b)^2 - c^2\bigr) &= (c-(a-b))(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c) = \\ &= (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

Recordando que el semiperímetro es $s = (a+b+c)/2$, tenemos

$$\begin{aligned} b+c-a = a+b+c-2a = 2s-2a &= 2(s-a) \\ a+c-b = a+b+c-2b &= 2(s-b) \\ a+b-c = a+b+c-2c &= 2(s-c) \\ a+b+c &= 2s. \end{aligned}$$

Resumiendo,

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{4a^2b^2 - \bigl(a^2+b^2-c^2\bigr)^2}{16} = \frac{(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)(a+b+c)}{16} = \\ &= \frac{2(s-a)2(s-b)2(s-c)2s}{16} = (s-a)(s-b)(s-c). \end{aligned}$$

que es la fórmula de Herón. □

Solución al Problema 11: Supongamos que el área común a todos estos rectángulos es A. Si uno de los rectángulos considerados tiene lados de longitudes a y b, entonces $A = a \cdot b$. La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica nos dice que en cualquier caso

$$\sqrt{A} = \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{p}{4},$$

donde $p = 2(a+b)$ es el perímetro del rectángulo analizado. Además, sabemos que vale la igualdad si y sólo si $a = b$, por lo que para cualquier rectángulo considerado $4\sqrt{A} \leq p$, con igualdad si y sólo si $a = b$. Como A es constante entre los rectángulos considerados, el rectángulo de menor perímetro (con menor p) es aquél para el que vale la igualdad, es decir cuando $a = b$. □

Solución al Problema 12: Supongamos que θ es el ángulo comprendido por los lados a y b, mientras que λ es el ángulo comprendido por los lados c y d. El cuadrilátero queda dividido naturalmente en dos triángulos: uno formado por los lados a y b y el ángulo θ, y otro formado por los lados c, d y el ángulo λ. Estos triángulos tienen un lado común, llamémosle e, que es una diagonal del cuadrilátero inicial (¡hacer dibujo!).

El área del cuadrilátero será entonces

$$A = \frac{1}{2}\, ab \operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\, cd \operatorname{sen}\lambda.$$

Como en la solucion a la fórmula de Herón para el triángulo, queremos relacionar el seno con el coseno mediante la relación pitagórica, y a su vez el coseno con los lados del triángulo con la ley del coseno. Así, el cuadrado de A es

$$A^2 = \frac{a^2b^2 \operatorname{sen}^2\lambda + c^2d^2 \operatorname{sen}^2\lambda + 2abcd \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda}{4},$$

y cambiando sen^2 por $1 - \cos^2$, queda

$$4\,A^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - a^2b^2\cos^2\theta - c^2d^2\cos^2\lambda + 2abcd \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda.$$

Usamos ahora la ley del coseno expresando la diagonal e en términos de a, b, $\cos\theta$, y c, d, $\cos\lambda$:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\lambda.$$

Puesto que queremos relacionar $\operatorname{sen}\theta$ y $\operatorname{sen}\lambda$ con $\cos\theta$ y $\cos\lambda$, tenemos que considerar los cuadrados. En las ecuaciones anteriores, dejamos los dos cosenos en un miembro de una igualdad:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\theta - 2cd\cos\lambda,$$

y elevamos al cuadrado

$$\big(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\big)^2 = 4\big(a^2b^2\cos^2\theta + c^2d^2\cos^2\lambda - 2abcd\cos\theta\cos\lambda\big).$$

Comparando con la ecuación para $4A^2$, vemos que podemos despejar

$$a^2b^2\cos^2\theta + c^2d^2\cos^2\lambda = \frac{\big(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\big)^2}{4} + 2abcd\cos\theta\cos\lambda,$$

con lo que

$$4A^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{\big(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\big)^2}{4} + 2abcd\big(\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda - \cos\theta\cos\lambda\big).$$

Ahora recordamos que

$$\cos(\theta + \lambda) = \cos\theta\cos\lambda - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\lambda,$$

así que podemos poner

$$4A^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{\big(a^2 + b^2 - c^2 - d^2\big)}{4} - 2abcd\cos(\theta + \lambda),$$

que ya es bastante parecido a lo que buscamos. Sólo (!) tenemos que relacionar algunos términos con el semiperímetro s. Recordando que en la solución al Problema 10 usamos diferencias de cuadrados, podemos poner (multiplicando por 4 para no escribir cocientes a la derecha):

$$\begin{aligned}
16A^2 &= 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2) - 8abcd\cos(\theta+\lambda) = \\
&= 4a^2b^2 + 8abcd + 4c^2d^2 - \big(a^2+b^2-c^2-d^2\big)^2 - 8abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big) = \\
&= \big(2ab+2cd\big)^2 - \big(a^2+b^2-c^2-d^2\big)^2 - 8abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big) = \\
&= \big(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2\big)\big(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2\big) - 8abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big) = \\
&= \big((c+d)^2-(a-b)^2\big)\big((a+b)^2-(c-d)^2\big) - 8abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big) = \\
&= (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d) - 8abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big),
\end{aligned}$$

y, ahora relacionando con el semiperímetro:

$$\begin{aligned}
&c+d-a+b = a+b+c+d-2a = 2(s-a), \qquad && c+d+a-b = a+b+c+d-2b = 2(s-b), \\
&a+b-c+d = a+b+c+d-2c = 2(s-c), \qquad && a+b+c-d = a+b+c+d-2d = 2(s-d).
\end{aligned}$$

Resumiendo,

$$16A^2 = 16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - 8abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big),$$

que dividiendo por 16 es la fórmula que buscábamos. □

***Solución al Problema 13*:** Suponiendo que el perímetro esté dado y el semiperímetro sea s, teniendo en cuenta la fórmula del Problema 12, tratamos de usar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. El primer término del miembro derecho de la fórmula es $(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$, por lo que la desigualdad podría usarse así:

$$\sqrt[4]{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \le \frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)+(s-d)}{4},$$

con igualdad si y sólo si $s-a = s-b = s-c = s-d$, es decir si y sólo si $a = b = c = d$. También tenemos

$$\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)+(s-d)}{4} = \frac{4s-2s}{4} = \frac{s}{2},$$

por lo que la desigualdad anterior puede expresarse como

$$(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \le (s/2)^4$$

con igualdad si y sólo si $a = b = c = d$.

Teniendo en cuenta ahora que $1+\cos(\acute{a}ngulo) \ge 0$ para cualquier $\acute{a}ngulo$, podemos poner

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big) \le (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \le (s/2)^4,$$

o directamente

$$A \le \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2}{4},$$

desigualdad que relaciona el área con el semiperimetro *para cualquier cuadrilátero*. Mas aún, sabemos que vale igualdad si y sólo si pasan dos cosas:

i) tenemos igualdad únicamente si $a = b = c = d$ (por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica), y

ii) debe ser $\cos(\theta+\lambda) = -1$ para que $1+\cos(\theta+\lambda) = 0$.

En particular, sabemos que para el cuadrado (de lado $\sqrt{A}$) vale la igualdad, puesto que si θ y λ son ángulos interiores opuestos, debe ser $\theta = \lambda = 90°$, y entonces $\cos(\theta+\lambda) = -1$.

De esta forma obtenemos la solución al problema, pero podemos decir más: el cuadrado es el *único* que tiene menor perímetro, puesto que es el único para el que vale la igualdad $A = s^2/4$, ya que por *i*) deben ser los lados iguales (y entonces iguales a $\sqrt{A}$), y para que valga *ii*) necesitamos que la suma de los ángulos opuestos del cuadrilátero tenga coseno igual a -1, es decir la suma tiene que ser $180°$ más un múltiplo entero de $360°$. Pero si un cuadrilátero tiene los lados iguales (¡y no tiene área 0!), entonces debe ser un rombo, es decir ángulos interiores opuestos deben ser iguales, en particular, $\theta = \lambda = 90°$ más un múltiplo entero de $180°$. Pero el ángulo interior θ no puede ser de más de $180°$ en un rombo, entonces es de $90°$ (el múltiplo entero es $0°$). □

***Solución al Problema 14*:**

a) Por el Problema 12 sabemos que el área de Q_1 satisface

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big)}{2},$$

donde s es el semiperímetro, $a = 8$, $b = 9$, $c = 12$, $d = 19$ y θ y λ son ángulos interiores opuestos. Como

$$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{8+9+12+19}{2} = 24,$$

tenemos

$$s-a = 16; \quad s-b = 15; \quad s-c = 12; \quad s-d = 5,$$

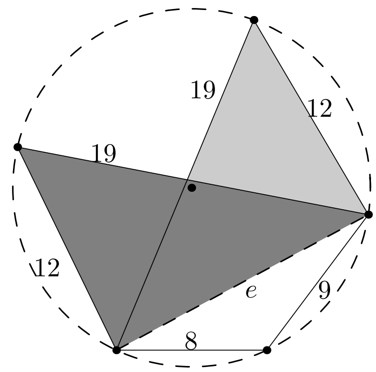
y $A^2 = 14400 - 8208\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big)$.

Como Q_1 tiene área máxima, debe ser $\cos(\theta+\lambda) = -1$, es decir $\theta+\lambda = 180°$ (más un múltiplo entero de $360°$ que debe ser 0, porque no puede haber ángulos interiores opuestos en un cuadrilátero donde ambos sean mayores de $180°$). Es decir $A = 120$ y como dos ángulos opuestos suman $180°$, Q_1 está inscripto en una circunferencia.

Por el mismo razonamiento, también el área de Q_2 es 120 y Q_2 está inscripto en una circunferencia.

b) Nos ayudamos con la figura al costado.

Supongamos que inscribimos a Q_1 en una circunferencia, y consideremos la diagonal e que deja a un lado los lados que miden 8 y 9 y a otro lado los que miden 12 y 19, formando dos triángulos. "Dando vuelta" el último triángulo (formado por los lados de 12, 19 y la diagonal e, marcado con gris claro en la figura), más precisamente, haciendo una simetría respecto a la mediatriz de la diagonal e, obtenemos un nuevo cuadrilátero (el triángulo que no movimos, en blanco, más el nuevo, marcado en gris oscuro) que satisface las condiciones de Q_2 y por lo tanto debe ser congruente con Q_2. Entonces, el radio de las circunferencias que inscriben a Q_1 y Q_2 es el mismo. □



***Solución al Problema 15*:** Supongamos que los lados del cuadrilátero son a, b, c, d, y que a y el perímetro están fijos. Usando la fórmula del Problema 12 y usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica (recordar que a está fijo, variamos sólo b, c y d):

$$\sqrt[3]{(s-b)(s-c)(s-d)} \leq \frac{(s-b)+(s-c)+(s-c)}{3} = \frac{3s-(2s-a)}{3} = \frac{s+a}{3},$$

con igualdad si y sólo si $s-b = s-c = s-d$, o sea cuando $b = c = d$.

Puesto que

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\big(1+\cos(\theta+\lambda)\big),$$

y que a mayor valor de A corresponde mayor valor de A^2 (A es positivo), la mayor área se obtiene tomando (ver solución al problema anterior) $\theta+\lambda = 180°$ y $b = c = d$. El área será entonces

$$A = \sqrt{s-a}\,\sqrt[3]{(s+a)/3}.$$

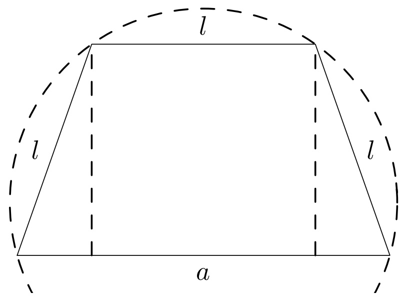
Aunque aparentemente el problema ya está resuelto, nos faltaría ver si en realidad podemos construir un cuadrilátero con estas características.

Primeramente observemos que $s > a$: si e es la diagonal que deja a un lado a a y b y a otro lado a c y d, entonces entonces (aplicando dos veces la desigualdad triangular)

$$a < b + e < b + c + d,$$

y luego sumamos a a los extremos de la desigualdad y dividimos por 2 (como en el caso del triángulo) obtenemos $a < s$.

Para construir efectivamente un cuadrilátero inscripto en una circunferencia con un lado de longitud a y los otros tres de igual longitud, digamos l, observemos que debe haber un lado paralelo a a, y que entonces podemos sacar un rectángulo interior al cuadrilátero, dejando dos triángulos rectángulos simétricos a cada lado (ver figura al costado). Por lo tanto basta construir un triángulo rectángulo de lado $|(a - l)/2|$ (donde $|x|$ es el valor absoluto de x) e hipotenusa l, y después completarlo al cuadrilátero deseado. La circunferencia puede dibujarse ahora fácilmente (tomando el circuncentro de 3 de los vértices del cuadrilátero). □



***Solución al Problema 16*:** Como en la solución del Problema 14, el cuadrado del área máxima debe ser $A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d)$ y la suma de ángulos interiores opuestos debe ser 180° (el cuadrilátero debe estar inscripto en una circunferencia).

Como $s = (a+b+c+d)/2 = (1+4+7+8)/2 = 10$, entonces $s-a = 9$, $s-b = 6$, $s-c = 3$, $s-d = 2$ y $\boxed{A = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2} = 18.}$ □

***Solución al Problema 17*:**

a) Consideremos el caso de un rectángulo cuyos lados tienen longitudes (en metros) a (la paralela a la costa) y b. El área de un rectángulo así es $A = a \cdot b$, cantidad que queremos maximizar sujeto a la condición $a + 2b = 200$.

Vamos a dar dos soluciones de distintos "sabor", una más algebraica y la otra más geométrica.

Una variante: Usamos como herramienta la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Como tenemos que relacionar el producto ab con la suma $a + 2b$, parece natural modificar estas cantidades de modo de comparar $a \cdot 2b$ y $a + 2b$, para los que la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica es

$$\sqrt{a \cdot 2b} \leq \frac{a + 2b}{2} \quad \text{o} \quad a \cdot 2b \leq \frac{(a + 2b)^2}{4},$$

con igualdad si y sólo si $a = 2b$. Entonces, como $a + 2b = 200$,

$$A = a \cdot b \leq \frac{200^2}{8}$$

con igualdad si y sólo si $a = 2b = 100$. En otras palabras, el área A es siempre menor o igual a 5000 (metros cuadrados), con igualdad (máxima área) si y sólo si $a = 100$ (metros) y $b = 50$ (metros).

Otra variante: Si pensamos la costa como un espejo, el rectángulo reflejado junto con el original forman un rectángulo de perímetro 400 (metros). Maximizar el área del rectángulo original es equivalente a maximizar el área de este nuevo rectángulo. Pero ya sabemos que el área se maximiza con el cuadrado, en este caso de lado 100 (metros). Entonces el rectángulo original debe tener medidas $a = 100$ (metros) y $b = 50$ (metros) para máxima área.

b) Consideremos ahora el caso de un cuadrilátero cualquiera. Si las longitudes son a, b, c, d, con a sobre la costa, queremos maximizar el área A, que es equivalente a maximizar su cuadrado:

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{2}abcd\big(1 + \cos(\theta + \lambda)\big)$$

sujeto a la condición $b+c+d = 200$ (en metros), donde s es el semiperímetro, $s = (a+b+c+d)/2$.

Ganamos en área si ponemos $\cos(\theta + \lambda) = -1$, es decir si el cuadrilátero está inscripto en una circunferencia. Entonces queremos maximizar

$$A^2 = (s-a)(s-b)(s-c)(s-d).$$

En esta formulación, los roles de b, c y d son simétricos (son intercambiables), pero el de a es distinto. Recordando lo hecho en la primera parte (primer variante), en la que modificamos el producto de modo que la suma de los factores fuera constante, observamos que como $s = (a+b+c+d)/2 = a/2 + 100$, debe ser

$$s-a = 100 - \tfrac{1}{2}a, \quad s-b = 100 + \tfrac{1}{2}a - b, \quad s-c = 100 + \tfrac{1}{2}a - c, \quad s-d = 100 + \tfrac{1}{2}a - d$$

y obtenemos una suma constante (independiente de a, b, c, d) si ponemos

$$\begin{aligned} 3(s-a) + (s-b) + (s-c) + (s-d) &= \\ &= 300 - \tfrac{3}{2}a + 100 + \tfrac{1}{2}a - b + 100 + \tfrac{1}{2}a - c + 100 + \tfrac{1}{2}a - d = \\ &= 600 - (b+c+d) = 400. \end{aligned}$$

Como maximizar A^2 es lo mismo que maximizar $3A^2$, aplicando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica tenemos

$$3A^2 = 3(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) \leq \left(\frac{400}{4}\right)^4 = 100^4,$$

con igualdad si y sólo si

$$3(s-a) = s-b = s-c = s-d = 100.$$

Es decir, la máxima área, $\sqrt{10000}/\sqrt{3}$, se obtiene resolviendo estas ecuaciones. Como $s - a = 100 - a/2$, la ecuación $3(s-a) = 100$ se transforma en $100 - a/2 = 100/3$, o $a/2 = 200/3$. Es decir $a = 400/3$. Por otra parte, para la máxima área debe ser $s-b = s-c = s-d$, es decir $b = c = d$, y como la suma $b + c + d = 200$, debe ser $b = c = d = 200/3$.

Para finalizar, observemos que dado que el cuadrilátero está inscripto en una circunferencia y $b = c = d = a/2$, entonces el cuadrilátero es un semihexágono regular, donde la circunferencia que lo circunscribe tiene diámetro a. Esto hace pensar que podríamos obtener una solución de tipo geométrico también para esta parte, pero la dejamos para un próximo capítulo. $\square$