

Máximos y Mínimos sin Derivadas

Entrega 1

Introducción

Es costumbre comenzar el estudio de problemas de *optimización* junto con el estudio de derivadas. Sin embargo, es posible tratar problemas interesantes de máximos y mínimos con métodos más elementales, al alcance de los alumnos del último ciclo de la E.G.B. o comienzo del Polimodal. Para quienes seguirán el Polimodal, estos temas resultan una buena introducción a los problemas que se resolverán después con técnicas de derivadas, a la vez que podrán comparar las bondades de cada técnica. Para quienes no seguirán el Polimodal, puede ser la única oportunidad de ver problemas de este tipo!

La idea de incorporar estos temas en la enseñanza no es nueva. Entre nosotros por ejemplo, L. A. Santaló lo ha propuesto en su libro *La enseñanza de la matemática en la escuela media* (Docencia, Buenos Aires, 1986, págs. 66–69)¹.

Algunos problemas típicos a los que nos referimos son las *desigualdades isoperimétricas* elementales, como por ejemplo: “Entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el que tiene mayor área”, o “Entre todos los polígonos de n lados inscriptos en una circunferencia, el n -ágono regular es el que tiene mayor área”.

El propósito de estas notas es presentar algunos de estos problemas y algunas técnicas que pueden emplearse en su resolución, aprovechando la experiencia obtenida en los cursos de “Máximos y mínimos sin derivadas”, dados en la OMA. A modo de “precalentamiento”, invitamos al lector a resolver los siguientes problemas usando sólo argumentos geométricos:

☞ **Problema 1:** Entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa dada, ¿cuál tiene mayor área? >✂

☞ **Problema 2:** Entre todos los triángulos inscriptos en una circunferencia y con base dada, ¿cuál tiene mayor área? >✂

☞ **Problema 3:** Entre todos los triángulos de base y perímetro dados, ¿cuál tiene mayor área? >✂

☞ **Problema 4:** Entre todos los triángulos con dos lados de longitud dada y el tercero de cualquier longitud, ¿cual es el de mayor área? >✂

☞ **Problema 5:** Entre todos los triángulos con base y altura dadas (en particular tienen todos la misma área), ¿cuál es el que tiene menor perímetro? ¿Y mayor? >✂

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

Una de las técnicas para determinar máximos y mínimos es el uso de desigualdades entre “promedios”. Dos de los más elementales son la media aritmética y la media geométrica, que estudiaremos en esta sección.

¹Desde ya, recomendamos al lector interesado en la enseñanza de matemáticas que consulte ese libro: son perlas tras perlas, exhibidas con la sencillez de quien conoce profundamente el tema.

Definición: Si a_1, a_2, \dots, a_k son números reales, su *media aritmética* se define por

$$m = m(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j,$$

mientras que si los números son positivos, su *media geométrica* se define como

$$g = g(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k} = \left(\prod_{j=1}^k a_j \right)^{1/k}. \quad \times$$

Por ejemplo, la media aritmética entre 1, 2, 3 y 4 es $m = 2,5$; mientras su media geométrica es $g = 2,21336\dots$

☞ **Problema 6:** Demostrar que m y g son efectivamente *promedios*, es decir, $\min_i a_i \leq m(a_1, \dots, a_k) \leq \max_i a_i$ y $\min_i a_i \leq g(a_1, \dots, a_k) \leq \max_i a_i$, donde en cualquiera de estas desigualdades vale la igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_k$. ×

En el ejemplo anterior, vemos que $g \leq m$. Esta desigualdad es siempre válida:

☞ **Resultado 7** (*Desigualdad entre las medias aritmética y geométrica*): Si a_1, a_2, \dots, a_k son positivos, entonces $g \leq m$, y puede darse la igualdad $g = m$ si y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_k$. ×

En la próxima sección daremos una demostración de esta desigualdad en general, pero es sencilla verla para el caso $n = 2$: si a y b son números positivos, la desigualdad $g \leq m$ es equivalente, sucesivamente, a

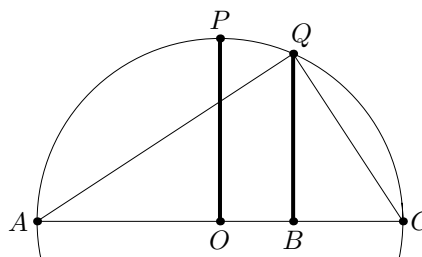
$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq a \cdot b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0.$$

Por supuesto, la última es cierta y vale la igualdad si y sólo si $a = b$.

La desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, al menos para $n = 2$ era conocida por los babilonios, quienes posiblemente usaran argumentos geométricos como el del próximo problema:

☞ **Problema 8:** La desigualdad para $n = 2$ se puede interpretar geoméricamente a partir de la siguiente figura, donde

- la longitud de AB es a ,
- la longitud de BC es b ,
- O es el punto medio del segmento AC ,
- el diámetro de la circunferencia es $a + b$,
- el punto P está en la intersección de una perpendicular al segmento AC por O ,
- el punto Q está en la intersección de una perpendicular al segmento AC por B .



Demostrar que la longitud de OP es la media aritmética de a y b , y usando que los triángulos ABQ y QBC son semejantes, demostrar que la longitud de BQ es la media geométrica. Es claro que la media geométrica es menor o igual que la media aritmética, y vale la igualdad si y sólo si $a = b$. ×

A partir del problema anterior, vemos que desde el punto de vista geométrico (para $n = 2$), la media aritmética representa *el promedio de longitudes*, mientras que la media geométrica representa *el promedio de áreas*: la media geométrica de a y b es el lado de un cuadrado cuya área tiene igual área a la de un rectángulo de lados a y b .

La desigualdad es sólo una reinterpretación sobre máximos de una parábola, y de ahí su importancia para la determinación de máximos y mínimos en problemas sencillos:

☞ **Problema 9:** Si $a > 0$, el máximo de la parábola $y = x(a-x)$ se obtiene en $x = a/2$ y toma el valor $a^2/4$. *Sugerencia:* Completar cuadrados como en la demostración de la desigualdad para $n = 2$. ×

Aplicamos la desigualdad al problema: “Entre todos los triángulos de perímetro dado, el equilátero es el de mayor área”.

Supongamos que (las longitudes de) los lados son a, b y c . El perímetro es $p = a + b + c$, cuyo valor es común (constante) para todos los triángulos considerados.

Necesitamos ahora una fórmula para el área del triángulo en términos de los lados, y recordamos entonces la fórmula de Herón de Alejandría: el área A de un triángulo puede escribirse como

$$A = \sqrt{s(s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c)},$$

donde s es el semiperímetro, $s = p/2$, que es también constante para los triángulos considerados.

Maximizar A es lo mismo que maximizar A^2 (pues $A > 0$), y a su vez maximizar $s(s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c)$ es lo mismo que maximizar $(s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c)$, ya que $s > 0$ es constante en nuestro caso. Entonces queremos maximizar el producto de los tres números $(s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c)$.

Podríamos usar ahora la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica para los números $s \leftrightarrow a$, $s \leftrightarrow b$ y $s \leftrightarrow c$, si supiéramos que todos ellos son positivos.

Sabemos que por ser un triángulo, la desigualdad triangular (valga la redundancia) dice que, por ejemplo, $a < b + c$. Sumando a a ambos miembros y dividiendo por 2 obtenemos $a < (a + b + c)/2 = s$, por lo que $s \leftrightarrow a > 0$, como queríamos. El mismo razonamiento (permutando adecuadamente a , b y c) sirve para ver que los números $s \leftrightarrow b$ y $s \leftrightarrow c$ son también positivos.

Entonces podemos aplicar la desigualdad entre las medias. La media aritmética es

$$m = \frac{(s \leftrightarrow a) + (s \leftrightarrow b) + (s \leftrightarrow c)}{3} = \frac{3s \leftrightarrow 2s}{3} = \frac{s}{3},$$

y como $m \geq g$, debe ser $m^3 \geq g^3$, es decir

$$m^3 = \left(\frac{s}{3}\right)^3 \geq g^3 = (s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c), \quad (1)$$

donde vale la igualdad si y sólo si $s \leftrightarrow a = s \leftrightarrow b = s \leftrightarrow c$, es decir si y sólo si $a = b = c$, o sea si y sólo si el triángulo es equilátero.

Multiplicando la desigualdad (1) por s obtenemos $s^4/3^3 \leq s(s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c) = A^2$, por lo que (siendo todos los números que aparecen positivos), $A \leq s^2/(3\sqrt{3})$, con igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero. En otras palabras, todas las áreas son *menores* que el miembro derecho (que es el mismo para todos los triángulos considerados) excepto para el caso del equilátero para el que vale la igualdad.

☞ **Problema 10:** Demostrar la fórmula de Herón. ☞

☞ **Problema 11:** Entre todos los (cuadriláteros) rectángulos de área dada, el cuadrado es el que tiene menor perímetro. ☞

☞ **Problema 12:** Extender la fórmula de Herón para el caso de un cuadrilátero de lados a , b , c y d , obteniendo que el área A satisface

$$A^2 = (s \leftrightarrow a)(s \leftrightarrow b)(s \leftrightarrow c)(s \leftrightarrow d) \leftrightarrow a b c d \frac{1 + \cos(\theta + \lambda)}{2},$$

donde θ y λ son dos ángulos internos opuestos (cualesquiera puesto que la suma de los ángulos interiores en un cuadrilátero es 360°), y s es el semiperímetro. *Sugerencia:* La trigonometría puede simplificar la vida. ☞

☞ **Problema 13:** Entre todos los cuadriláteros de área dada, el cuadrado es el de menor perímetro. ☞

Los siguientes problemas están tomados de I. NIVEN, *Maxima and Minima without Calculus* (Mathematical Association of America, 1981), pág. 54:

☞ **Problema 14:** Consideremos el cuadrilátero Q_1 que tiene área máxima entre los que tienen lados de longitudes 8, 9, 12, 19 (en ese orden) y el cuadrilátero Q_2 que tiene área máxima entre los que tienen lados de longitudes 8, 9, 19 y 12 (en ese orden).

a) Calcular las áreas de Q_1 y Q_2 (es la misma).

b) Tanto Q_1 como Q_2 pueden inscribirse (respectivamente) en una circunferencia, ¿cuál de éstas tiene mayor radio? ☞

☞ **Problema 15:** Entre los cuadriláteros con perímetro y la longitud de un lado especificados, ¿cuál tiene mayor área? Construirlo para el caso perímetro 17cm y "lado fijo" 5cm. ☞

☞ **Problema 16:** Encontrar la mayor de las áreas de los cuadriláteros que tienen lados de longitudes 1, 4, 7 y 8. ☞

☞ **Problema 17:** Un granjero tiene 200 metros de alambrado para cercar una región rectangular a lo largo de la costa de un río (costa que podemos suponer recta), poniendo el alambrado sobre los tres lados del rectángulo que no están sobre la costa. ¿Cuáles serán las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede cercar? ¿Y si en vez de un rectángulo fuera un cuadrilátero cualquiera (con uno de los lados sobre la costa y usando el alambrado sobre los tres restantes)? ☞

Demostración de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica

Hay muchas demostraciones de esta desigualdad. Tal vez la más conocida es la dada por Cauchy (en 1821). También es posible que esta desigualdad compita con el teorema de Pitágoras en cuanto a cantidad de distintas demostraciones. Por ejemplo hay una buena variedad en el libro de E. F. BECKENBACH y R. BELLMAN, *An Introduction to Inequalities* (Mathematical Association of America, 1961, cap. 1). La que vamos a dar esta en los libros de N. D. KAZARINOFF, *Geometric Inequalities* (Mathematical Association of America, 1975, cap. 1) y I. NIVEN, *Maxima and Minima without Calculus* (Mathematical Association of America, 1981, cap. 2).

☞ **Teorema 18:** Sean n números positivos a_1, a_2, \dots, a_n , y sean m y g las medias aritmética y geométrica respectivamente,

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \text{y} \quad g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Entonces $m \geq g$, con igualdad si y sólo si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. ☞

Demostración: Si $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, está claro que $m = g$, por lo que podemos suponer que no todos los a 's son iguales y demostraremos que entonces $m > g$ (estrictamente).

Si el promedio aritmético de los a 's es m , y no todos los a 's son iguales, habrá uno menor, llamémosle u , y uno mayor, llamémosle v . Necesariamente debe ser $u < v$ pues no todos los a 's son iguales.

Pero también $m < v$, puesto que si por ejemplo $v \leq m$, entonces como $u < v$,

$$nm = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq u + (n-1)v < v + (n-1)v < nm$$

y esto no puede ser. Análogamente, vemos que $u < m$.

Sustituimos ahora los números u y v por otros números u' y v' de modo de no cambiar la media aritmética: para esto ponemos $u' = m$, $v' = u + v - m$. Obviamente, la suma (y por lo tanto el promedio aritmético) después de la sustitución no ha variado. Además u' y v' son números positivos pues $m > 0$ y $v - m > 0$ (ya que $v > m$). Más aún, $u' - u = m - u > 0$ y $v' - v = u - m < 0$, por lo que

$$\begin{aligned} 0 &< (u' - u)(v' - v) = u'v' + uv - u'u - v'v \\ &= u'v' - u(v' + u) + uv = u'v' - u(u + v - m + m) = u'v' - uv. \end{aligned}$$

Entonces $uv < u'v'$, y el producto de los a 's después de cambiar u y v por u' y v' ha aumentado estrictamente.

Pero ahora al menos uno de los nuevos números es m . Después de $n-1$ pasos de este estilo, todos los números serán iguales a m y hemos ido aumentando (estrictamente) el producto y por lo tanto la media geométrica cada vez. Como al final tenemos $g = m$ pues todos los números son iguales (a m), inicialmente debe ser $g < m$. □

Ilustremos el "algoritmo" de la demostración con un ejemplo. Consideremos los números 3, 5, 7, 9 y 16. La media aritmética es $40/5 = 8$. Los cambios sucesivos en el producto son:

$$3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16 < 8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 < 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 8 < 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8.$$

Punto (y) aparte

Dentro de la página de la OMA en internet (<http://www.oma.org.ar>), habrá un espacio reservado para estas notas. En ellas aparecerán las notas anteriores (hasta el momento sobre la parábola, torneos y ésta), y algunas soluciones propuestas. Sugerencias, quejas y afines pueden enviarse mediante correo electrónico a "invydoc@oma.org.ar".

¡Esperamos comentarios! Hasta la próxima.