Año V - Número 7 - Noviembre 2021

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

7 SÉPTIMA NOTA

Ángulos diedros y ángulos triedros. Producto escalar, distancias y perpendicularidad. Fórmula de Tartaglia y fórmula de Lagrange. Desigualdad de Hadamard. Producto vectorial. Ecuaciones vectoriales y paramétricas de rectas y planos. Forma vectorial de simetrías y homotecias

Problema 1 Calcular la distancia entre los puntos A y B del espacio, dados por sus coordenadas:

$$A = (1, 2, 1),\ B = (1, 0, -1).$$

Solución

$$\sqrt{(1-1)^2+(2-0)^2+(1-(-1))^2} = \sqrt{0+4+4} = \sqrt{8}$$

Problema 2 Hallar la norma o longitud del vector de coordenadas (3, 4, –2).

Solución

$$\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

Problema 3 Calcular el producto escalar $\langle u,v\rangle$ y el vectorial $u \times v$ en los casos siguientes:

i) $u = (1, 0, 1)$, $v = (1, 2, 3)$

ii) $u = (1, -1, 2)$, $v = (-2, 2, -4)$

Solución

i) El producto escalar es:

$$1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 4$$

El producto vectorial es:

$$(0 \cdot 3 - 2 \cdot 1, 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1, 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) = (-2, -2, 2)$$

ii) El producto escalar es:

$$1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = -12$$

El producto vectorial es:

$$((-1) \cdot (-4) - 2 \cdot 2{,}2 \cdot (-2) - (-4) \cdot 1{,}1 \cdot 2 - (-2) \cdot (-1)) = (0, 0, 0)$$

Notar que en este caso es $(-2, 2, -4) = (-2)\,(1, -1, 2)$.

Problema 4 Hallar el área del triángulo con vértices (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).

Solución

El área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}\left\|\left((1,0,1)-(1,1,0)\right)\times\left((0,1,1)-(1,1,0)\right)\right\| = \frac{1}{2}\left\|(0,-1,1)\times(-1,0,1)\right\|$$

$$= \frac{1}{2}\left\|(-1,-1,-1)\right\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Problema 5 ¿Qué clase de triángulo es el de vértices (a, b, c), (b, c, a), (c, a, b)? (a, b y c no todos iguales).

Solución

Las longitudes de los lados están dadas por:

$$\sqrt{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}$$

$$\sqrt{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2}$$

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-a)^2+(c-b)^2}$$

es decir, es un triángulo equilátero.

Problema 6 ¿Qué clase de cuadrilátero es el de vértices (a, b), $(-a, b)$, $(-a, -b)$, $(a, -b)$?

Solución

Teniendo en cuenta que las diferencias de lados opuestos son:

$$(a, b) - (-a, b) = (2a, 0)$$

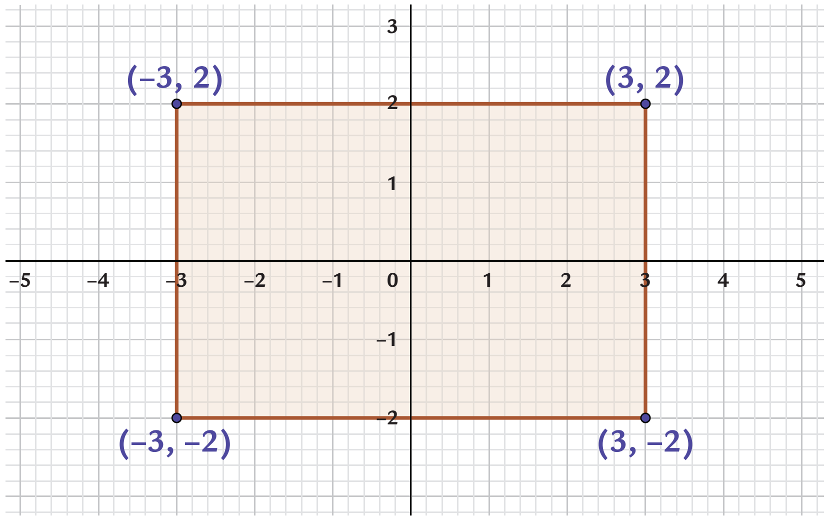
$$(-a, -b) - (a, -b) = (-2a, 0)$$

el cuadrilátero es un paralelogramo. Ahora, calculando las longitudes de las diagonales:

$$\sqrt{\left(a-(-a)\right)^2+\left(b-(-b)\right)^2} = \sqrt{4a^2+4b^2} = 2\sqrt{a^2+b^2}$$

se tiene que el cuadrilátero es un rectángulo.

La figura a continuación ilustra un caso en que $a = 3$ y $b = 2$.



Problema 7 ¿Qué clase de cuadrilátero es el de vértices (a, b), $(-b, a)$, $(-a, -b)$, $(b, -a)$? (a distinto de b).

Solución

Las longitudes de los lados son:

$$\sqrt{(a-(-b))^2+(b-a)^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2-2ab+a^2}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\sqrt{(-b-(-a))^2+(a-(-b))^2}=\sqrt{b^2+2ab+a^2+b^2+2ab+a^2}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\sqrt{(-a-b)^2+(-b-(-a))^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2+b^2-2ab+a^2}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

$$\sqrt{(b-a)^2+(-a-b)^2}=\sqrt{a^2-2ab+b^2+b^2+2ab+a^2}=\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$$

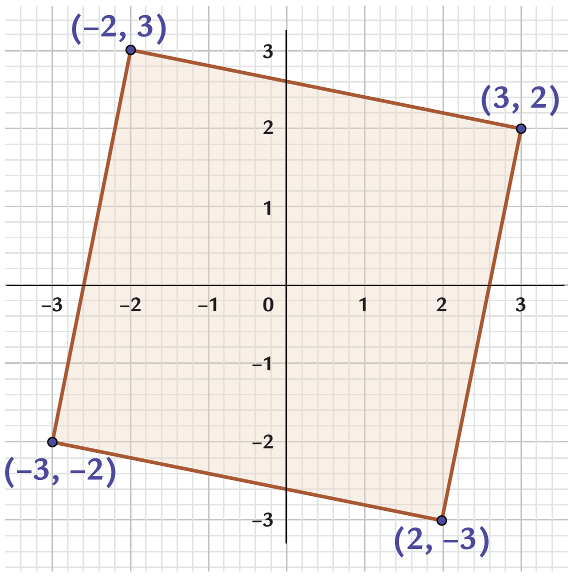
es decir, es un rombo. Las diagonales miden:

$$\sqrt{(a-(-a))^2+(b-(-b))^2}=\sqrt{4a^2+4b^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\sqrt{(-b-b)^2+(a-(-a))^2}=\sqrt{4b^2+4a^2}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

Como estas son de igual longitud, el cuadrilátero es un cuadrado.

La figura a continuación ilustra un caso en que $a = 3$ y $b = 2$.



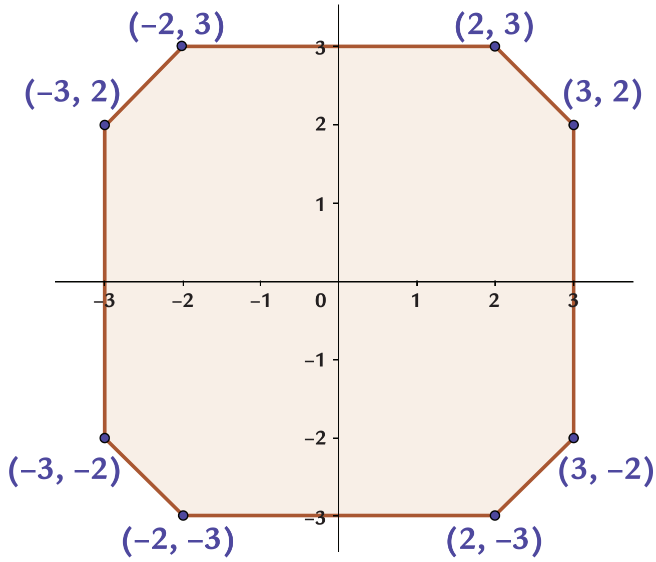
NOTAS DE GEOMETRÍA 7

Problema 8 Encontrar números a y b tales que los puntos $(\pm a, \pm b)$, $(\pm b, \pm a)$ del plano coordenado sean los vértices de un octógono regular.

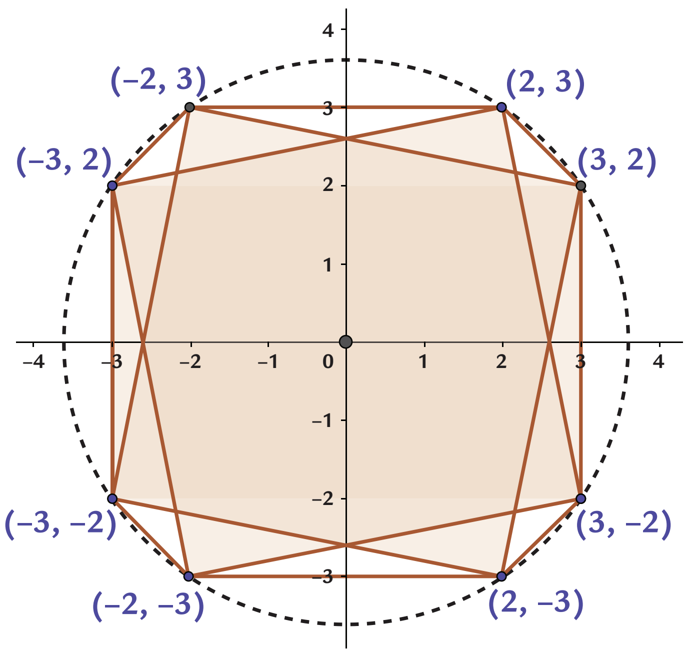
Solución

Un polígono es regular si tiene todos sus lados de igual longitud y todos sus ángulos interiores de igual medida.

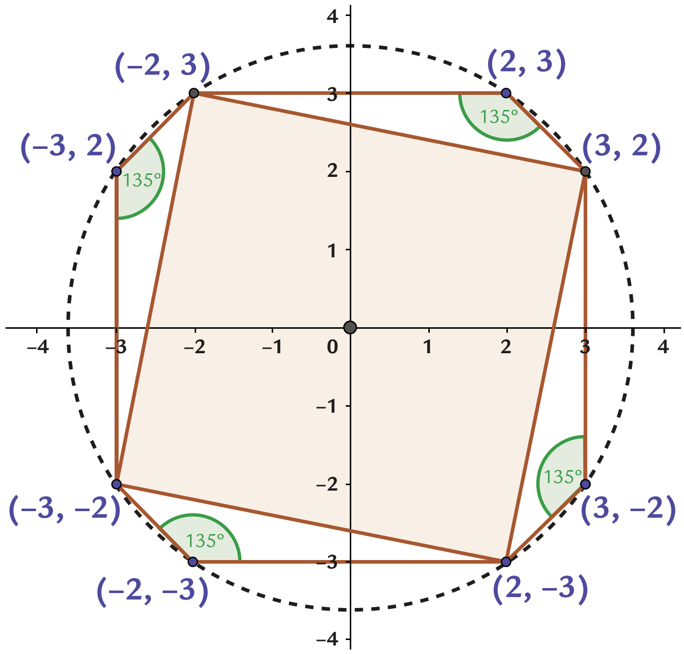
Si vemos el ejemplo del polígono que se forma con $a = 3$ y $b = 2$:



observamos que todos los ángulos son iguales, aunque los lados sean distintos. Esto ocurrirá siempre, independientemente de cuáles sean a y b. Para ver esto, notemos que los ocho puntos tienen la misma longitud $\sqrt{a^2+b^2}$, es decir que están en la circunferencia con centro en (0, 0) y radio $\sqrt{a^2+b^2}$. Por otra parte, por el Problema 5, los vértices se pueden agrupar para formar dos cuadrados de las mismas dimensiones, como ilustramos con el ejemplo a continuación:



en consecuencia, los ángulos son iguales por estar asociados a cuerdas de igual longitud, tal como en el ejemplo.



Buscamos valores para *a* y *b* de modo que todos los lados sean de igual longitud. El lado de vértices (a, b), (b, a) debe medir lo mismo que el lado de vértices (b, a), $(-b, a)$, es decir:

$$\sqrt{(a-b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{(b-(-b))^2}$$

o bien,

$$\sqrt{2(a-b)^2}=\sqrt{4b^2}$$

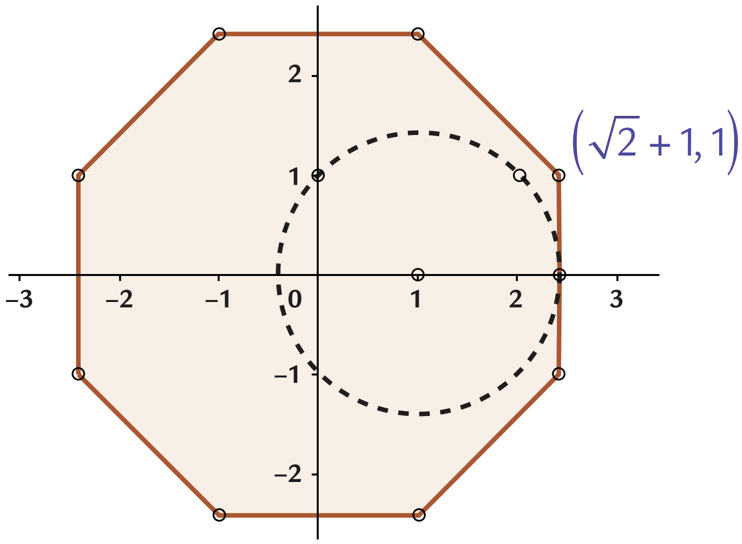
Si *a* es mayor que *b*, la identidad precedente equivale a:

$$\sqrt{2}(a-b)=2b$$

Operando, obtenemos:

$$\frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{2}}+1=\sqrt{2}+1$$

De modo que una solución puede ser $a=\sqrt{2}+1$ y $b=1$. Usando esos valores, construimos el octógono:

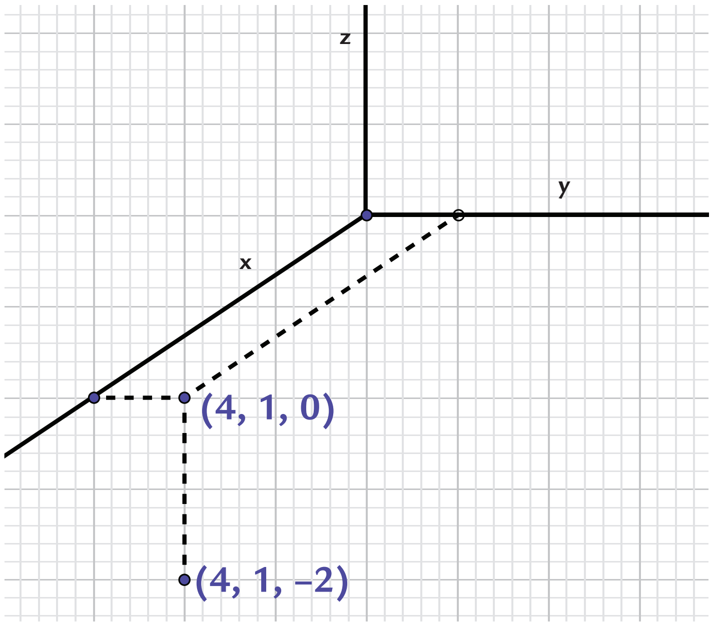


Nota: Se puede asumir que $a \geq b \geq 0$, pero si $a = b$ o $b = 0$ no se formará un octógono dado que solo se obtienen cuatro puntos. Si $a > b > 0$ el octógono obtenido tiene los lados no contiguos de igual longitud, es decir, si se enumeraran los lados, los lados impares serían de igual longitud y lo mismo valdría para los lados pares. Por eso, para obtener un polígono regular, la condición de que dos lados contiguos sean iguales es suficiente.

Problema 9 Hallar las distancias desde el punto (4, 1, –2) a los planos coordenados y a los ejes coordenados.

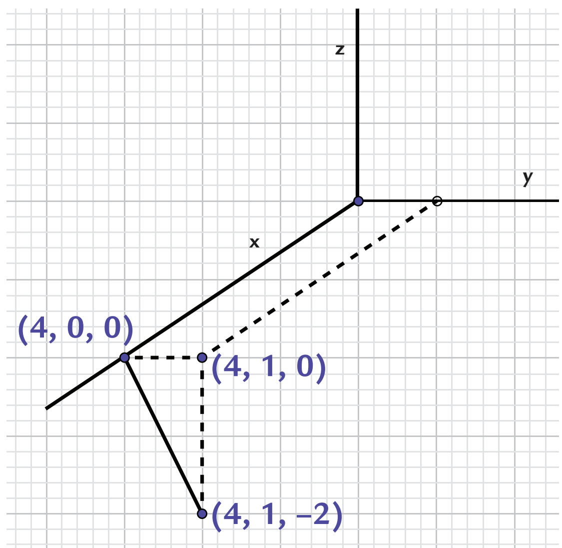
Solución

La distancia al plano *xy* será la longitud del segmento perpendicular al plano *xy* que tiene por vértices a (4, 1, –2) y a un punto del plano *xy*.



Como la diferencia (4, 1, 0) – (4, 1, –2) = (0, 0, 2), el segmento de vértices (4, 1, 0) y (4, 1, –2) es paralelo al eje *z* y así, perpendicular al plano *xy*. La distancia desde (4, 1, –2) al plano *xy* es la longitud de dicho segmento, o sea, 2. En forma análoga, la distancia al plano *yz* será 4 y al plano *xz* será 1.

Ahora, la distancia al eje *x* será la longitud del segmento perpendicular al eje *x* que tiene por vértices a (4, 1, –2) y a un punto del eje *x*.



Los segmentos de extremos (4, 1, 0), (4, 1, –2) y (4, 0, 0), (4, 1, 0) son respectivamente paralelos al eje *z* y al eje *y*, es decir, ambos son perpendiculares al eje *x*. De este modo resulta que el segmento de extremos (4, 1, –2), (4, 0, 0) es perpendicular al eje *x* y, en consecuencia, la distancia de (4, 1, –2) al eje *x* es:

$$\sqrt{(4-4)^2+(1-0)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{5}$$

Del mismo modo podemos establecer que la distancia al eje *y* es $\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}$ y la distancia al eje *z* es $\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$.

Pregunta: ¿Puede dar una expresión para las distancias del punto (a, b, c) a los planos coordenados y a los ejes?

Problema 10 Hallar la ecuación de la circunferencia con centro en (1, 3) y radio 2.

Solución

Esta circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano que se encuentran a distancia 2 del punto (1, 3), dicho de otra manera, son los puntos (x, y) del plano, tales que:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=2$$

lo que equivale a:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$$

Problema 11 Hallar la ecuación de la esfera con centro (1, 1, 1) y radio 3.

Solución

En este caso se trata del lugar geométrico de los puntos del espacio que se encuentran a distancia 3 del punto (1, 1, 1), o bien los puntos (x, y, z) del espacio, tales que:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2}=3$$

o, de manera equivalente:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3^2$$

Problema 12 La recta *m* pasa por los puntos *A* y *B*. Hallar una recta perpendicular a *m*.

$$A=(-1,3),\ B=(2,1)$$

$$A=(1,0,2),\ B=(1,1,3)$$

Solución

i) El segmento (–1, 3) – (2, 1) = (–3, 2) es paralelo a *m*. El vector (2, 3) es perpendicular al vector (–3, 2), luego la recta que pasa por (0, 0) y (2, 3) es perpendicular a *m*.

ii) El segmento (1, 0, 2) – (1, 1, 3) = (0, –1, –1) es paralelo a *m*. El vector (1, 0, 0) es perpendicular al vector (0, –1, –1), luego la recta que pasa por (0, 0, 0) y (1, 0, 0) es perpendicular a *m*.

Problema 13 La recta m pasa por AB y la recta n pasa por CD. ¿Son paralelas? ¿Son perpendiculares?

$$A = (1, 0, 1),\ B = (0, 1, 1),\ C = (4, -2, 2),\ D = (2, -4, 2).$$

$$A = (0, 1, 1),\ B = (1, 0, -1),\ C = (1, 2, 1),\ D = (3, 0, -3).$$

$$A = (1, 2, 1),\ B = (2, 1, 1),\ C = (2, 1, 1),\ D = (1, 1, 2).$$

Solución

i) La dirección de la recta que pasa por A y B la da el vector:

$$A - B = (1, 0, 1) - (0, 1, 1) = (1, -1, 0)$$

La dirección de la recta que pasa por C y D la da el vector:

$$C - D = (4, -2, 2) - (2, -4, 2) = (2, 2, 0)$$

Como los vectores $(1, -1, 0)$ y $(2, 2, 0)$ no son uno múltiplo del otro, las rectas no son paralelas. Por otra parte, el producto escalar:

$$\langle (1, -1, 0), (2, 2, 0) \rangle = 1 \times 2 + (-1) \times 2 + 0 \times 0 = 0$$

los vectores $(1, -1, 0)$ y $(2, 2, 0)$ son perpendiculares, luego las rectas son perpendiculares.

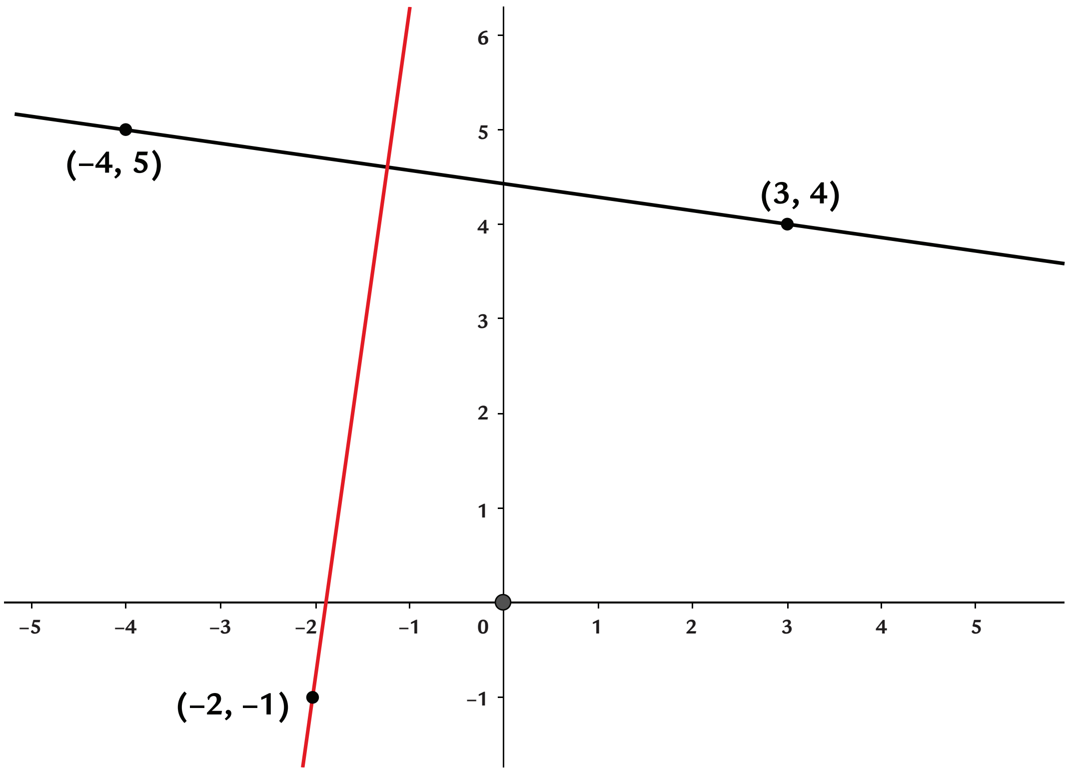
ii) En este caso $A - B = (-1, 1, 2)$ y $C - D = (-2, 2, 4)$; como $(-2, 2, 4) = 2 \times (-1, 1, 2)$, las rectas son paralelas.

iii) En este caso $A - B = (-1, 1, 0)$ y $C - D = (1, 0, -1)$, las rectas no son paralelas ni perpendiculares.

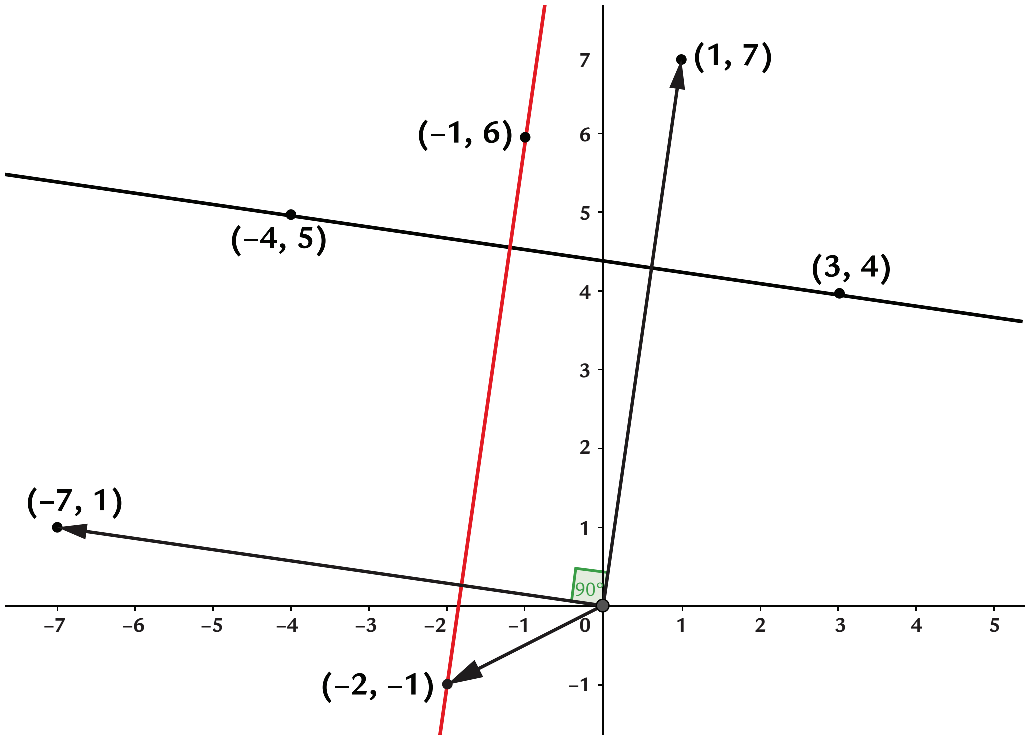
Problema 14 Hallar la ecuación de la recta perpendicular a AB que pasa por P, siendo $A = (3, 4)$, $B = (-4, 5)$ y $P = (-2, -1)$.

Solución

La figura muestra la recta perpendicular a AB que pasa por P en color rojo.



La dirección de la recta AB la da el vector $A - B = (-7, 1)$ que es perpendicular al vector $(1, 7)$.



Los puntos $(0, 0)$, $(-2, -1)$, $(1, 7)$ y $(-1, 6) = (-2, -1) + (1, 7)$ son los vértices de un paralelogramo, es decir, la recta que pasa por $(-2, -1)$ y $(-1, 6)$ es paralela a la recta que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 7)$, luego es perpendicular a la recta que pasa por AB. La ecuación de la recta buscada puede obtenerse como:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Es decir:

$$-7x + y - 13 = 0$$

Problema 15 Hallar ecuaciones implícitas para la recta perpendicular al plano ABC que pasa por el punto P, siendo $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (0, 1, 1)$ y $P = (1, 2, 3)$.

Solución

El plano ABC es paralelo al plano π que pasa por $A - A$, $B - A$ y $C - A$, es decir, por los puntos $(0, 0, 0)$, $(0, -1, 1)$ y $(-1, 0, 1)$. Las ecuaciones:

$$\begin{cases} 0x - y + z = a \\ -x + 0y + z = b \end{cases}$$

son ecuaciones implícitas de una recta perpendicular al plano π. Podemos elegir los valores de a y b para que sean ecuaciones implícitas de la recta perpendicular al plano ABC que pasa por P. Para que la recta pase por P, deben cumplirse las igualdades:

$$\begin{cases} 0 \times 1 - 2 + 3 = a \\ -1 + 0 \times 2 + 3 = b \end{cases}$$

es decir, $a = 1$ y $b = 2$. De este modo, tenemos las ecuaciones implícitas buscadas:

$$\begin{cases} -y + z = 1 \\ -x + z = 2 \end{cases}$$

Problema 16 Hallar la distancia desde el punto (4, 1, –2) al plano:

i) De la ecuación $x = y$.

ii) Que pasa por los puntos (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1).

Solución

i) Un vector perpendicular al plano es (1, –1, 0), la proyección de (4, 1, –2) sobre la recta generada por este vector es:

$$\frac{\langle(4,1,-2),(1,-1,0)\rangle}{2}(1,-1,0)=\frac{3}{2}(1,-1,0)$$

La distancia buscada es igual a la longitud de este último vector, es decir $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

ii) La distancia desde el punto (4, 1, –2) al plano que pasa por los puntos (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1) es la misma que desde el punto (4, 1, –2) – (1, 1, 0) = (3, 0, –2) al plano que pasa por los puntos:

(1, 1, 0) – (1, 1, 0) = (0, 0, 0), (1, 0, 1) – (1, 1, 0) = (0, –1, 1) y (0, 1, 1) – (1, 1, 0) = (–1, 0, 1).

Un vector perpendicular al plano que pasa por (0, 0, 0), (0, –1, 1) y (–1, 0, 1) es el producto vectorial:

$$(0,-1,1)\times(-1,0,1)=(-1,-1,-1)$$

La proyección de (3, 0, –2) sobre la recta generada por este vector es:

$$\frac{\langle(3,0,-2),(-1,-1,-1)\rangle}{3}(-1,-1,-1)=\frac{1}{3}(1,1,1)$$

La distancia es la longitud de este vector, es decir $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Problema 17 Hallar la distancia entre los planos de ecuaciones $x+y-2z=1$ y $3x+3y-6z=15$.

Solución

La ecuación $3x+3y-6z=15$ equivale a la ecuación $x+y-2z=5$. Ahora, es evidente que los planos son paralelos, de modo que la distancia puede calcularse como la distancia de un punto en uno de los planos al otro plano. Por ejemplo, el punto (2, 3, 0) está en el segundo plano y la distancia desde este punto al primer plano está dada por:

$$\frac{|1\cdot2+1\cdot3-2\cdot0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Observación

La distancia entre los planos de la ecuación $ax+by+cz=d$ y $ax+by+cz=e$ está dada por:

$$\frac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

¿Qué ocurre con las distancias entre una recta en el plano de la ecuación $ax+by=c$ y una recta en el plano de la ecuación $ax+by=d$?

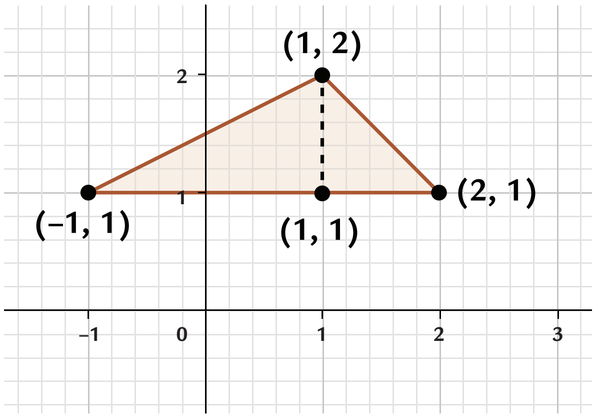
Problema 18 Hallar las coordenadas del pie de una altura del triángulo con vértices:

i) (1, 2), (–1, 1), (2, 1).

ii) (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1).

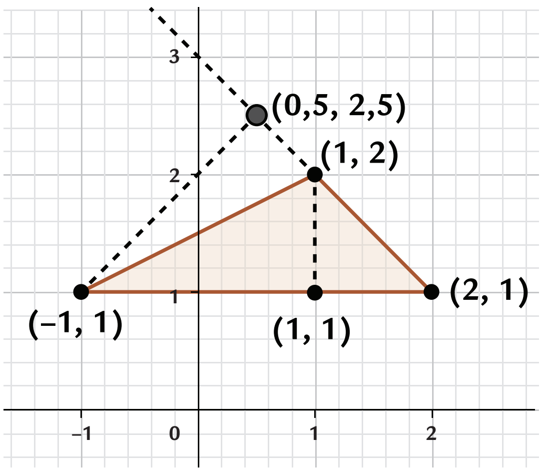
Solución

Si graficamos el triángulo usando el sistema de ejes cartesianos y la cuadrícula, es claro que un pie de altura tiene coordenadas (1, 1).



¿Cómo encontrar un pie de altura que no sea evidente? Por ejemplo, el pie de la altura que parte desde (–1, 1). La proyección del punto (–1, 1) sobre la recta *m* que pasa por (2, 1) y (1, 2) es precisamente el pie de dicha altura. Podemos calcular esta proyección como:

$$(1,2)+\frac{\langle(-1,1)-(1,2),(2,1)-(1,2)\rangle}{\langle(2,1)-(1,2),(2,1)-(1,2)\rangle}((2,1)-(1,2))=(1,2)+\frac{-1}{2}(1,-1)=\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$$



Problema 19 Hallar un vector perpendicular al plano:

i) $x + y + z = 1$

ii) que pasa por (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1).

Solución

i) El vector (1, 1, 1) es perpendicular al plano.

ii) El producto vectorial entre (1, 0, 1) – (1, 1, 0) y (0, 1, 1) – (1, 1, 0) es perpendicular al plano; este vector es (–1, – 1, –1).

Problema 20 Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos (1, 3), (–2, 1).

Solución

La mediatriz es el lugar geométrico de los puntos (x, y) del plano que equidistan de (1, 3) y (–2, 1), esto es:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x-(-2))^2+(y-1)^2}$$

O sea:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1$$

De donde:

$$6x + 4y = 5$$

es la ecuación de la mediatriz.

Problema 21 Hallar la ecuación del plano bisector del segmento de extremos (1, 1, 2), (–2, 0, 1).

Solución

En forma similar al Problema 20, la ecuación se desprende de la identidad:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2+(z-1)^2}$$

Operando, se obtiene:

$$6x + 2y + 2z = 1$$

Nota: También se puede resolver este problema usando la fórmula para la ecuación de la mediatriz dada en el apéndice de este mismo número de *Notas de Geometría*.

Problema 22 Hallar las coordenadas del circuncentro y ortocentro del triángulo con vértices:

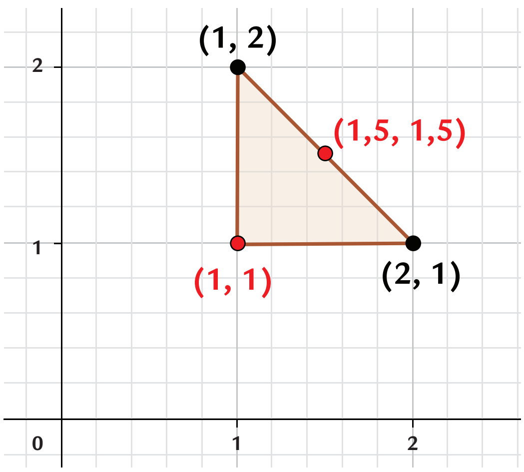
i) (1, 2), (1, 1), (2, 1).

ii) (2, 3), (6, 1), (–2, –5).

iii) (5, 6, 7), (6, 7 ,5), (7, 5, 6).

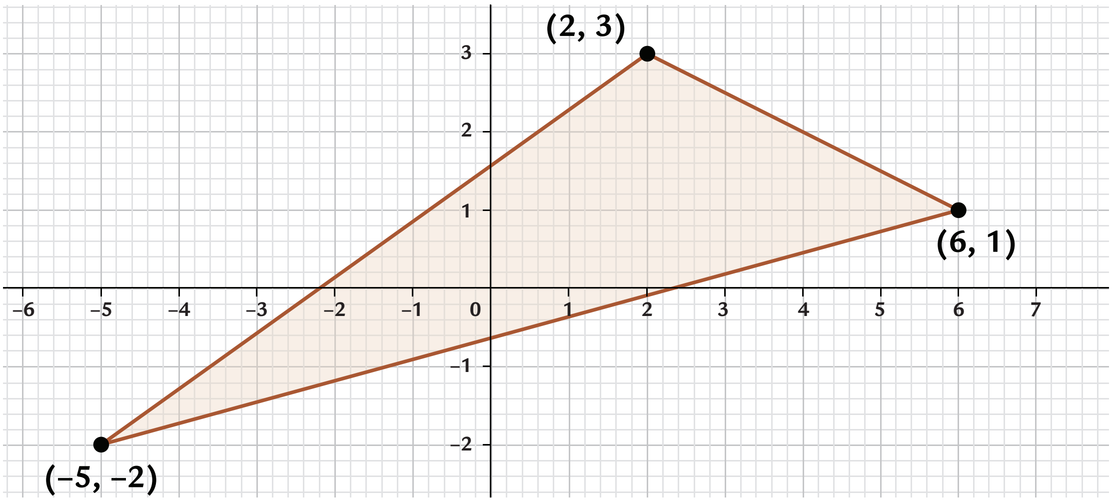
Solución

i) Según la gráfica en la siguiente figura:



se trata de un triángulo rectángulo, entonces el circuncentro es el punto medio de la hipotenusa de coordenadas (3/2, 3/2). El ortocentro es el vértice del ángulo recto de coordenadas (1, 1).

ii) Este caso puede resolverse operando con ecuaciones de las mediatrices.



La ecuación para la mediatriz de (6, 1), (2, 3) está dada por:

$$(6-2)x+(1-3)y=\frac{6^2+1^2-2^2-3^2}{2}$$

Simplificando, queda:

$$2x-y=6$$

Análogamente, la ecuación para la mediatriz de (2, 3), (−5, −2) está dada por:

$$7x+5y=-8$$

Las coordenadas del circuncentro están dadas por la solución del sistema:

$$\begin{cases} 2x-y=6 \\ 7x+5y=-8 \end{cases}$$

Usando la regla de Cramer, resulta:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}=-\frac{58}{17} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -8 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{22}{17}$$

Para hallar las coordenadas del ortocentro, usaremos la siguiente propiedad:

El ortocentro de un triángulo se puede obtener a partir de su circuncentro usando la homotecia con centro en el baricentro y razón $-\frac{1}{2}$.

El lector puede interesarse por investigar en torno de la propiedad enunciada.

El baricentro del triángulo está dado por:

$$\frac{(2,3)+(6,1)+(-5,-2)}{3}=\left(1,\frac{2}{3}\right)$$

Podemos calcular el ortocentro con la homotecia antes mencionada, es decir:

$$\left(1,\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(\left(-\frac{58}{17},\frac{22}{17}\right)-\left(1,\frac{2}{3}\right)\right)=\left(1,\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{75}{17},\frac{32}{51}\right)=$$

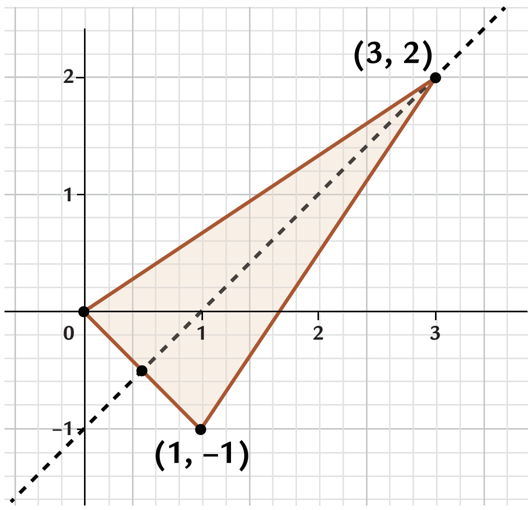
$$=\left(1,\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{75}{34},-\frac{32}{102}\right)=\left(\frac{109}{34},\frac{18}{51}\right)$$

iii) Resolver este caso puede ser complicado si no se observa que el triángulo es equilátero (véase el Problema 2 en este mismo número de *Notas de Geometría*). Entonces, el baricentro, el ortocentro y el circuncentro coinciden y sus coordenadas están dadas por el promedio de los vértices, es decir (6, 6, 6).

Problema 23 Hallar ecuaciones implícitas de las bisectrices del triángulo con vértices (3, 2), (0, 0), (–1, 1).

Solución

Por fortuna, el triángulo es isósceles:



de modo que una bisectriz está sobre la mediana que parte del vértice (3, 2), es decir, se trata de la recta que pasa por los puntos (3, 2) y $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. La ecuación para esta bisectriz puede ser:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante resulta:

$$\frac{5}{2}x - \frac{5}{2}y = \frac{5}{2}$$

o también:

$$x - y = 1$$

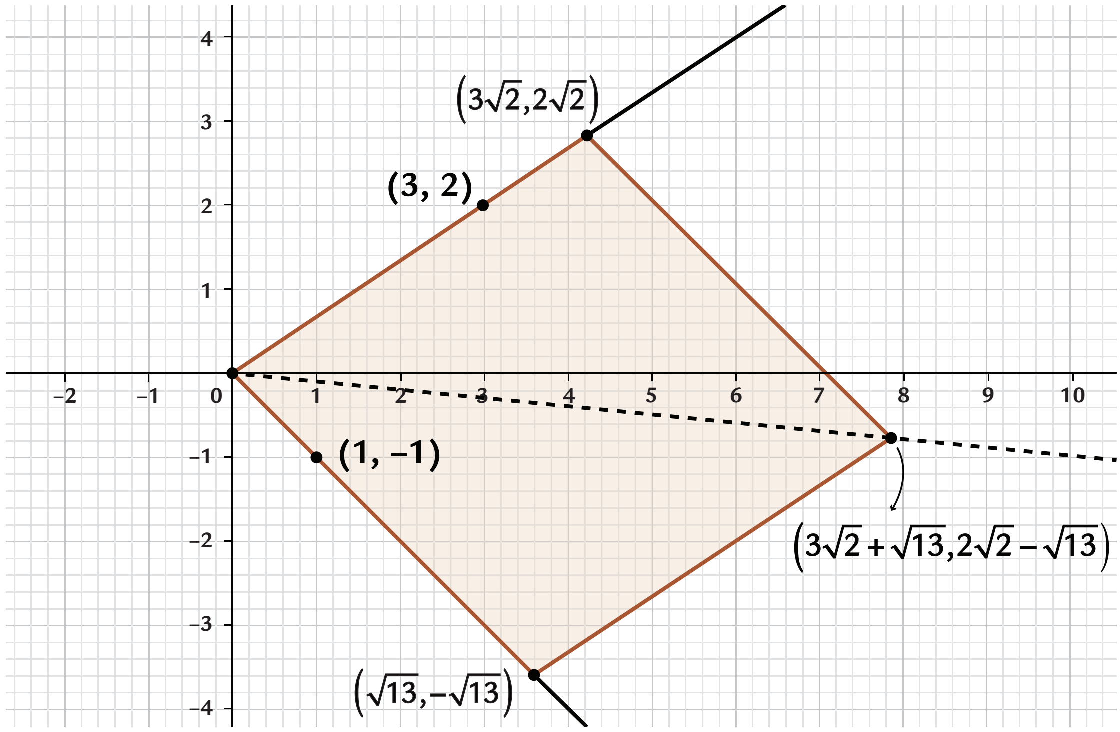
Para la bisectriz que pasa por el vértice (0, 0), observemos que el punto de coordenadas:

$$\sqrt{13}\times(1,-1)+\sqrt{2}\times(3,2)=\left(\sqrt{13}+3\sqrt{2},2\sqrt{2}-\sqrt{13}\right)$$

está en esta bisectriz, dado que los puntos:

$$(0,0),\left(\sqrt{13},-\sqrt{13}\right),\left(3\sqrt{3},2\sqrt{2}\right),\left(\sqrt{13}+3\sqrt{2},2\sqrt{2}-\sqrt{13}\right)$$

son los vértices de un rombo, pues $\left(\sqrt{13},-\sqrt{13}\right),\left(3\sqrt{2},2\sqrt{2}\right)$ tienen igual longitud.



La ecuación para la bisectriz puede obtenerse como:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3\sqrt{2}+\sqrt{13} & 2\sqrt{2}-\sqrt{13} & 1 \end{bmatrix}=0$$

Operando, queda:

$$\left(\sqrt{13}-2\sqrt{2}\right)x+\left(3\sqrt{2}+\sqrt{13}\right)y=0$$

Para la ecuación de la bisectriz restante, calculamos el incentro dado por las ecuaciones:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ \left(\sqrt{13}-2\sqrt{2}\right)x+\left(3\sqrt{2}+\sqrt{13}\right)y=0 \end{cases}$$

La solución es:

$$x=\frac{\sqrt{26}+6}{10}\ y=\frac{\sqrt{26}-4}{10}$$

La ecuación para la bisectriz que pasa por el vértice (1, −1) puede obtenerse de la igualdad:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{\sqrt{26}+6}{10} & \frac{\sqrt{26}-4}{10} & 1 \end{bmatrix}=0$$

De manera equivalente:

$$-\frac{\sqrt{26}+6}{10}x+\frac{\sqrt{26}-4}{10}y=\frac{\sqrt{26}+1}{5}$$

Problema 24 Dadas las coordenadas de dos de los puntos asociados a un triángulo: circuncentro, ortocentro y baricentro, hallar las coordenadas del tercer punto.

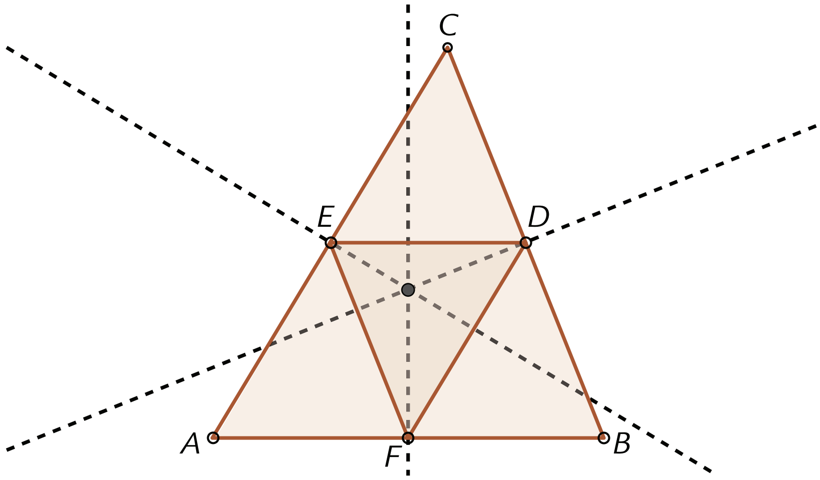
Solución

Si pensamos estos tres puntos como vectores denotando con G al baricentro, con O al ortocentro y con R al circuncentro, veremos que se da la igualdad vectorial:

$$3G = 2R + O$$

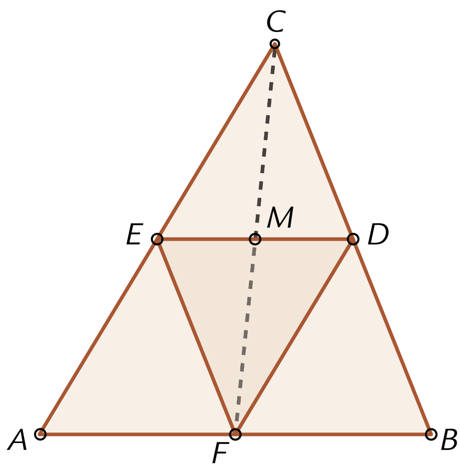
Esta identidad permite hallar las coordenadas de un punto a partir de las coordenadas de los otros dos.

En primer lugar, observemos que el circuncentro de un triángulo ABC coincide con el ortocentro del triángulo cuyos vértices DEF son los puntos medios de los lados de ABC.

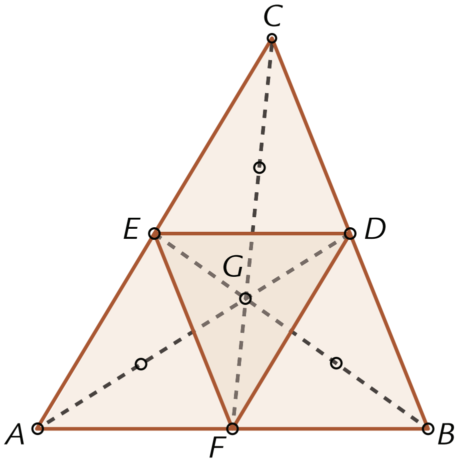


Teniendo en cuenta que los lados de DEF son las bases medias de ABC, se ve que las alturas de DEF están sobre las mediatrices de ABC; en consecuencia, el circuncentro de ABC coincide con el ortocentro de DEF.

En segundo lugar, veamos que ABC y DEF son homotéticos, es decir, hay una homotecia que transforma uno en el otro. Para ver esto, notemos que las medianas de DEF están sobre las medianas de ABC. En la figura, la mediana CF de ABC es una diagonal del paralelogramo $CEFD$, entonces corta a la diagonal ED de este paralelogramo en su punto medio M. Esto muestra que FM es una mediana de EFD.

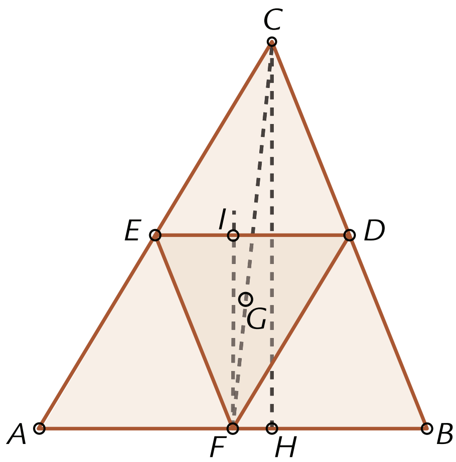


Lo mismo ocurre con las demás medianas. En consecuencia, ABC y DEF comparten el baricentro G.



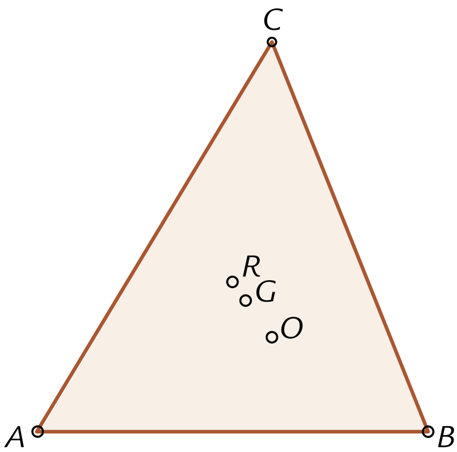
El baricentro G divide a las medianas de ABC en la relación 2:1, de modo que una homotecia con centro en G y razón -2 transforma los vértices D, E y F en A, B y C, respectivamente.

Esta homotecia transforma las alturas de EDF en las alturas de ABC. La figura a continuación muestra la altura FI, que debe transformarse en un segmento paralelo a FI con un vértice en C, el otro vértice alineado con IG y con el doble de la longitud de FI.



Es claro que el único segmento que cumple estas condiciones es la altura CH de ABC. Por lo tanto, la homotecia considerada transforma el ortocentro de EDF en el ortocentro de ABC, o bien, transforma el circuncentro de ABC en el ortocentro de ABC.

La figura ilustra la posición de R, G y O alineados, con G entre R y O y la distancia de G a O igual al doble de la distancia de G a R.



Teniendo en cuenta la expresión vectorial de la homotecia, podemos escribir:

$$O = G + (-2) \times (R - G) = 3G - 2R$$

Es decir:

$$3G = 2R + O$$

Problema 25 Hallar las áreas de los triángulos: (0, 0, 0), (1, 2, 3), (1, 1, 1) y los triángulos obtenidos al proyectar este triángulo sobre los planos coordenados.

Solución

El área del triángulo se puede obtener como $\frac{1}{2}$ de la longitud del producto vectorial:

$$(1, 2, 3) \times (1, 1, 1) = (-1, 2, -1)$$

El área del triángulo es $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

La proyección sobre el plano xy tiene vértices (0, 0, 0), (1, 2, 0), (1, 1, 0), triángulo de área $\frac{1}{2}$.

La proyección sobre el plano xz tiene vértices (0, 0, 0), (1, 0, 3), (1, 0, 1), triángulo de área 1.

La proyección sobre el plano yz tiene vértices (0, 0, 0), (0, 2, 3), (0, 1, 1), triángulo de área $\frac{1}{2}$.

Observación

El área del triángulo es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las áreas de las proyecciones.

¿Será esto una casualidad?

Problema 26 Las proyecciones de un triángulo sobre los planos coordenados tienen p cm², q cm² y r cm². Hallar el área del triángulo.

Solución

Consideremos primero el caso en que uno de los vértices del triángulo es (0, 0, 0). Indiquemos con (a, b, c) y (d, e, f) los vértices restantes. Las proyecciones sobre los planos coordenados son:

Sobre xy: $(0, 0, 0), (a, b, 0), (d, e, 0)$

Sobre yz: $(0, 0, 0), (0, b, c), (0, e, f)$

Sobre xz: $(0, 0, 0), (a, 0, c), (d, 0, f)$

y las respectivas áreas pueden calcularse como la mitad de las longitudes de los productos vectoriales:

$$(a, b, 0) \quad (d, e, 0) = (0, 0, ae - db)$$

$$(0, b, c) \times (0, e, f) = (bf - ce, 0, 0)$$

$$(a, 0, c) \times (d, 0, \mathrm{f}) = (0, dc - af, 0)$$

Entonces, las áreas son:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(ae-db)^2} = \frac{1}{2}|ae-bd| = p \frac{1}{2}\sqrt{(bf-ce)^2} = \frac{1}{2}|bf-ce| = q \frac{1}{2}\sqrt{(dc-af)^2} = \frac{1}{2}|dc-af| = r$$

Por otra parte, el área del triángulo es la mitad de la norma del producto vectorial:

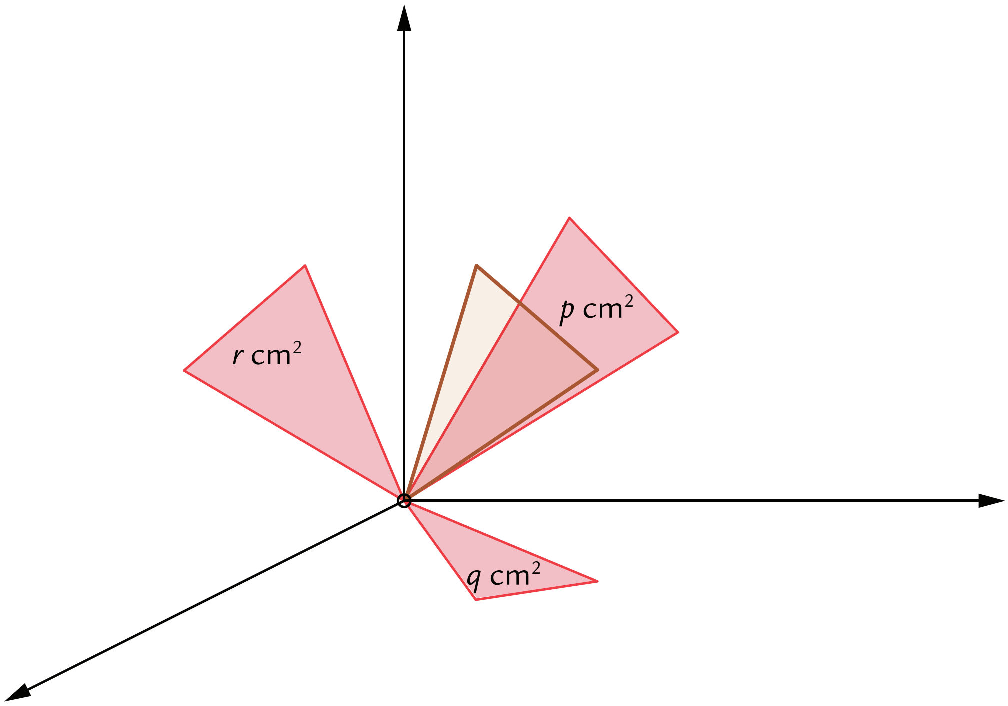
$$(a, b, c) \times (d, e, f) = (bf - ce, dc - af, ae - db)$$

siendo su longitud:

$$\frac{1}{2}\sqrt{(bf-ce)^2+(dc-af)^2+(ae-db)^2}=\sqrt{\left(\frac{bf-ce}{2}\right)^2+\left(\frac{dc-af}{2}\right)^2+\left(\frac{ae-db}{2}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{p^2+q^2+r^2}$$

En la figura a continuación, las proyecciones están en color rojo.



Para resolver en el caso general, consideremos los vértices del triángulo con coordenadas (a, b, c), (e, d, f) y (g, h, i). Las proyecciones son:

Sobre xy: $(a, b, 0)$, $(e, d, 0)$, $(g, h, 0)$

Sobre yz: $(0, b, c)$, $(0, e, f)$, $(0, h, i)$

Sobre xz: $(a, 0, c)$, $(e, 0, f)$, $(g, 0, i)$

Las respectivas áreas son las áreas de los triángulos con vértices:

$(0, 0, 0)$, $(e - a, d - b, 0)$, $(g - a, h - b)$

$(0, 0, 0)$, $(0, e - b, f - c)$, $(0, h - b, i - c)$

$(0, 0, 0)$, $(e - a, 0, f - c)$, $(g - a, 0, i - c)$

mientras que el área del triángulo es el área del triángulo con vértices:

$$(0, 0, 0),\ (e - a, d - b, f - c),\ (g - a, h - b, i - c)$$

pero esta es la situación considerada al comienzo, con lo que se puede afirmar los siguiente:

El área de un triángulo es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las áreas de sus proyecciones sobre los planos coordenados.

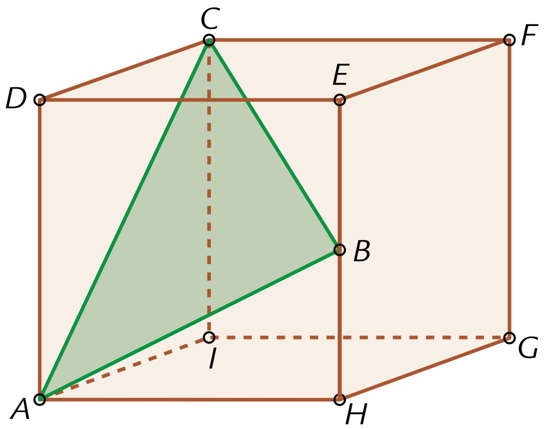
Observación

Podemos obtener la siguiente propiedad:

El área de un triángulo es mayor o igual que el área de cualquiera de sus proyecciones sobre los planos coordenados.

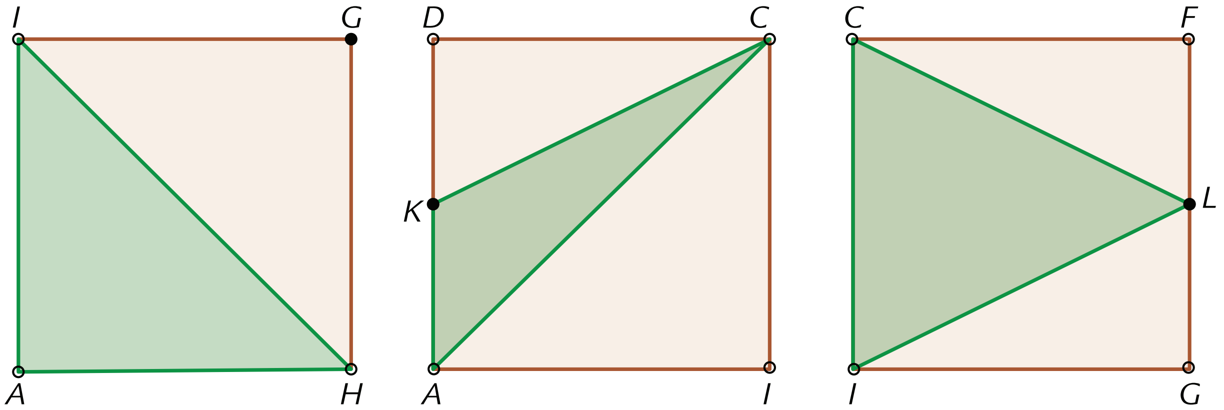
Esta afirmación es clara, dado que, con las notaciones precedentes, $p^2 + q^2 + r^2$ es mayor o igual que p^2, q^2 y r^2, luego $= \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ es mayor o igual que $|p|, |q|$ y $|r|$.

Problema 27 ¿Qué áreas tienen las proyecciones del triángulo *ABC*, *B* punto medio de arista, sobre las caras del cubo de volumen 8 cm³? ¿Qué área tiene el triángulo *ABC*?



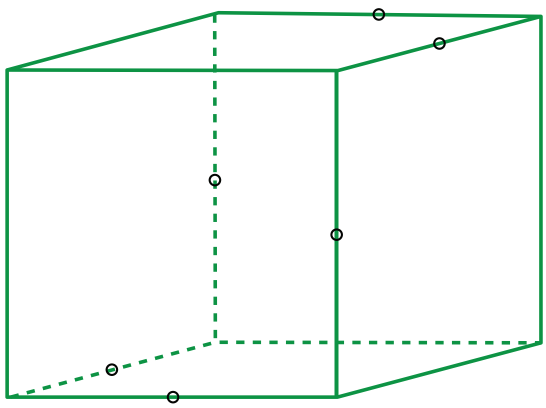
Solución

La figura a continuación incluye las proyecciones de *ABC* sobre la cara inferior, en primer lugar; sobre la cara lateral a la izquierda, en segundo lugar; y sobre la cara del fondo, en tercer lugar.



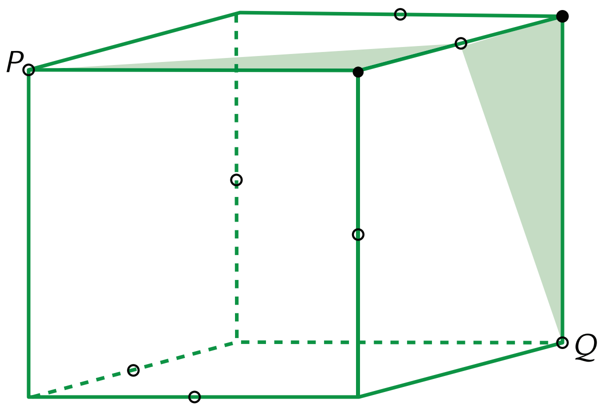
Entre los vértices de los triángulos hay dos puntos medios de aristas. Como cada cara es de 4 cm², las áreas de las proyecciones son 2 cm², 1 cm² y 2 cm², siendo el área del triángulo, según el Problema 26, igual a 3 cm².

Problema 28 Los puntos medios de las aristas indicados en la figura, ¿son coplanares?



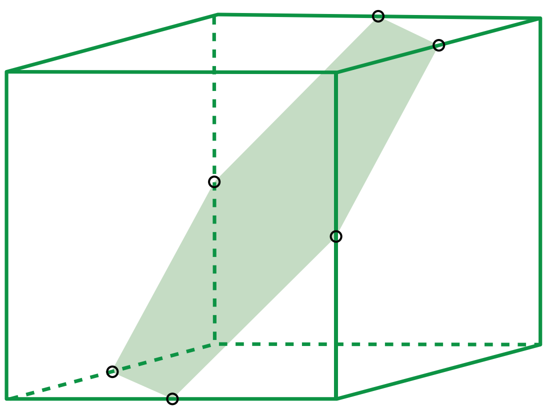
Solución

Cada uno de los seis puntos dados equidistan de los vértices opuestos P y Q del cubo, indicados en la figura a continuación. En cada caso, la distancia es $\frac{\sqrt{5}}{2}l$, donde l es la longitud de las aristas del cubo. Esto se puede ver usando el teorema de Pitágoras en los triángulos rectángulos cuyos catetos miden l y $\frac{l}{2}$, los que se muestran en la figura.



Todos los puntos están en el plano bisector del segmento PQ, es decir que los puntos dados son coplanares.

Problema 29 En la situación del Problema 28:



i) El hexágono que tiene por vértices a los puntos medios de arista, ¿es regular?

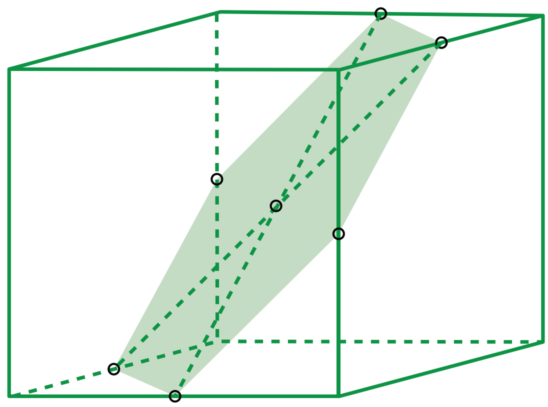
ii) Dibujar las proyecciones ortogonales del hexágono sobre las caras del cubo.

iii) Si los centros de las caras son los vectores de coordenadas (±1, 0, 0), (0, ±1, 0), (0, 0, ±1), hallar las coordenadas de los vértices del cubo y las de los vértices del hexágono.

Solución

i) La longitud de cada lado de este hexágono es igual a la mitad de la longitud de una diagonal de una cara del cubo. Los vértices del hexágono equidistan del centro del cubo,

NOTAS DE GEOMETRÍA 7

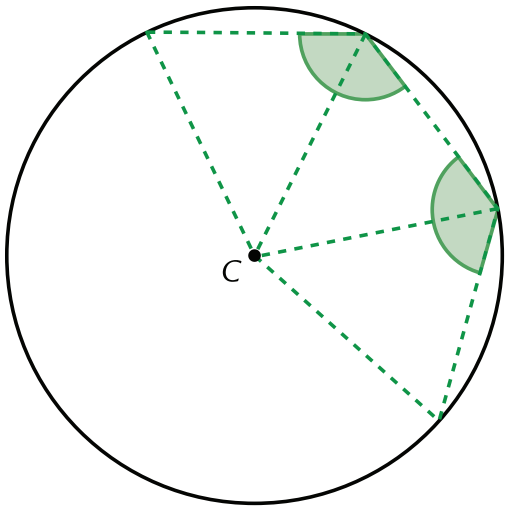


Es decir que el hexágono es inscriptible, entonces debe tener todos los ángulos interiores iguales y es regular.

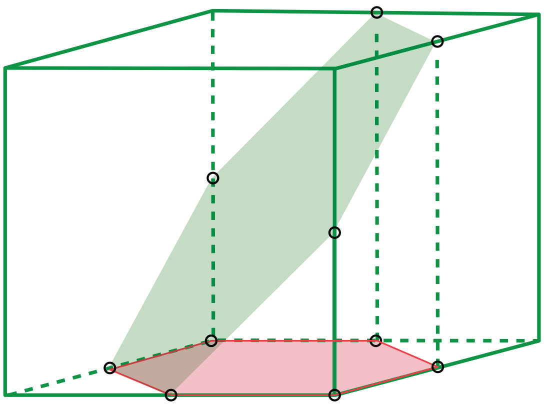
Nota: En la conclusión del problema hemos usado la siguiente propiedad:

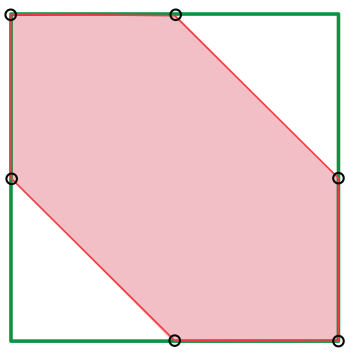
Un polígono inscriptible con todos sus lados iguales es un polígono regular.

Esta afirmación surge de la posibilidad de descomponer el polígono en triángulos isósceles iguales usando el centro de la circunferencia circunscripta y los vértices del polígono. En la figura se representan tres segmentos consecutivos de igual longitud inscriptos en una circunferencia. Estos dan lugar a tres triángulos isósceles iguales; entonces, los ángulos entre los segmentos consecutivos son iguales.

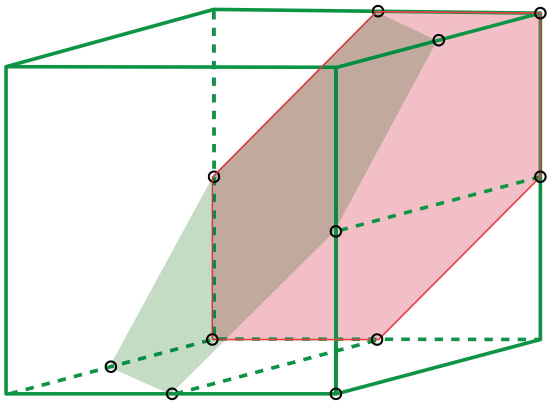


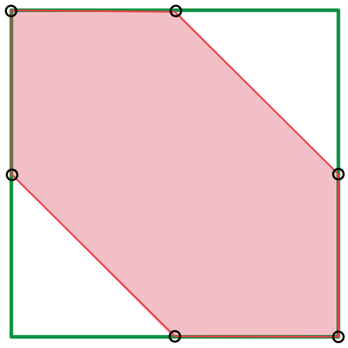
ii) Sobre la cara inferior o superior corresponde el mismo dibujo de la proyección ortogonal y esta se representa en la figura siguiente.



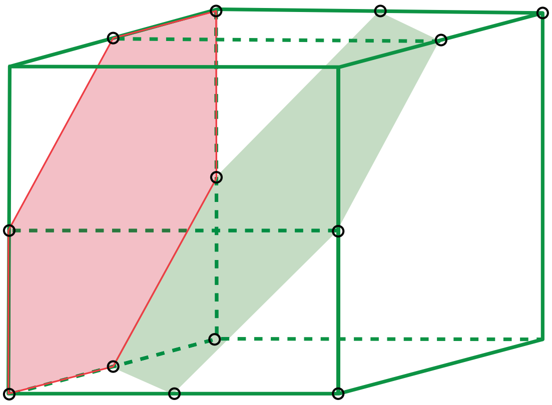


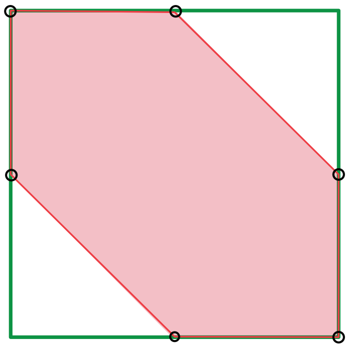
Sobre las caras trasera y delantera:





Sobre las caras laterales:





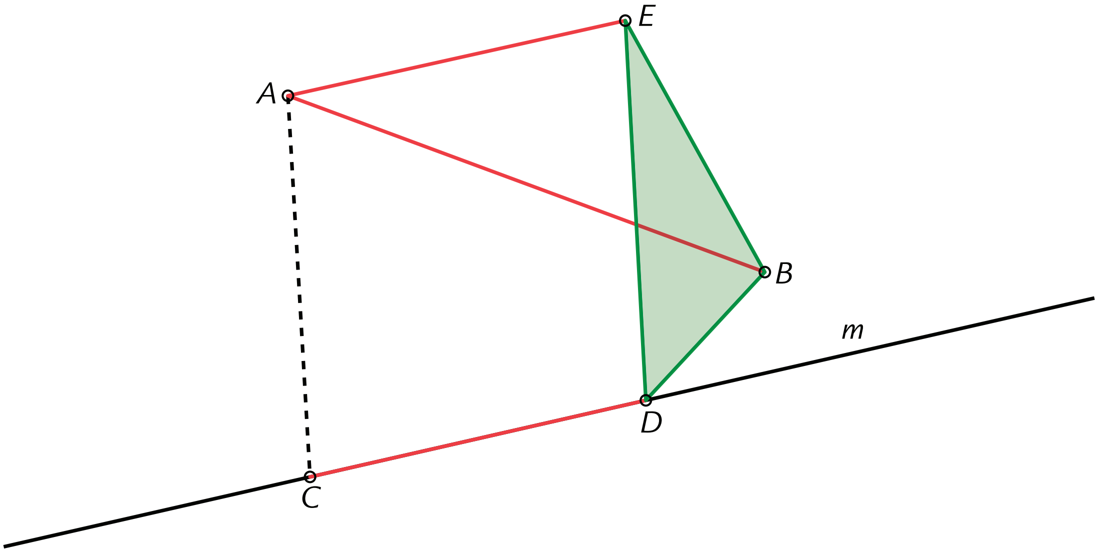
Todas las proyecciones son hexágonos congruentes.

iii) La figura muestra que los puntos medios de las aristas del cubo son suma de dos de los vectores dados por los centros de las caras, y que los vértices del cubo son sumas de tres de estos vectores, mientras que en las sumas no figuren un vector y el opuesto. Las coordenadas de los puntos medios de las aristas están dadas por los puntos de coordenadas $(\pm1, \pm1, 0)$, $(\pm1, 0, \pm1)$, $(0, \pm1, \pm1)$, y los vértices del cubo, por los puntos de coordenadas $(\pm1, \pm1, \pm1)$. Los vértices del hexágono están dados por los puntos de coordenadas $\pm(1, 1, 0)$, $\pm(0, 1, 1)$, $\pm(1, 0, -1)$.

Problema 30 El segmento CD es la proyección ortogonal del segmento AB sobre un plano o sobre una recta. Mostrar que la longitud de AB es mayor o igual que la longitud de CD.

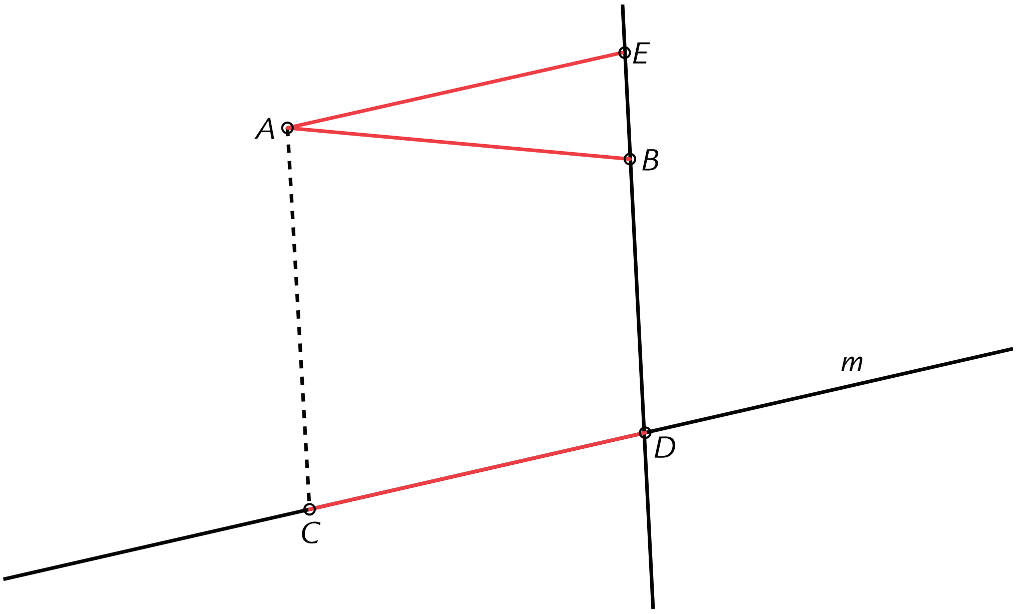
Solución

Si AB se proyecta sobre una recta m, como muestra la figura:



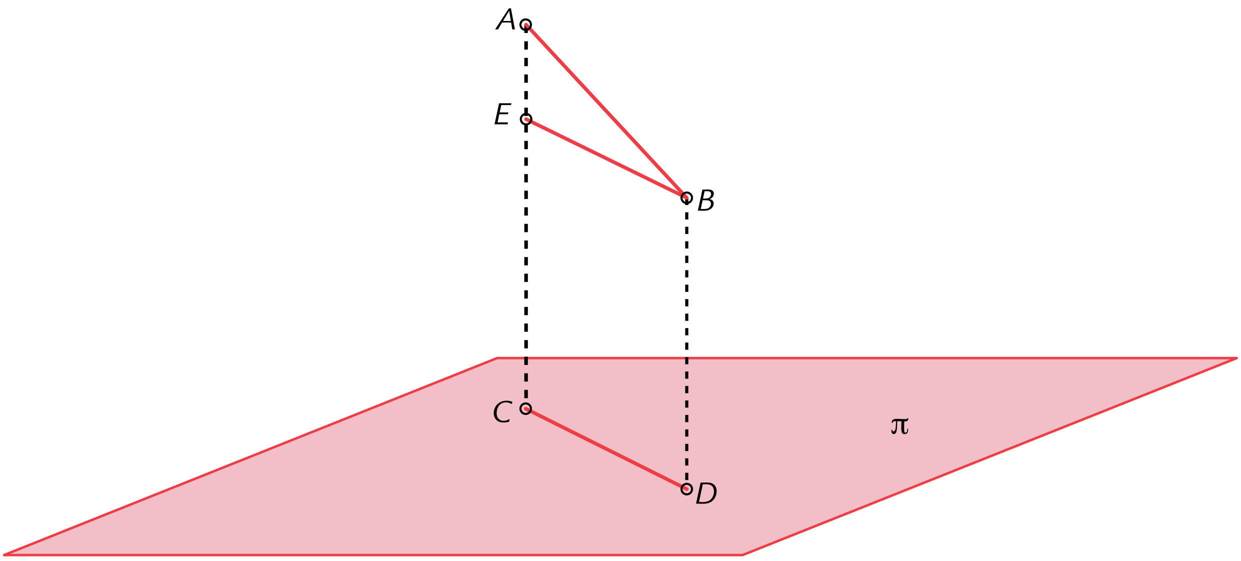
consideramos el segmento *DE* paralelo a *AC* y de igual longitud que este, es decir *ACDE* es un paralelogramo. Como *CD* es perpendicular a *AC* y a *BD*, *CD* es perpendicular a *DE*, vale decir que *CD* es perpendicular al plano *BED*, en el caso en que estos puntos no estén alineados. Luego, *AE* también es perpendicular al plano *BED*, por ser paralelo a *CD*. En consecuencia, el triángulo *ABE* es recto en *E*, así, *CD* = *AE* es menor que *AB*.

Si *E*, *B* y *D* están alineados, *A*, *B*, *C* y *D* están en un mismo plano;



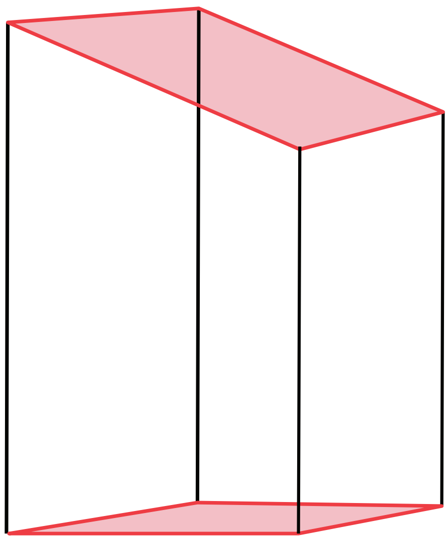
si *B* es distinto de *E*, el triángulo *ABE* es rectángulo en *E* y, como antes, *CD* es menor que *AB*. Solamente si *E* = *B*, *CD* es igual a *AB*.

Si el segmento *AB* se proyecta sobre el plano π como en la figura:



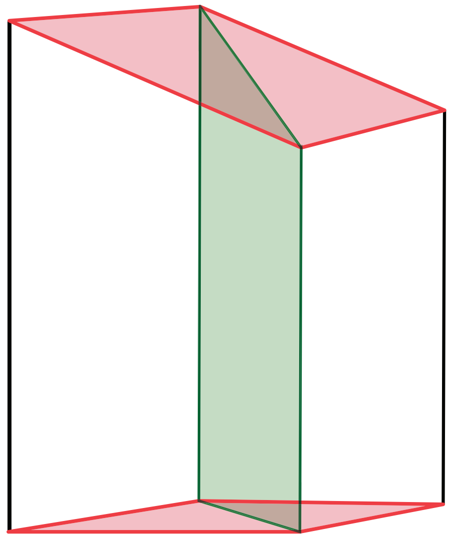
trazando el segmento *BE* paralelo a *CD* y de igual longitud que este, si *E* es distinto de *A*, se tiene el triángulo *ABE* rectángulo en *E*, es decir *CD* es menor que *AB*. Si *E* es igual a *A*, entonces *CD* es igual a *AB*.

Problema 31 El prisma recto de la figura se ha seccionado con un plano en la parte superior. Mostrar que el área de la sección es mayor o igual que el área de la base del prisma.



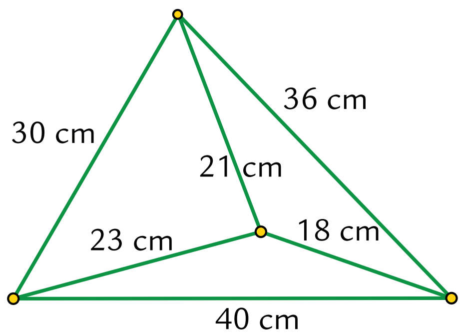
Solución

Si descomponemos el prisma seccionado en dos prismas seccionados de bases triangulares, cortando con un plano como en la siguiente figura:



en cada prisma seccionado de base triangular, el triángulo de la base puede pensarse como la proyección del triángulo en la cara superior, por la observación en el Problema 26 de este mismo número de *Notas de Geometría* resulta que el área de la cara superior en cada prisma de base triangular es mayor o igual que el área de la base correspondiente. Finalmente, el área en la sección del prisma resulta mayor o igual que el área de la base.

Problema 32 Con los datos indicados en la figura, ¿se podría poner un litro de agua en el interior del tetraedro?



Solución

Usando la fórmula de Tartaglia, el volumen del tetraedro es igual a:

$$\sqrt{\frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 40^2 & 23^2 & 30^2 \\ 1 & 40^2 & 0 & 18^2 & 36^2 \\ 1 & 23^2 & 18^2 & 0 & 21^2 \\ 1 & 30^2 & 36^2 & 21^2 & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{133.436.808}{288}} = \sqrt{\frac{1.853.289}{4}} \approx 680{,}68$$

No se puede poner un litro de agua en el interior del tetraedro.

Problema 33 Con los puntos del espacio de coordenadas 1 o –1, usados como vértices, construir dos tetraedros regulares.

Solución

Los puntos que tienen un número par de coordenadas positivas son los vértices de un tetraedro regular:

$$(1, 1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (-1, -1, -1).$$

La distancia entre dos de estos puntos es $\sqrt{8}$.

Los puntos que tienen un número par de coordenadas negativas son los vértices de un tetraedro regular:

$$(1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1), (1, 1, 1).$$

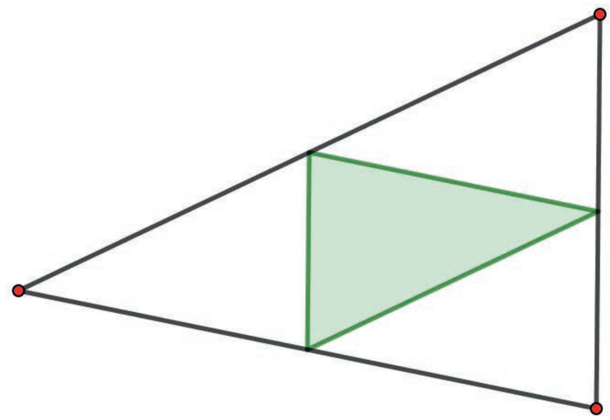
También la distancia entre dos de estos puntos es $\sqrt{8}$.

Problema 34 ¿Hay un triángulo equilátero o hexágono regular en el plano cuyos vértices tengan coordenadas enteras? ¿Qué ocurre en el espacio?

Solución

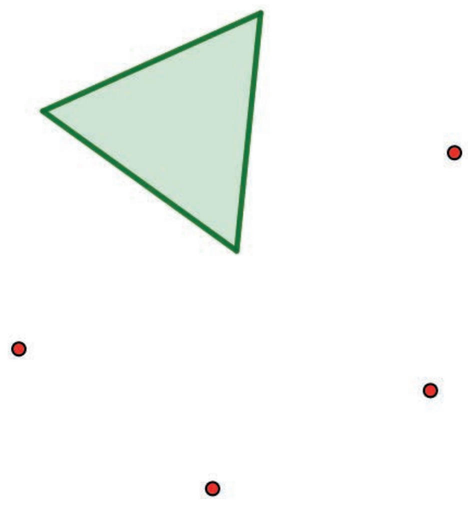
No hay un triángulo equilátero con vértices en la cuadrícula formada por los puntos de coordenadas enteras. Ver Problema 5.4 en la página 170 del libro *Área y Volumen en la Geometría Elemental*, Red Olímpica.

En el espacio hay triángulos equiláteros con vértices de coordenadas enteras (véase el Problema 3 de este mismo número de *Notas de Geometría*). Teniendo en cuenta que, si los vértices de un triángulo tienen coordenadas enteras, los vértices de los tres paralelogramos que tienen un lado del triángulo como diagonal también tienen coordenadas enteras.



La figura muestra los tres paralelogramos alrededor del triángulo sombreado; los vértices destacados con color rojo también tendrían coordenadas enteras si los vértices del triángulo las tuvieran. Si un triángulo equilátero tiene vértices con coordenadas enteras, por el principio del paralelogramo los puntos indicados en la figura tendrán coordenadas enteras.

La figura a continuación

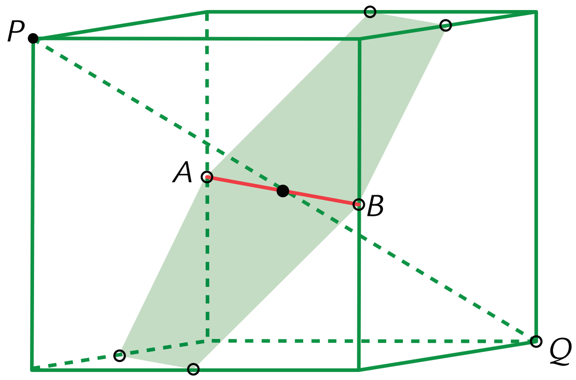


muestra que se puede formar un hexágono regular con vértices de coordenadas enteras.

Problema 35 Dibujar la proyección ortogonal del cubo sobre el plano del hexágono, en el Problema 28.

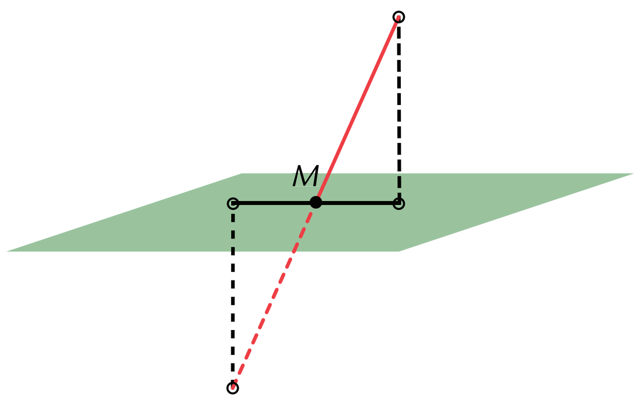
Solución

El segmento PQ es perpendicular al plano del hexágono y pasa por el centro del cubo, que también es el punto medio de la diagonal AB del hexágono indicada en la figura.

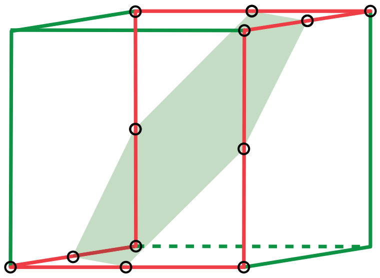


Por consiguiente, P y Q se proyectan sobre el centro del hexágono.

Por otra parte, observemos que, si un segmento corta a un plano en el punto medio M del segmento, entonces la proyección ortogonal del segmento tiene a M como punto medio.

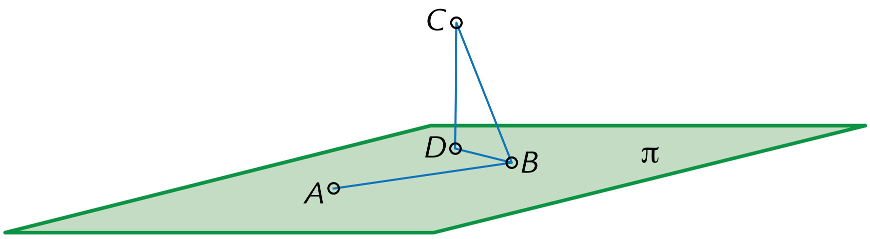


A partir de esto, teniendo en cuenta la poligonal cerrada (destacada en color rojo en la figura):



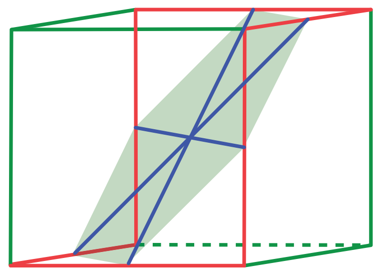
que está formada con aristas del cubo, pasa por todos los vértices del cubo distintos de P y Q, atravesando el plano del hexágono en los puntos medios de las aristas que integran la poligonal, nos permite afirmar que las proyecciones de estos seis vértices del cubo son los vértices de un hexágono que tiene al hexágono regular inscripto en los puntos medios de sus lados.

La figura a continuación se asocia a la siguiente afirmación: si un segmento BC es perpendicular a un segmento AB contenido en un plano π, entonces la proyección ortogonal BD de BC sobre π es perpendicular a AB.

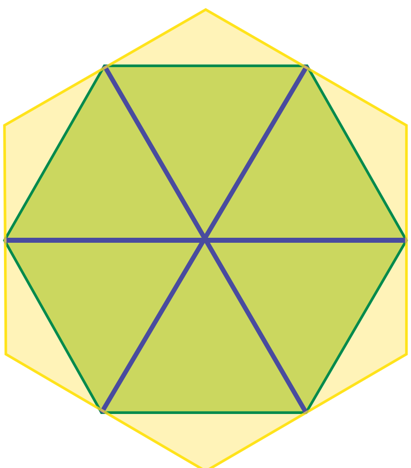


La justificación de la afirmación precedente resulta del hecho de que AB es perpendicular a BC y es perpendicular a CD, puesto que CD es perpendicular a π. Por lo tanto, AB es perpendicular a toda recta del plano BCD, entonces es perpendicular a BD.

Ahora podemos usar la propiedad en nuestro problema, observando que cada arista de la poligonal es perpendicular a una de las diagonales del hexágono:



lo que permite dibujar las proyecciones de las aristas que componen la poligonal.



Problema 36 Los vectores u, v, w están en la esfera de radio 1 centrada en el origen 0 de coordenadas cartesianas. Mostrar que el volumen del tetraedro $0uvw$ es menor o igual que $\frac{1}{6}$.

Solución

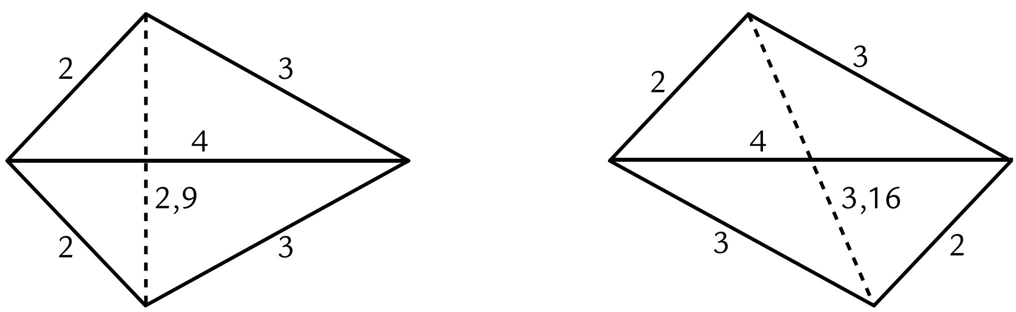
El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del módulo del determinante de la matriz que tiene las coordenadas de los vectores u, v y w en las sucesivas filas. Por la desigualdad de Hadamard, el módulo del determinante es menor o igual que el producto de las normas de las filas. Como los vectores son de longitud 1, el determinante es menor o igual que 1; así, el volumen del tetraedro en menor o igual que $\frac{1}{6}$.

Problema 37 ¿Hay tetraedros cuyas aristas midan 1, 2, 3, 4, 5, 6? ¿Y que midan 2, 2, 3, 3, 4, 4? Hallar el volumen de uno de ellos.

Solución

En el primer caso, con los datos de las longitudes, es imposible formar un triángulo que tenga un lado de longitud 1.

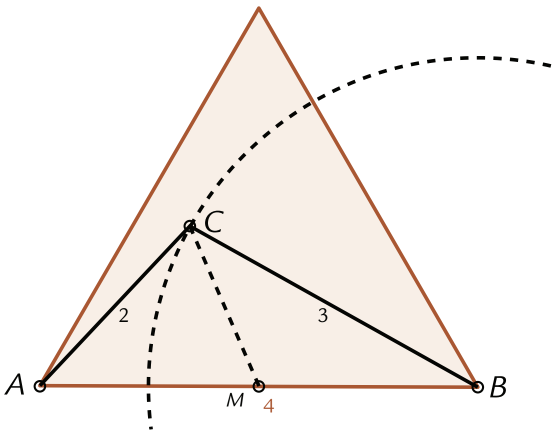
En el segundo caso, si las aristas de longitud 4 fueran opuestas, como con aristas de longitudes 2, 2, 4 no se puede formar un triángulo, las caras concurrentes en las aristas de longitud 4 deben ser triángulos cuyos lados midan 2, 3, 4. El desarrollo de un par de caras concurrentes en una arista de longitud 4 está dado por los dos casos que muestran la figura:



Las diagonales de los cuadriláteros que forman este par de caras, destacadas en líneas de puntos, miden aproximadamente: 2,9 en un caso y 3,16 en el otro. Cualquier tetraedro que se forme con estos pares de cara tendrá la arista opuesta a la arista de longitud 4, de longitud menor que 2,9 en el primer caso y de longitud menor que 3,16 en el segundo caso.

No es necesario dar los valores aproximados de los segmentos punteados para ver que son de longitud menor que 4. En el primer caso, el segmento punteado mide dos veces la altura sobre el lado de longitud 4 de un triángulo de lados 2, 3, 4, esta altura es menor que 2. En el segundo caso, el segmento punteado es dos veces la mediana sobre el lado de longitud 4 de un triángulo de lados 2, 3, 4.

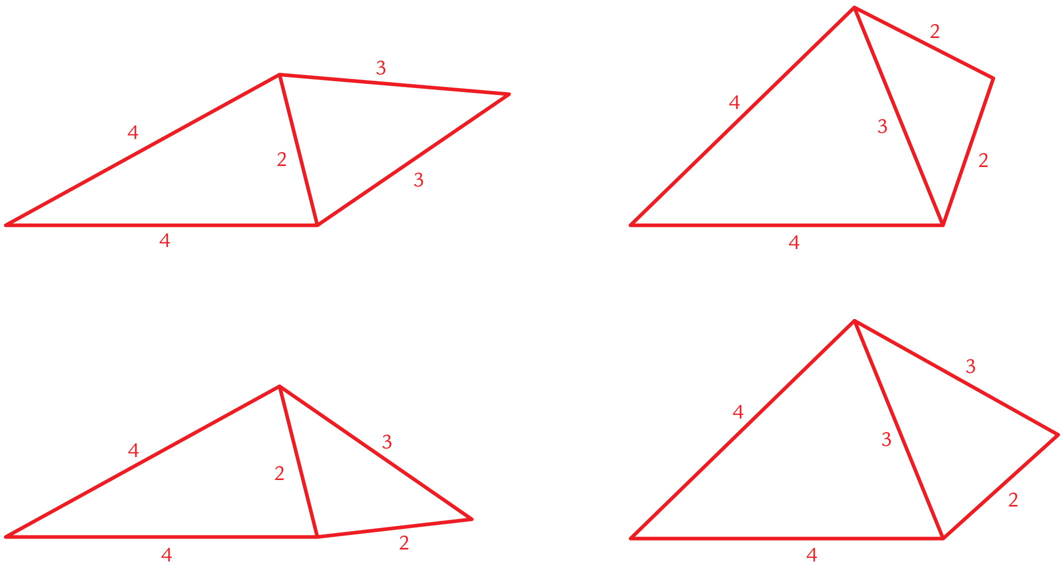
Un triángulo ABC con estos lados puede ser incluido en un triángulo equilátero de lado 4, como muestra la figura:



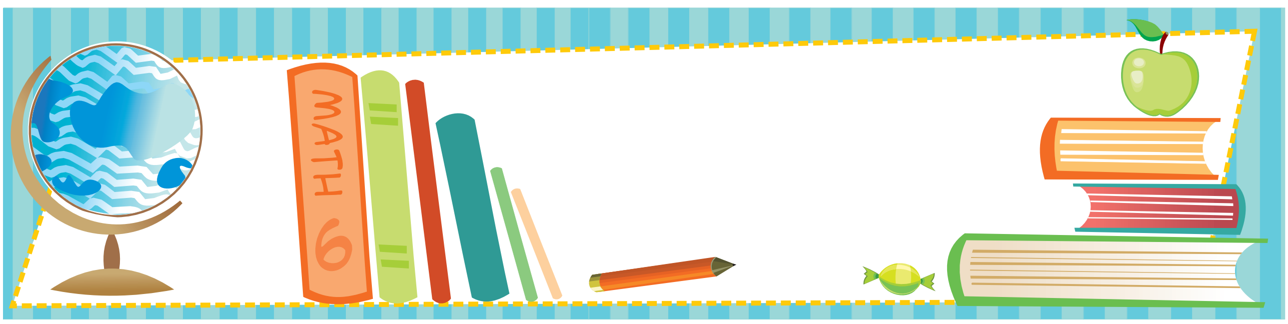
El punto C queda en el interior del triángulo, dado que la altura del triángulo equilátero es $2\sqrt{3}$, que es mayor que 3. Por consiguiente, el ángulo en el vértice A del triángulo ABC es menor que 60°.

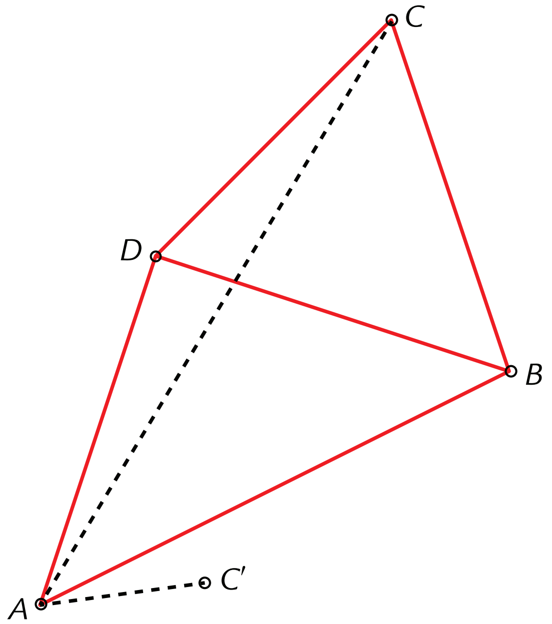
El triángulo AMC, donde M es el punto medio de AB, es isósceles y el ángulo en A es menor que 60°, de modo que los ángulos en C y M miden más que 60°. Así, el lado más corto en AMC es CM, menor que 2.

Las aristas de longitud 4 deben ser concurrentes y se presentan los siguientes casos en la figura a continuación.



Dado el desarrollo de dos caras de un tetraedro, recordemos cómo obtener los valores extremos para la longitud de la arista que no figura en el desarrollo (véase el Problema 31 publicado en el N° 4 de *Notas de Geometría*). En la figura, C' es el simétrico de C respecto de la recta BD:





La longitud de la sexta arista es mayor que la longitud del segmento AC' y menor que la longitud del segmento AC.

En el primer y el segundo caso, los valores extremos están dados por la suma y las diferencias de las alturas de los triángulos isósceles que comparten la base, los valores son:

$$\sqrt{15}-\sqrt{8}, \qquad \sqrt{15}+\sqrt{8}$$

$$\sqrt{13{,}75}-\sqrt{1{,}75}, \qquad \sqrt{13{,}75}+\sqrt{1{,}75}$$

Para que exista el tetraedro, en estos casos, es necesario que:

$$\sqrt{15}-\sqrt{8}<2<\sqrt{15}+\sqrt{8}$$

$$\sqrt{13{,}75}-\sqrt{1{,}75}<3<\sqrt{13{,}75}+\sqrt{1{,}75}$$

Es claro que en ambos casos las desigualdades de la derecha se cumplen.

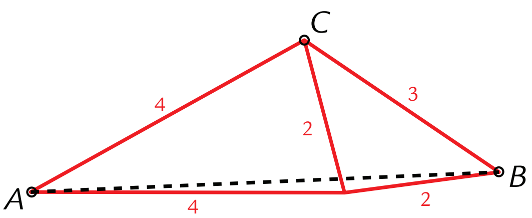
Veamos las otras desigualdades. Como $\sqrt{15}<3{,}9$ y $\sqrt{8}>2$, se tiene que:

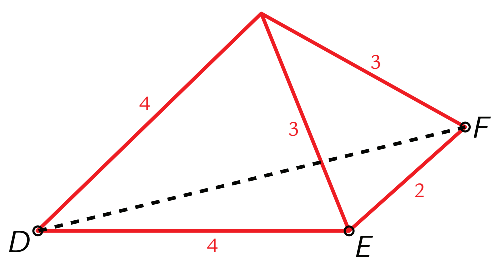
$$\sqrt{15}-\sqrt{8}<3{,}9-2=1{,}9<2$$

Por otro lado, $\sqrt{13{,}75}<3{,}8$ y $\sqrt{1{,}75}>1$, entonces:

$$\sqrt{13{,}75}-\sqrt{1{,}75}<3{,}8-1=2{,}8<3$$

En los dos casos considerados los tetraedros existen. Queda analizar los dos casos restantes.



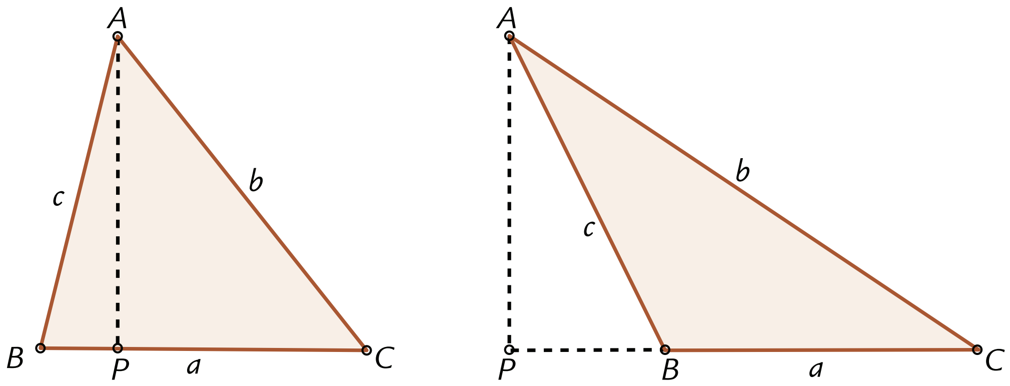


AB es mayor que 2 por ser AB el mayor lado en el triángulo ABC, ya que es el lado opuesto al mayor ángulo en el vértice C. Para justificar que el ángulo en C es el mayor ángulo de ABC, notemos que: en el triángulo de lados 4, 4, 2, el ángulo en C es mayor que el ángulo en A y en el triángulo de lados 3, 2, 2, el ángulo en C es igual al ángulo en B. El mismo argumento sirve para ver que DF es mayor que 3. Con esto, la desigualdad con los extremos superiores se cumple en ambos casos.

Ver las desigualdades con los extremos inferiores es un tanto más laborioso.

Veamos primero cómo calcular en un triángulo las distancias desde el pie de una altura a los vértices del triángulo, si se conocen las longitudes a, b, c de los lados del triángulo.

La figura muestra dos casos, según el pie de la altura esté en el lado del triángulo o en su prolongación.



Llamaremos x e y a las longitudes de PB y PC, respectivamente, y h a la altura AP. Por el teorema de Pitágoras, se dan las identidades:

$$x^2 = c^2 - h^2$$
$$y^2 = b^2 - h^2$$

Si restamos miembro a miembro, se tiene:

$$x^2 - y^2 = c^2 - b^2$$

El primer miembro puede factorizarse como:

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

En el primer caso de los dados en la figura, $x + y = a$, y en el segundo caso, $y - x = a$. En cada caso resulta:

$$a(x - y) = (x + y)(x - y) = c^2 - b^2$$
$$(x + y)(-a) = (x + y)(x - y) = c^2 - b^2$$

o bien,

$$x - y = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

$$x + y = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

Para el primer caso, de las igualdades:

$$x - y = \frac{c^2 - b^2}{a} x + y = a$$

se obtiene:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a} y - x = a$$

Para el segundo caso, las igualdades son:

$$x + y = \frac{b^2 - c^2}{a} y - x = a$$

De estas, resulta:

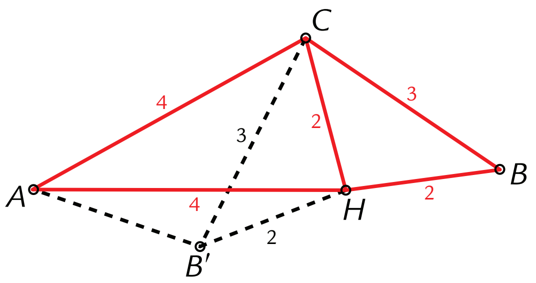
$$x = \frac{-a^2 + b^2 - c^2}{2a} y = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$$

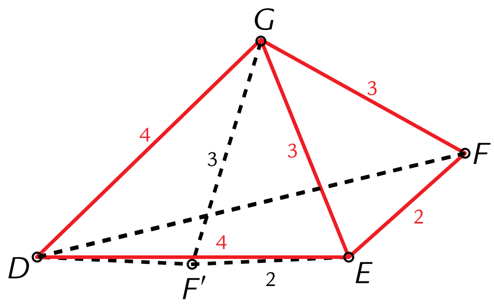
Resta calcular h, que es la distancia de P al vértice A; para esto usamos la identidad:

$$\frac{ah}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

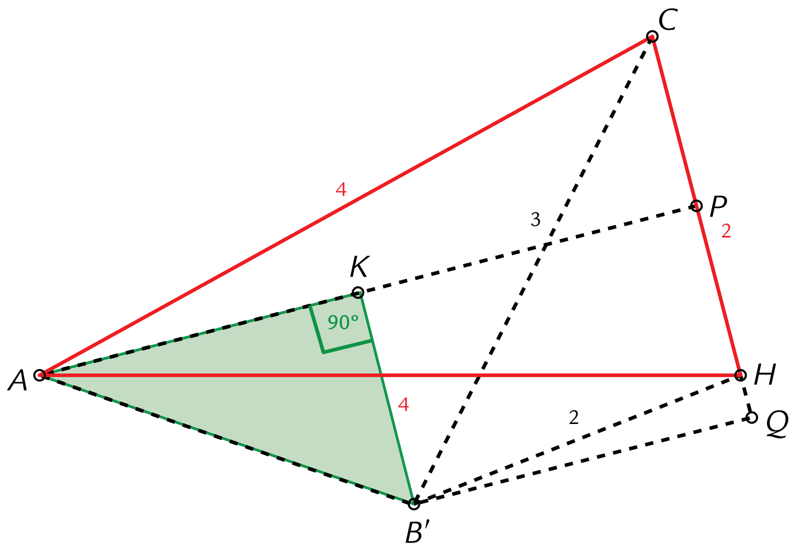
El miembro de la derecha es la expresión del área dada por la fórmula de Herón, donde s es el semiperímetro.

Volviendo al problema, tendríamos que saber si la longitud de AB' es menor que 3 y si la longitud de DF' es menor que 2.





Para calcular AB' usaremos las alturas y sus respectivos pies de los triángulos AHC y $B'HC$.



Notar que AB' es la hipotenusa del triángulo rectángulo $AB'K$, con un cateto de la misma longitud que el segmento PQ y la longitud del otro dada por la diferencia de las alturas AP y $B'Q$.

Por razones de brevedad, como suele ser habitual, en los cálculos a continuación identificamos los segmentos con sus longitudes.

Podemos calcular:

$$PQ = PH + HQ = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$AK = AP - B'Q = \sqrt{15} - \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

La longitud de PH es *1* por ser AHC isósceles, la de AP es $\sqrt{15}$ por Pitágoras en el triángulo AHP, la de HQ es $\frac{1}{4}$ usando la fórmula $x = \frac{-a^2 - b^2 - c^2}{2a}$ para $a = 2$, $b = 3$ y $c = 2$ y la altura $B'Q$ es $\frac{3\sqrt{7}}{4}$, usando la fórmula de Herón. Ahora:

$$AB' = \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{15} - \frac{3\sqrt{7}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{41 - 3\sqrt{105}}{2}}$$

Para que AB' sea menor que 3, su cuadrado debe ser menor que 9, es decir;

$$\frac{41 - 3\sqrt{105}}{2} < 9$$

o bien,

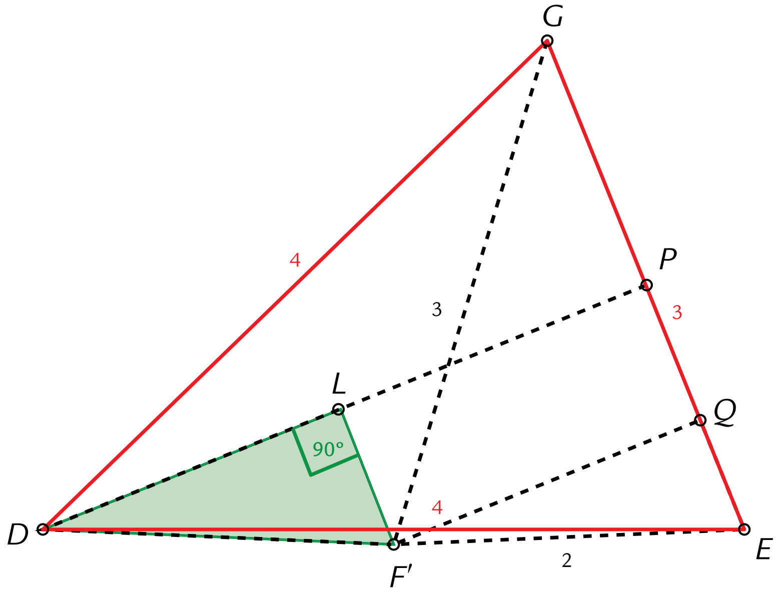
$$23 < 3\sqrt{105}$$

Elevando al cuadrado ambos miembros, se tiene:

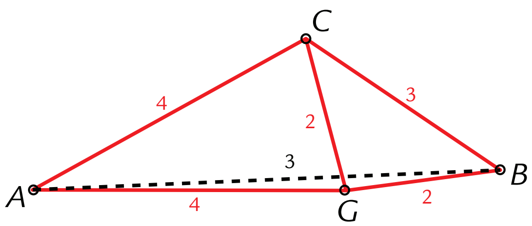
$$529 < 945$$

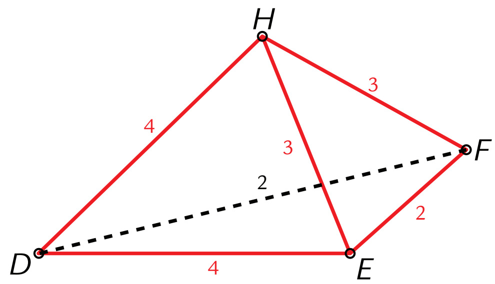
En este caso también existe el tetraedro.

El último caso se trata en forma similar y se deja como desafío para el lector.



Usando la fórmula de Tartaglia, hallaremos el volumen de estos dos últimos casos:





Ordenamos los vértices en el tetraedro de la izquierda como A, G, B, C y, si existiera, los vértices del tetraedro de la derecha como D, E, F, G.

El volumen del primero es:

$$\sqrt{\frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 16 & 9 & 16 \\ 1 & 16 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 0 & 9 \\ 1 & 16 & 4 & 9 & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{832}{288}} = \frac{\sqrt{26}}{3}$$

Para el segundo, nos encontramos con este problema:

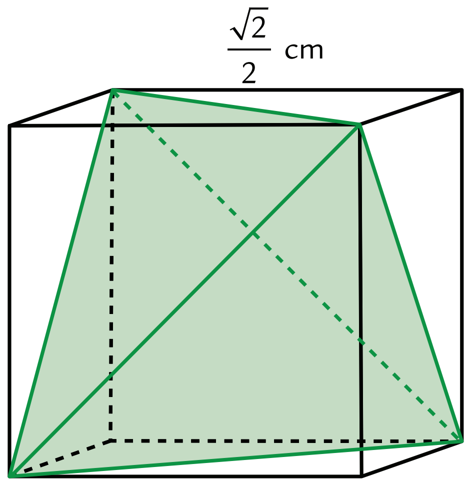
$$\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 16 & 4 & 16 \\ 1 & 16 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 9 \\ 1 & 16 & 9 & 9 & 0 \end{bmatrix} = -8$$

No hay un número real que sea la raíz cuadrada de $\frac{-8}{288}$. ¿Qué explicación encuentra a esta situación?

Problema 38 Hallar el volumen de un tetraedro regular con aristas de 1 cm.

Solución

Un tal tetraedro puede inscribirse en un cubo de arista $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm, como ilustra la figura:



es decir que el cubo de volumen $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm^3 es el paralelepípedo circunscripto a tetraedro, luego el volumen del tetraedro es $\frac{\sqrt{2}}{12}$ cm^3.

Problema 39 Una arista de 2 cm de un tetraedro está en la recta *m* que pasa por *AB*; la arista opuesta, de 3 cm, está en la recta *n* que pasa por *CD*. Hallar el volumen del tetraedro.

Datos: $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (1, 0, 1)$, $D = (0, 1, 1)$.

Solución

Hallaremos el volumen del paralelepípedo circunscripto. El área de una cara del paralelepípedo coincide con el área del triángulo de vértices (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, –1, 0) que es:

$$\frac{1}{2}\left\|\left((0,1,1)\times(1,-1,0)\right)\right\| = \frac{3}{2}$$

La altura del paralelepípedo respecto de la cara considerada es la distancia entre las rectas *m* y *n*. La recta que pasa por (0, 0, 0) y (1, 1, –1) es perpendicular a *m* y *n*. La recta *m* se proyecta en $\frac{1}{3}(1,1,-1)$ y *n* en (0, 0, 0). La distancia es $\frac{\sqrt{3}}{3}$, el volumen buscado es $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Problema 40 Hallar la distancia entre dos aristas opuestas de un tetraedro regular con aristas de 1 cm.

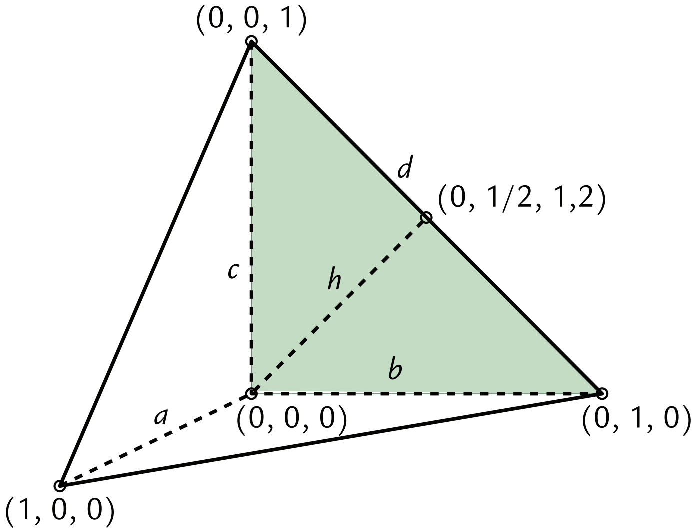
Solución

Considerando el Problema 37 de este mismo número de *Notas de Geometría*, la distancia entre las aristas es igual a la longitud de la arista del cubo circunscripto al tetraedro, es decir $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

Problema 41 Hallar las distancias entre las aristas opuestas del tetraedro con vértices (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Solución

Consideremos a, b, c las aristas que concurren en (0, 0, 0) y d la arista opuesta a a. La altura h del triángulo isósceles con vértices (0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) es perpendicular a d.



La arista a es perpendicular a las aristas c y b, entonces es perpendicular a todo segmento del plano que contiene a c y b, es decir, a es perpendicular a h; por lo tanto, la distancia entre a y d es la longitud de h igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Los casos restantes producen situaciones idénticas al caso tratado.

Problema 42 Las caras que concurren en un vértice V de un tetraedro tienen ángulo recto en el vértice V. Las longitudes de las aristas que concurren en V son 2 cm, 3 cm y 4 cm. Hallar la altura del tetraedro que parte de V.

Solución

Si ubicamos el tetraedro en el espacio coordenado poniendo V = (0, 0, 0) y los vértices restantes como (2, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 4), podemos calcular la altura pedida como el cociente entre el volumen del tetraedro y el área de la cara opuesta a V.

El volumen es un sexto del volumen del paralelepípedo generado por los vectores (2, 0, 0), (0, 3, 0) y (0, 0, 4), esto es igual a 4 cm³. El área de la cara opuesta a V es la longitud del producto vectorial:

$$\left\|\left((0,3,0)-(2,0,0)\right)\times\left((0,0,4)-(2,0,0)\right)\right\| = \left\|(-2,3,0)\times(-2,0,4)\right\| = \left\|(12,8,6)\right\| = \sqrt{244}$$

La altura que parte de V es:

$$\frac{4}{\sqrt{244}}\text{cm} = \frac{2}{\sqrt{61}}\text{cm}$$

Problema 43 Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son (1, 1, 1), (1, 2, 2), (2, 2, 1), (2, 1, 2).

Solución

Calculando en el tetraedro trasladado de vértices (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), el volumen es un sexto del volumen del paralelepípedo generado por los vectores (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), igual a:

$$\frac{1}{6} = \left|\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right| = \frac{1}{6}\cdot|-2| = \frac{1}{3}$$

Usando la fórmula de Lagrange, el volumen es:

$$\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Problema 44 Una esfera de 0,2 cm de radio se desplaza con su centro sobre la recta que pasa por (1, 2, 0) y (–1, 3, 1). Otra esfera de 0,5 cm de radio se desplaza con su centro sobre la recta que pasa por (1, 1, 0) y (3, –2, –1). ¿Podrían chocar?

Solución

La distancia entre las rectas es la distancia desde (1, 1, 0) al plano que pasa por (1, 2, 0), (–1, 3, 1) y:

$$\frac{(1,2,0)+(-1,3,1)+(1,1,0)-(3,-2,-1)}{2} = (-1,4,1)$$

Trasladamos los puntos restando (1, 2, 0), para calcular la distancia desde (1, 1, 0) – (1, 2, 0) = = (0, –1, 0) al plano generado por (–1, 3, 1) – (1, 2, 0) = (–1, 1, 1) y (–1, 4, 1) – (1, 2, 0) = (–2, 2, 1). Esta distancia puede calcularse como:

$$\frac{\left|\langle(0,-1,0),(-1,1,1)\times(-2,2,1)\rangle\right|}{\left\|(-1,1,1)\times(-2,2,1)\right\|} = \frac{\left|\langle(0,-1,0),(-1,-1,0)\rangle\right|}{\left\|(-1,-1,0)\right\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70711$$

No pueden chocar, la suma de los radios es menor que $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 45 Un proyectil se mueve en línea recta en el espacio, pasando por el punto (1, 2, 3) y luego por el punto (1, 1, 1). Hallar las coordenadas del punto en el que impactará al plano de ecuación $z = 0$.

Solución

Usando la ecuación paramétrica de la recta:

$$\lambda\cdot(1, 2, 3) + (1 - \lambda)\cdot(1, 1, 1) = (1, \lambda + 1, 2\lambda + 1)$$

cortará al plano $z = 0$ cuando $2\lambda + 1 = 0$, es decir $\lambda = -\frac{1}{2}$. El punto de intersección es $\left(1,\frac{1}{2},0\right)$.

Problema 46 Los perímetros de las caras de una caja en forma de paralelepípedo recto son de 16 cm, 20 cm y 24 cm. Hallar el volumen de la caja.

Solución

Si a, b y c son las longitudes de las aristas de la caja tales que:

$$2(a+b)=16$$
$$2(b+c)=20$$
$$2(a+c)=24$$

en forma equivalente:

$$\begin{cases} a+b=8 \\ b+c=10 \\ a+c=12 \end{cases}$$

Podemos resolver el sistema de ecuaciones usando la regla de Cramer:

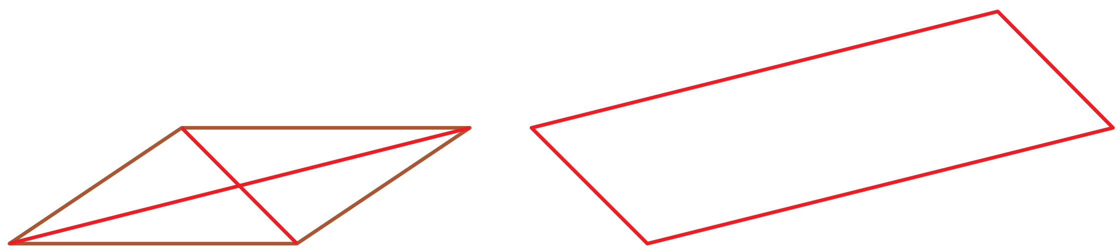
$$a=\frac{\det\begin{bmatrix}8&1&0\\10&1&1\\12&0&1\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}}\quad b=\frac{\det\begin{bmatrix}1&8&0\\0&10&1\\1&12&1\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}}\quad c=\frac{\det\begin{bmatrix}1&1&8\\0&1&10\\1&0&12\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}}$$

Es decir, $a=5$, $b=3$ y $c=7$.

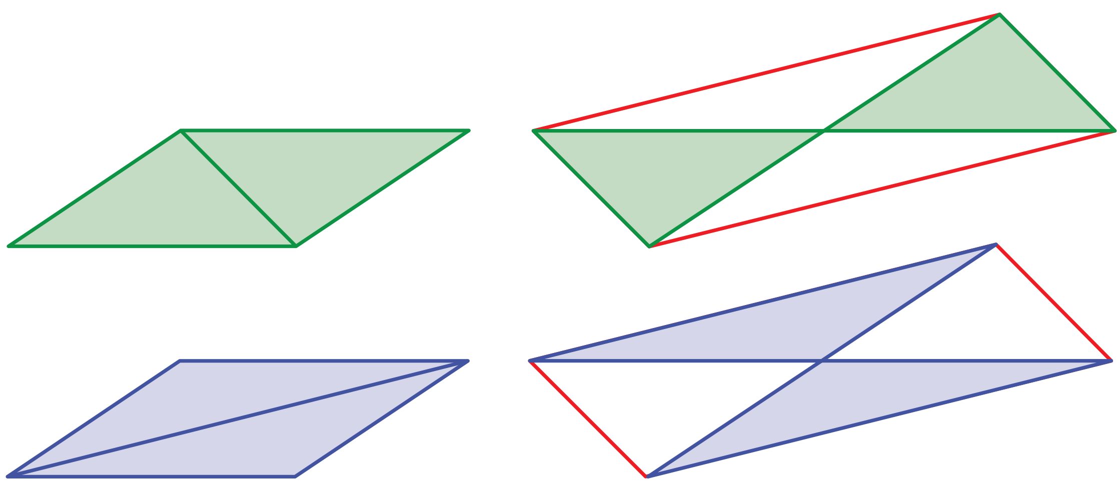
Problema 47 Si los segmentos AB y CD son las diagonales de un paralelogramo en el espacio, mostrar que el área del paralelogramo es igual a $\frac{1}{2}\left\|(A-B)\times(C-D)\right\|$.

Solución

Si trasladamos las diagonales de un paralelogramo dado para construir los lados de otro paralelogramo, obtendremos un paralelogramo cuya área será el doble del área del paralelogramo dado.

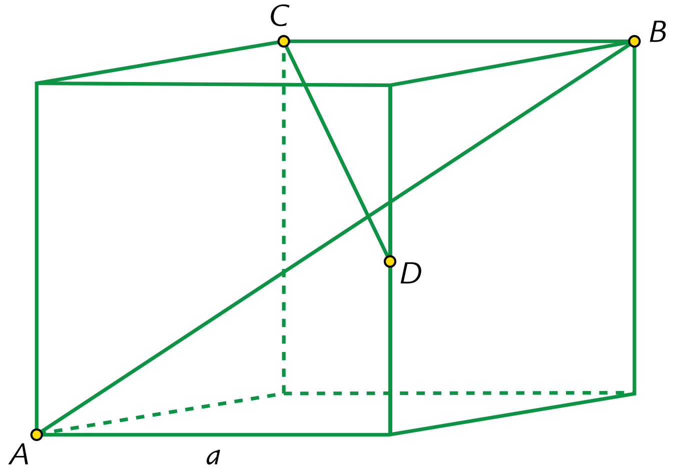


La siguiente figura muestra que las diagonales del paralelogramo obtenido lo descomponen en cuatro triángulos; con los dos verdes se puede armar el paralelogramo dado, con los dos azules también.



En el problema, $A - B$ y $C - D$ son vectores paralelos a las diagonales del paralelogramo, luego generan un paralelogramo de área igual al doble que el paralelogramo dado.

Problema 48 En el cubo con aristas de longitud a, ¿cuál es la distancia de la recta que pasa por los vértices AB y la recta que pasa por los puntos CD?, siendo C un vértice y D, el punto medio de una arista.



Solución

Podemos colocar el cubo en el espacio de modo que:

$$A=(a,0,0),\quad B=(0,a,a),\quad C=(0,0,a),\quad D=\left(a,a,\frac{a}{2}\right)$$

El volumen del tetraedro $ABCD$ es:

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} -a & a & a \\ -a & 0 & a \\ 0 & a & \frac{a}{2} \end{bmatrix}\right| = \frac{a^3}{18}$$

La cara del paralelepípedo circunscripto al tetraedro que contiene a la arista AB, según lo visto en el Problema 47, tiene área igual a:

$$\frac{1}{2}\|(B-A)\times D-C\| = \left\|\frac{1}{2}\left(-\frac{3a^2}{2},\frac{a^2}{2},-2a^2\right)\right\| = \sqrt{\frac{13}{8}}\cdot a^2$$

La distancia ente las rectas, según lo expuesto en el Apéndice, es:

$$\frac{a^3}{18}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{8}}\cdot a^2} = \frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{13}}\cdot a$$

Problema 49 La recta m pasa por (2, 3, 2) y (1, 2, 0) y las ecuaciones implícitas de la recta n son:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

Hallar un plano π paralelo a m que contenga a n. ¿Hay otro?

Solución

Si tomamos dos números α y β, por lo menos uno distinto de cero, podemos considerar la ecuación dada por:

$$\alpha(x+y-z-1)+\beta(x+y+z)=0$$

En principio, esta es la ecuación de un plano que contiene a n, ya que si (a, b, c) está en n se cumple que:

$$\begin{cases} a+b-c=1 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Luego:

$$\alpha(a+b-c-1)+\beta(a+b+c)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0$$

El vector $(2, 3, 2) - (1, 2, 0) = (1, 1, 2)$ es paralelo a m. Tomemos un punto en n, por ejemplo $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y condicionemos los valores de α y β para que el punto $(1,1,2)+\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. Verifique la ecuación:

$$\alpha(x+y-z-1)+\beta(x+y+z)=0$$

es decir:

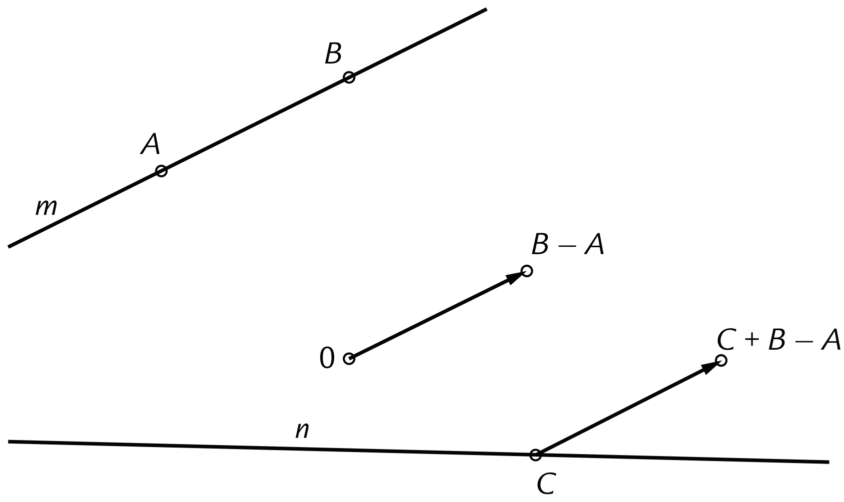
$$\alpha\left(1+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-1\right)+\beta\left(1+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=0\times\alpha+4\beta=0$$

Si se toma $\alpha = 1$ y $\beta = 0$, el plano π de ecuación:

$$x+y-z=1$$

contiene a n y es paralelo a m. Solo restaría aclarar por qué es paralelo a m. Los puntos $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ y $\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ están en π y el segmento que los une es paralelo al vector $(1, 1, 2)$ y este es paralelo a m.

Con la figura a continuación comentamos el enfoque geométrico de la solución presentada al problema.



Tomamos dos puntos en m, A y B, la diferencia $B - A$ es un vector paralelo a m. Luego buscamos un punto C en n y lo trasladamos usando el vector $B - A$ obteniendo $C + B - A$. Un plano que contenga a n y a $C + B - A$ será un plano paralelo a m dado que contendrá al segmento de vértices C y $C + B - A$. De la familia de planos dados por las ecuaciones:

$$\alpha(x+y-z-1)+\beta(x+y+z)=0$$

elegimos uno que pase por $C + B - A$.

No hay otro plano dado que por una recta y un punto exterior a la recta pasa un único plano. Veremos que cualquier plano γ que contenga a n y sea paralelo a m debe pasar por $\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$. Como γ es paralelo a m, contiene una recta k paralela a m. Por el punto $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ se puede trazar una recta l paralela a k. La recta l y la recta que une $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ con $\left(1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ son dos rectas paralelas a m que pasan por $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, deben coincidir ya que por un punto exterior a una recta pasa una única paralela. Entonces el punto $\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ debe estar en l y, por consiguiente, en γ; por lo tanto, γ y π coinciden.

Problema 50 Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta *m* que pasa por los puntos de coordenadas (3, 2, 1), (2, –1, 1) y el plano π que pasa por los puntos de coordenadas (1, –1, 0), (0, 1, –1) y (1, 0, –1).

Solución

Usaremos la ecuación paramétrica de la recta dada por:

$$\lambda(3, 2, 1) + (1, \lambda)(2, -1, 1) = (\lambda + 2, 3\lambda - 1, 1)$$

Los puntos $(\lambda + 2, 3\lambda - 1, 1)$, (1, –1, 0), (0, 1, –1) y (1, 0, –1) son coplanares si los puntos

$$(\lambda + 2, 3\lambda - 1, 1) - (1, -1, 0) = (\lambda + 1, 3\lambda, 1)$$
$$(0, 1, -1) - (1, -1, 0) = (-1, 2, -1)$$
$$(1, 0, -1) - (1, -1, 0) = (0,1, -1)$$

Están en un plano que pasa por el origen. Esto último equivale a que se cumpla la identidad:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda+1 & 3\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

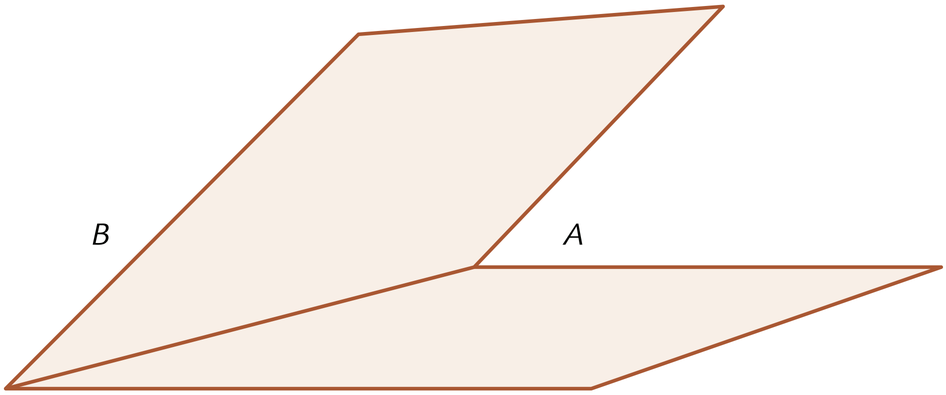
o sea:

$$-4\lambda - 2 = 0$$

Luego $\lambda = -\frac{1}{2}$ y las coordenadas del punto de intersección son $\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},1\right)$.

Ángulos diedros, ángulos triedros

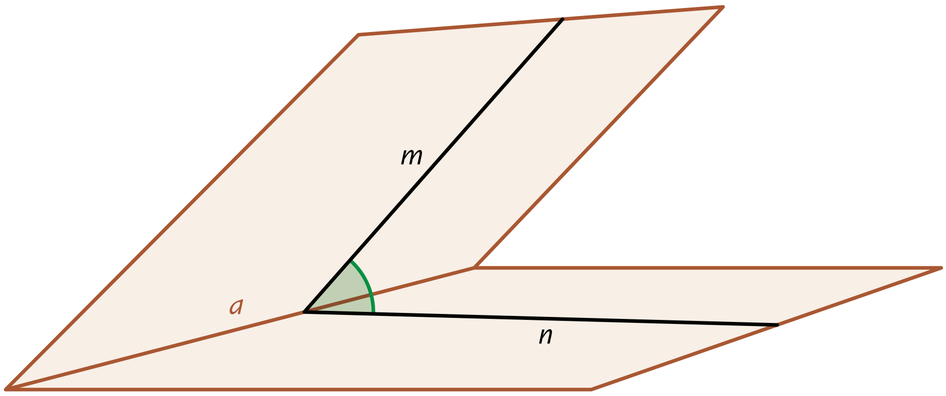
Un *ángulo diedro* es una de las dos regiones del espacio limitado por dos semiplanos unidos por sus bordes.



Los semiplanos limitan dos regiones en el espacio. Cada una es un ángulo diedro, el ángulo en la región con la letra *A* se denomina ángulo convexo, el que tiene la letra *B* se denomina cóncavo.

Los semiplanos se llaman caras del ángulo y el borde común, arista del ángulo.

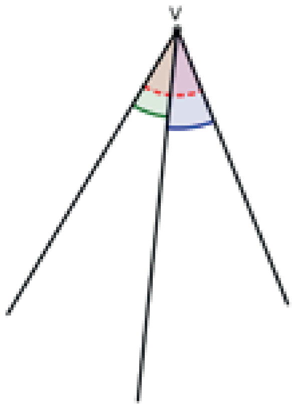
La medida del ángulo diedro es la medida de cualquier ángulo ordinario con un lado en cada cara del ángulo diedro y ambos lados perpendiculares a la arista del diedro.



Los lados *m* y *n* del ángulo ordinario deben ser perpendiculares a la arista *a* del diedro.

Un *ángulo triedro* es una de las dos regiones del espacio limitada por tres ángulos ordinarios unidos de a dos por sus lados y por sus vértices.

Los lados comunes de los ángulos ordinarios se llaman *aristas del ángulo triedro* y el vértice común de los ángulos ordinarios se llama *vértice del ángulo triedro*.



Fuera de las situaciones extremas donde el ángulo diedro es de 180° o el ángulo triedro tiene sus aristas en un mismo plano, uno de los ángulos es *convexo* y el otro *cóncavo*. Podemos decir que el convexo puede ser representado dentro del cóncavo al simetrizarlo respecto del vértice.

Determinantes

En la *Nota de Geometría N° 6* se ha introducido el concepto de determinante de matrices de 2 × 2 y 3 × 3 asociado al cálculo de áreas y volúmenes. En la presente nota se dan un par de elegantes fórmulas para el cálculo del volumen de un tetraedro. Estas fórmulas usan determinantes de matrices de 4 × 4 en un caso y de 5 × 5, en el otro. A continuación se expone brevemente sobre el concepto y el cálculo de determinantes de matrices.

El determinante es un número que se le asigna a una matriz cuadrada numérica, es decir que los elementos en sus entradas son números.

El determinante de una matriz de 1 × 1 es el número que se encuentra en la matriz.

El determinante de una matriz de 2 × 2 está dado por la expresión:

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \times d - c \times b$$

El determinante de una matriz de 3 × 3 se puede definir como:

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \times \det\begin{bmatrix} e & f \\ h & i \end{bmatrix} - b \times \det\begin{bmatrix} d & f \\ g & i \end{bmatrix} + c \times \det\begin{bmatrix} d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

En forma similar, el determinante de una matriz de 4 × 4 tiene una definición en términos de determinantes de 3 × 3.

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{11} \times \det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} - a_{12} \times \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} +$$

$$+ a_{13} \times \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{bmatrix} - a_{14} \times \det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

Definido el determinante para matrices de 4 × 4, se puede imaginar cómo será la definición para matrices de 5 × 5, e incluso continuar con la regla recursiva para matrices de orden superior.

A pesar de lo tedioso que puede ser desarrollar un determinante en forma completa siguiendo la forma recursiva, no es tan complicado evaluar un determinante de orden bajo, debido a las propiedades fundamentales que este posee y se pueden encontrar en los libros introductorios al álgebra lineal.

Para poner en práctica las fórmulas de volumen, se pueden usar programas gratuitos de cálculos, que se encuentran en Internet, por ejemplo, *Matrix Calculator*.

Regla de Cramer

Las coordenadas (x_0, y_0) del punto de intersección de dos rectas en el plano, de las que se tienen sus ecuaciones implícitas:

$$ax + by = c$$
$$dz + ey = f$$

pueden ser calculadas usando la siguiente expresión, conocida como regla de Cramer:

$$x_0 = \frac{\det\begin{bmatrix} c & b \\ f & e \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}} \qquad y_0 = \frac{\det\begin{bmatrix} a & c \\ d & f \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}}$$

Naturalmente, el determinante $ae - db$ tiene que ser distinto de cero.

Lo mismo ocurre si se buscan las coordenadas (x_0, y_0, z_0) del punto de intersección de tres planos en el espacio, dadas sus ecuaciones:

$$ax + by + cz = e$$
$$fx + gy + hz = i$$
$$jx + ky + lz = m$$

En este caso es:

$$x_0 = \frac{\det\begin{bmatrix} e & b & c \\ i & g & h \\ m & k & l \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{bmatrix}} \qquad y_0 = \frac{\det\begin{bmatrix} a & e & c \\ f & i & h \\ j & m & l \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{bmatrix}} \qquad z_0 = \frac{\det\begin{bmatrix} a & b & e \\ f & g & i \\ j & k & m \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ j & k & l \end{bmatrix}}$$

Aquí, el determinante común en los denominadores debe ser distinto de cero.

Corresponde agregar que la regla de Cramer tiene un enunciado similar, en términos de determinantes, en el caso de sistemas lineales de *n* ecuaciones con *n* incógnitas.

Desigualdad de Hadamard

Una interesante desigualdad, debida al matemático francés Jacques Hadamard, establece que el valor absoluto del determinante de una matriz es menor o igual que el producto de las longitudes de sus filas, pensadas como las coordenadas de un vector, y vale la igualdad si las filas son ortogonales dos a dos, esto es, si los productos escalares dos a dos son ceros. También es válido este enunciado si se reemplaza en él la palabra filas por columnas.

En el caso de matrices de 2 × 2 o 3 × 3, las desigualdades de Hadamar que están dadas por:

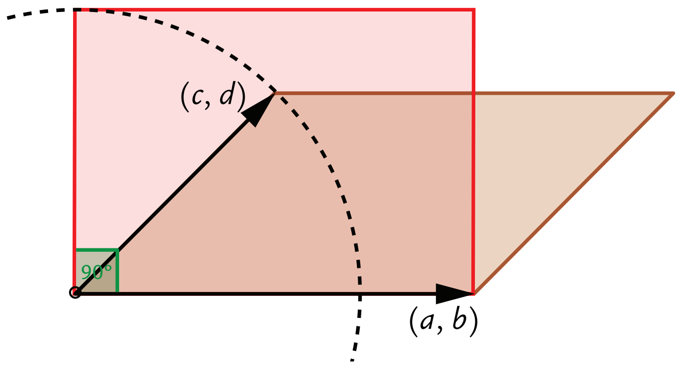
$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| \le \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)\left(\sqrt{c^2+d^2}\right)$$

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| \le \left(\sqrt{a^2+c^2}\right)\left(\sqrt{b^2+d^2}\right)$$

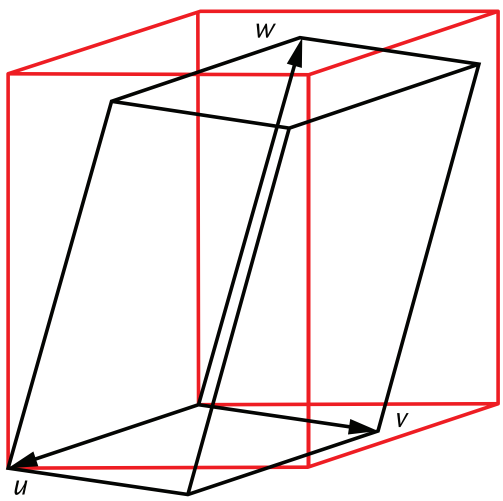
$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right| \le \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)\left(\sqrt{d^2+e^2+f^2}\right)\left(\sqrt{g^2+h^2+i^2}\right)$$

$$\left|\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right| \le \left(\sqrt{a^2+d^2+g^2}\right)\left(\sqrt{b^2+e^2+h^2}\right)\left(\sqrt{c^2+f^2+i^2}\right)$$

pueden interpretarse geométricamente. En el primer caso, se define que el área del paralelogramo generado por los vectores no nulos (a, b) y (c, b) es menor o igual que el área del rectángulo cuyos lados tienen las longitudes de estos vectores, y resulta claro que para que las áreas coincidan, deben ser (a, b) y (c, d) vectores perpendiculares.



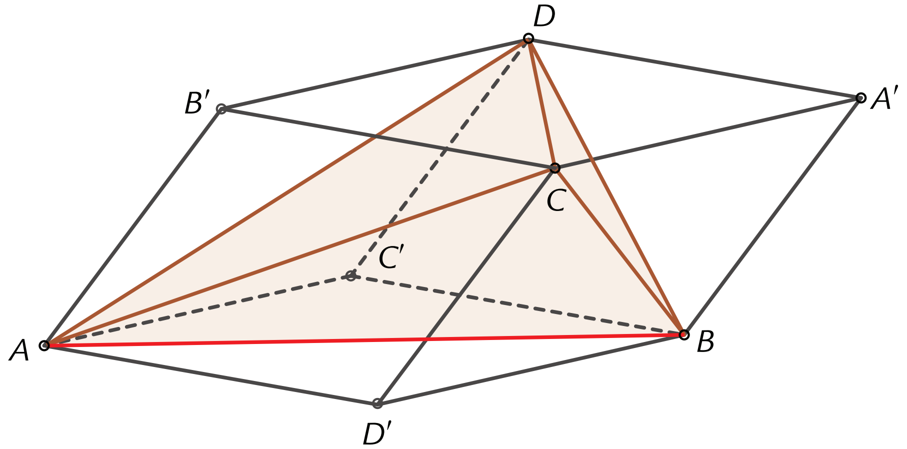
En el segundo caso, se determina que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) es menor o igual que el volumen del paralelepípedo recto cuyas aristas tienen las mismas longitudes que (a, b, c), (d, e, f) y (g, h, i). En la figura, $v = (a, b, c)$, $u = (d, e, f)$ y $w = (g, h, i)$.



Volumen del tetraedro

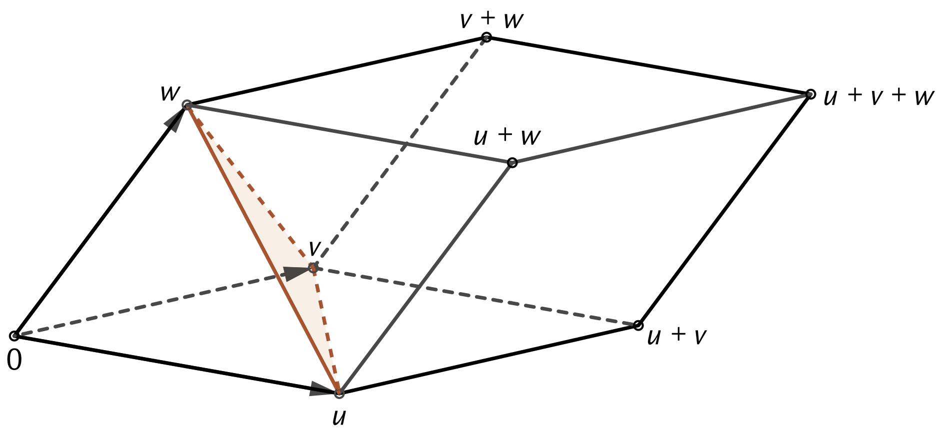
Según puede verse en el Problema 8.18 del libro *Área y volumen en la geometría elemental*, página 301, el volumen de un tetraedro $ABCD$ puede calcularse como un tercio del volumen del paralelepípedo circunscripto al tetraedro, cuyos vértices son A, B, C, D y los respectivos simétricos en cuanto a estos vértices respecto del punto $P = \dfrac{A+B+C+D}{4}$ promedio de los vértices del tetraedro. Entonces los vértices restantes son:

$$A' = 2P - A = \frac{-A+B+C+D}{2}$$
$$B' = 2P - B = \frac{A-B+C+D}{2}$$
$$C' = 2P - C = \frac{A+B-C+D}{2}$$
$$D' = 2P - D = \frac{A+B+C-D}{2}$$



El volumen del paralelepípedo puede calcularse como el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas filas se forman con las coordenadas de $C' - A$, $D' - A$ y $B' - A$.

Sean $u = (a, b, c)$, $v = (d, e, f)$ y $w = (g, h, i)$ vectores en el espacio. El paralelepípedo generado por u, v y w es el que tiene por vértices los vectores u, v, w, $u + v$, $u + w$, $v + w$, $u + v + w$.



El volumen de este paralelepípedo puede ser calculado como:

$$\left| \det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \right|$$

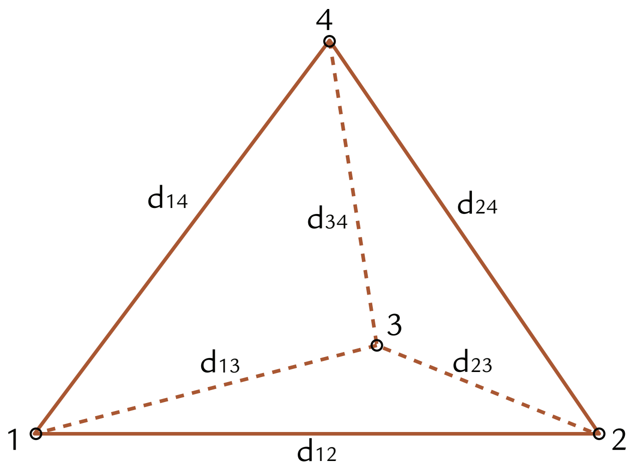
Además, el tetraedro que tiene por vértices a 0, u, v, w tiene por volumen a $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo.

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\right|$$

Fórmula de Tartaglia

La fórmula de Tartaglia permite calcular el volumen de un tetraedro en función de las longitudes de sus aristas; naturalmente es el hecho análogo al de la fórmula de Herón para áreas de triángulos. En esta fórmula interviene la función determinante de una matriz de 5 × 5.

Si enumeramos los vértices de un tetraedro con los dígitos 1, 2, 3, 4 y denotamos con el símbolo d_{ij} la longitud de la arista que tiene como vértices al vértice i y al vértice j:



El volumen del tetraedro está dado por:

$$\sqrt{\frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{12}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{13}^2 & d_{23}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{14}^2 & d_{24}^2 & d_{34}^2 & 0 \end{bmatrix}}$$

Fórmula de Lagrange

La fórmula de Lagrange para el área de un triángulo con vértices en los puntos de coordenadas (a, b), (c, d) y (e, f) puede calcularse como:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{bmatrix}\right|$$

Una fórmula similar para el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos de coordenadas (a, b, c), $(d\ e, f)$, (g, h, i) y (j, k, l) está dada por:

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{bmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 1 \\ g & h & i & 1 \\ j & k & l & 1 \end{bmatrix}\right|$$

Producto escalar

En el plano o en el espacio en los que se ha introducido un sistema de coordenadas cartesianas con origen 0, se define una operación entre vectores, llamada *producto escalar* o *producto interno*, que juega un rol primordial en el enfoque algebraico de la geometría.

Es usual indicar el producto entre dos vectores u y v con el símbolo de paréntesis angulares, es decir, con $\langle u,v\rangle$ se representa el producto escalar entre el vector u y el vector v.

Si bien hay otros productos internos, vamos a definir un producto interno para el plano y un producto interno para el espacio. Estos son los productos canónicos que se utilizan para el tratamiento de la geometría euclideana del plano y el espacio.

Producto escalar en el plano

El producto escalar en el plano se define de la siguiente forma en función de las coordenadas de los vectores.

$$\langle (a, b), (c, d)\rangle = ac + bd$$

Producto escalar en el espacio

En forma similar al caso del plano, el producto escalar en el espacio se define en función de las coordenadas de los vectores.

$$\langle (a, b, c), (d, e, f)\rangle = ad + be + cf$$

Notar que el producto escalar entre dos vectores da como resultado un número.

Propiedades del producto escalar

Ya sea para el plano o el espacio, el producto escalar verifica las propiedades siguientes, expresadas en forma sintética, donde u, v y w representan vectores y α un número real.

i) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$

ii) $\langle u, v + w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$

iii) $\langle \alpha \cdot u, v\rangle = \alpha \cdot \langle u, v\rangle$

iv) $\langle u, u\rangle \geq 0$ y si $\langle u, u\rangle = 0$ entonces $u = 0$.

Norma o longitud, distancia, perpendicularidad

A partir del producto interno se puede establecer la norma o longitud de un vector, la distancia entre dos puntos y la perpendicularidad entre dos vectores.

La *longitud de un vector u* se denotará con $\|u\|$ y está dada por la siguiente expresión:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u,u\rangle}$$

En el caso del plano es:

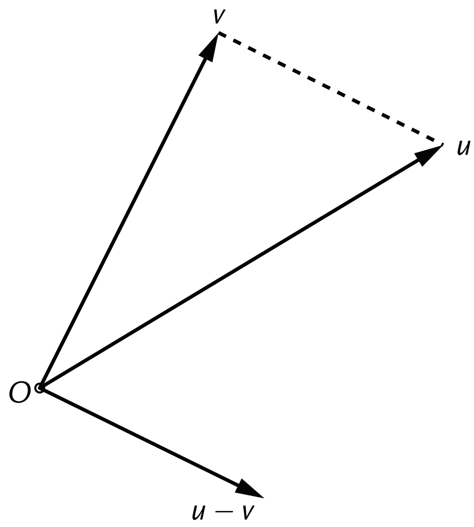
$$\|(a,b)\| = \sqrt{\langle (a,b),(a,b)\rangle} = \sqrt{a^2+b^2}$$

En el caso del espacio es:

$$\|(a,b,c)\| = \sqrt{\langle (a,b,c),(a,b,c)\rangle} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

La distancia entre dos vectores *u* y *v* está dada por la longitud de *u* – *v*, es decir, por la expresión:

$$\|u-v\| = \sqrt{\langle u-v, u-v\rangle}$$



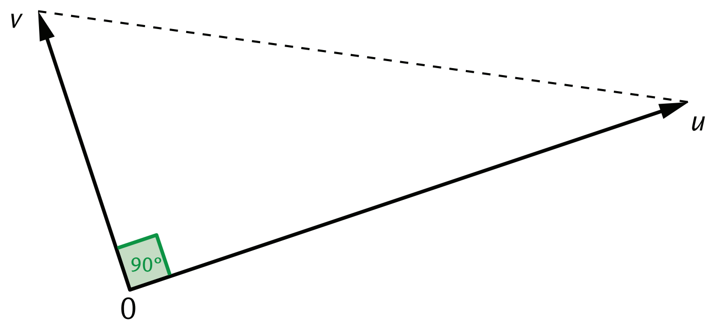
En el caso del plano, la distancia entre (*a*, *b*) y (*c*, *d*) está dada por:

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

En el caso del espacio, la distancia entre (*a*, *b*, *c*) y (*d*, *e*, *f*) es:

$$\sqrt{(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2}$$

Dos vectores *u* y *v* no nulos son perpendiculares si el triángulo con vértices 0, *u*, *v* es recto en 0.



Por el teorema de Pitágoras tendría que ser el cuadrado de la distancia entre *u* y *v* igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de *u* y de *v*, es decir:

$$\langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle$$

Por las propiedades del producto escalar, el primer miembro de la igualdad precedente puede desarrollarse como:

$$\langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle$$

La igualdad planteada equivale a:

$$\langle u, v\rangle = 0$$

De este modo, para establecer la perpendicularidad entre dos vectores solo hay que verificar si el producto escalar entre estos es cero.

Cuando el producto escalar entre dos vectores es cero, se dice que son *vectores ortogonales*: este término extiende el concepto de perpendicularidad que es aplicable a vectores no nulos, es decir que vectores perpendiculares son ortogonales.

Teorema de Pitágoras

Tanto en el plano como en el espacio, se cumple la siguiente identidad conocida como teorema de Pitágoras.

Si los vectores u y w son ortogonales, entonces:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Si u y v son vectores en el plano, o en el espacio, tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

conocida como la desigualdad de Cauchy-Schwarz. También puede conocerse como *desigualdad de Bunyakovsky*.

Complemento ortogonal

Dado un vector u no nulo en el plano, o en el espacio, el lugar geométrico de los vectores w tales que $\langle u, w\rangle = 0$, en el caso del plano, es la recta perpendicular a u que pasa por el origen de coordenadas y, en el caso del espacio, es el plano perpendicular a u que pasa por el origen de coordenadas. Si ponemos $u = (a, b)$ y $w = (x, y)$, el lugar geométrico es la recta de ecuación:

$$\langle u, w\rangle = ax + by = 0$$

Si $u = (a, b, c)$ y $w = (x, y, z)$, el lugar geométrico es el plano de ecuación:

$$\langle u, w\rangle = ax + by + cz = 0$$

En cualquier caso, el lugar geométrico considerado se denomina *complemento ortogonal de u*.

Producto vectorial y producto mixto

Además del producto escalar, en el espacio hay otro producto entre vectores llamado *producto vectorial*. El producto vectorial se notará usando el signo ×, es decir, la expresión $u \times v$ indicará el producto vectorial entre los vectores u y v.

El producto vectorial entre dos vectores es otro vector, damos la expresión del producto vectorial en función de las coordenadas de los vectores.

$$(a, b, c) \times (d, e, f) = (bf - ec, cd - af, ae - db)$$

Notar que si escribimos el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

como:

$$\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$$

entonces el producto vectorial entre (a, b, c) y (d, e, f) es precisamente (α, β, γ).

El producto mixto es el producto escalar entre un vector w y el producto vectorial de dos vectores u y v. La fórmula para este producto sería:

$$\langle w, u \times v \rangle$$

Si ponemos $w = (x, y, z)$, $u = (a, b, c)$, $v = (d, e, f)$ y como antes $u \times v = (\alpha, \beta, \gamma)$ el producto mixto resulta:

$$\langle w, u \times v \rangle = x \cdot \alpha + y \cdot \beta + z \cdot \gamma = \det \begin{bmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto vectorial

Las propiedades enunciadas a continuación se desprenden de la definición del producto vectorial. En este caso, con u, v y w representamos dos vectores en el espacio y con α, un número real.

i) $v \times u = -(u \times v)$

ii) $u \times (v + w) = u \times v + u \times w$

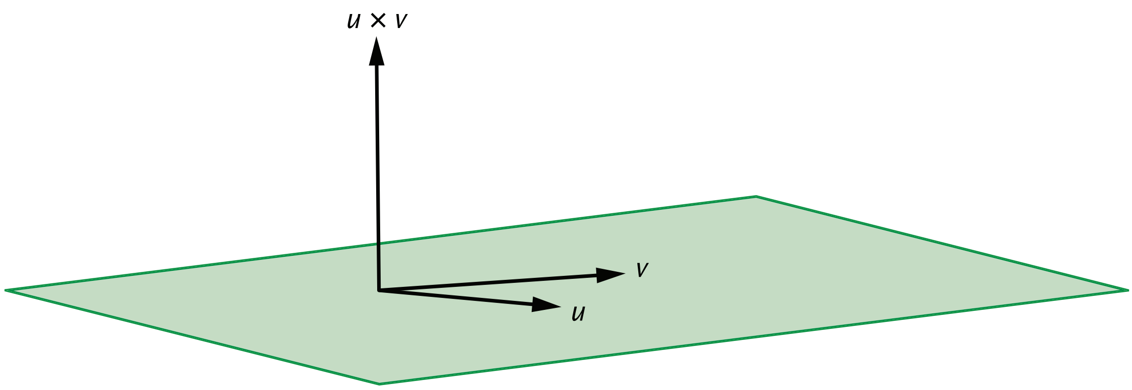
iii) $(\alpha \cdot u) \times v = \alpha \cdot (u \times v) = u \times (\alpha v)$

iv) $\langle u, u \times v \rangle = 0 = \langle v, u \times v \rangle$

v) $u \times (\alpha \cdot u) = 0$

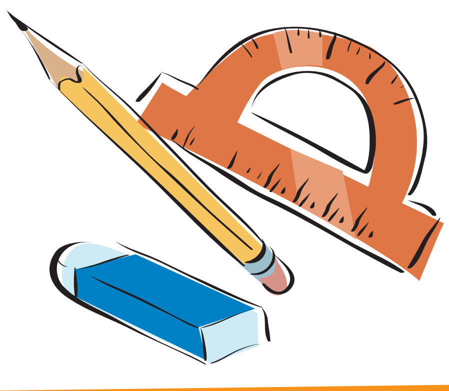
vi) $\|\alpha \cdot u\| = |\alpha| \cdot \|u\|$

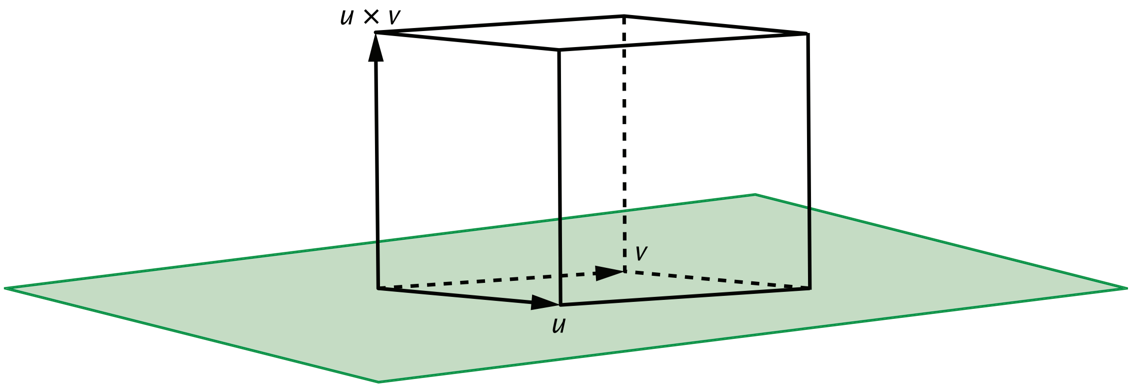
La cuarta propiedad establece que si u, v y $u \times v$ son vectores no nulos, entonces u y $u \times v$ son perpendiculares, también v y $u \times v$ son perpendiculares. En consecuencia, $u \times v$ es un vector perpendicular al plano que pasa por 0, u y v. El plano mencionado se conoce como *plano generado por u y v*.



En la figura precedente, el paralelogramo representa el plano generado por u y v, el producto vectorial $u \times v$ es perpendicular a este plano.

Si consideramos el paralelepípedo generado por u, v y $u \times v$;





por lo visto en el apéndice del N° 6 de *Notas de Geometría*, el volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas filas están dadas por las coordenadas de u, v y $u \times v$, en cualquier orden. Si ponemos, como antes, $u = (a, b, c)$, $v = (d, e, f)$ y $u \times v = (\alpha, \beta\ \gamma)$, el volumen es el valor absoluto del determinante:

$$\det\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \langle u \times v, u \times v \rangle = \|u \times v\|^2$$

donde la igualdad surge de elegir $w = u \times v$ en la expresión del producto mixto anteriormente expuesta. Notar que el miembro de la derecha $\langle u \times v, u \times v\rangle$ es el cuadrado de la longitud de $u \times v$.

Por otra parte, el volumen del paralelepípedo es el área de la base que notamos con δ por la altura, puesto que $u \times v$ es perpendicular al plano de la base del paralelepípedo, resulta que la altura es $\|u \times v\|$. Igualando las expresiones para el volumen:

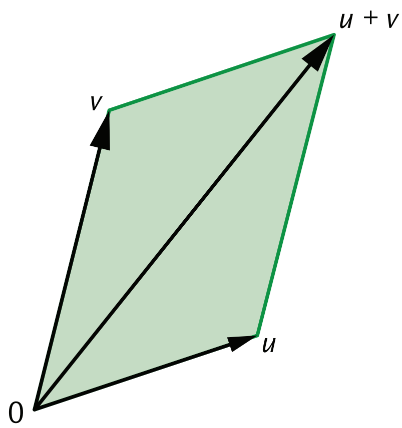
$$\delta \times \|u \times v\| = \|u \times v\|^2$$

y simplificando, obtenemos:

$$\delta = \|u \times v\|$$

Área del paralelogramo

Dados dos vectores u y v en el espacio que no estén sobre una misma recta, se genera un paralelogramo tomando como vértices los puntos 0, u, v y $u + v$, al que llamamos *paralelogramo generado* por u y v.

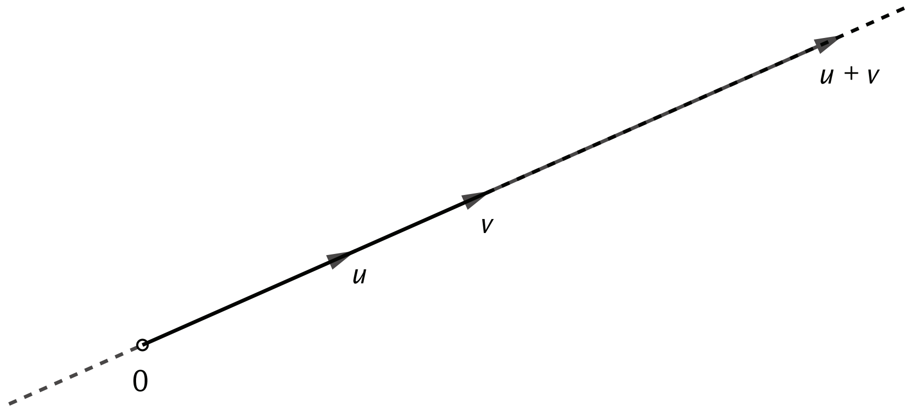


Es importante destacar este hecho:

El valor del área del paralelogramo generado por u y v coincide con el valor de la longitud del producto vectorial u × v.

Nota: Dos vectores u y v no siempre generan un paralelogramo: si los vectores están sobre una misma recta que pasa por el origen, 0, u, v y $u + v$ no son los vértices de un paralelogramo.

La siguiente figura ilustra una tal situación de lo que se podría llamar un *paralelogramo degenerado.*

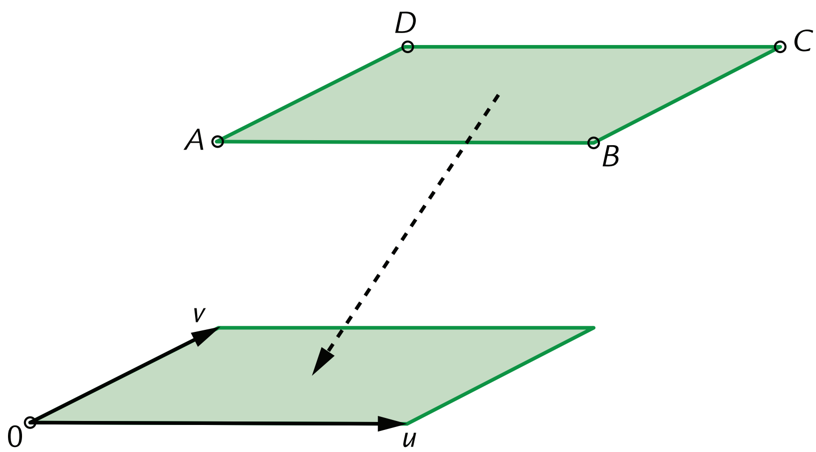


Este es el caso en que u es un múltiplo de v o v es un múltiplo de u, siendo el producto vectorial entre u y v igual a cero.

Del mismo modo, tres vectores no generan un paralelepípedo si se encuentran sobre un mismo plano.

El área de un paralelogramo de vértices ABCD, ordenados siguiendo el contorno, coincide con el área del paralelogramo generado por los vectores $u = B - A$, $v = D - A$.

La afirmación precedente se funda en el hecho de que, si trasladamos $ABCD$ usando el vector $-A$, obtenemos el paralelogramo generado por los vectores u y v.



La fórmula de área dada por el producto vectorial también puede usarse para calcular áreas de triángulos en el espacio. Dado que todo triángulo es la mitad de un paralelogramo, por ejemplo, el triángulo de vértices ABC es la mitad del paralelogramo de vértices $ABDC$ donde $D = B + C - A$.

Hemos usado el término mitad para expresar que ABC es uno de los dos triángulos congruentes que conforman el paralelogramo.

Alineación

Podemos establecer la siguiente propiedad referida al producto vectorial.

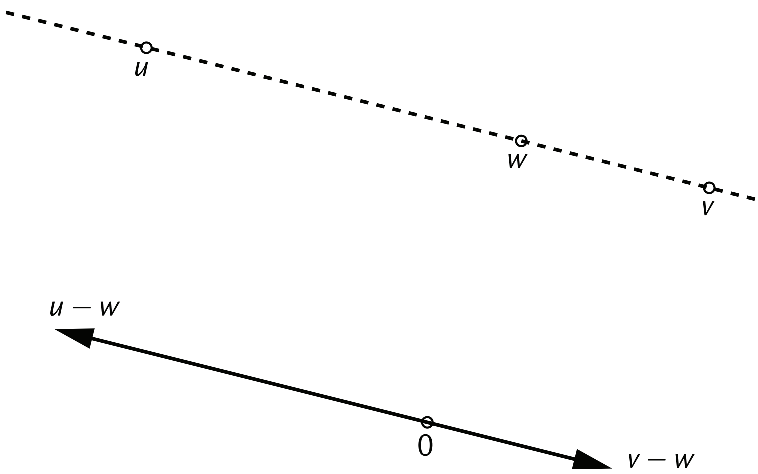
Si $u \times v = 0$ *entonces* u *y* v *están sobre una misma recta.*

Es claro que, si u y v no estuvieran sobre una misma recta, ellos generarían un paralelogramo cuya área sería un número positivo igual a la longitud de $u \times v$, esto contradice la igualdad $u \times v = 0$.

Esta propiedad puede ser utilizada para decidir si tres puntos en el espacio están alineados o no.

Que los puntos u, v, w del espacio estén alineados equivale a que se dé la igualdad:

$$(v - u) \times (w - u) = 0$$



La posición relativa de los puntos u, v, w es la misma que la de los puntos 0, $u - w$, $v - w$, dado que estos últimos se obtienen por traslación de los primeros usando el vector $-w$.

Ecuaciones implícitas de la recta que pasa por dos puntos

Dados dos puntos distintos u y v, en el plano, de coordenadas $u = (a, b)$ y $v = (d, e)$, la condición de que un punto $w = (x, y)$ esté en la recta que pasa por u y v equivale a que el triángulo de vértices wuv tenga área cero. Por la Fórmula de Lagrange, que el área de dicho triángulo sea cero, equivale a que se verifique la ecuación:

$$\det \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ x & y & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Podemos tomar la ecuación precedente como la ecuación implícita de la recta que pasa por los puntos u y v.

Dados dos puntos distintos de coordenadas $u = (a, b, c)$ y $v = (d, e, f)$ en el espacio, se puede encontrar ecuaciones implícitas para la recta m que pasa por estos puntos, partiendo del criterio enunciado anteriormente que establece que u, v y w estén alineados, equivale a que se cumpla la igualdad $(v - u) \times (w - u) = 0$. Si $w = (x, y, z)$, esta identidad se expresa como:

$$(c - f)y + (e - b)z + bf - ce = 0$$

$$(f - c)x + (a - d)z + cd - f = 0$$

$$(b - e)x + (d - a)y + ae - bd = 0$$

Si bien hay tres ecuaciones, solo dos de estas son suficientes para determinar los puntos de la recta m. Para justificar este hecho de que dos ecuaciones son suficientes, consideremos, por ejemplo, $c \neq f$ y mostremos que si la primera y la segunda ecuación se cumplen, entonces la tercera también. Dado que, por propiedad del producto vectorial es:

$$\langle v - u, (v - u) \times (w - u) \rangle = 0$$

Es decir:

$$(a-d)((c-f)y+(e-b)z+bf-ce)+(b-e)((f-c)x+(a-d)z+cd-f)+$$
$$+(c-f)((b-e)x+(d-a)y+ae-bd)=0$$

Si las ecuaciones primera y segunda se cumplen, resulta de la identidad precedente que:

$$\begin{aligned}(a-d)\cdot 0+(b-e)\cdot 0+(c-f)((b-e)x+(d-a)y+ae-bd) &= \\ =(c-f)((b-e)x+(d-a)y+ae-bd) &= 0\end{aligned}$$

Como $c \neq f$, $c-f \neq 0$ y debe ser:

$$(b-e)x+(d-a)y+ae-bd=0$$

Con el mismo razonamiento se puede mostrar que si $a \neq d$, la primera ecuación es innecesaria y si $b \neq e$, la segunda ecuación es innecesaria.

Ecuaciones vectorial y paramétrica de recta que pasa por dos puntos

La recta m pasa por dos puntos distintos A y B. Si el punto X está en m, trasladando según el vector A, se tiene que $X-A$ es un múltiplo de $B-A$, es decir que existe un número real λ tal que:

$$X-A=\lambda\cdot(B-A)$$

o bien:

$$X=\lambda B+(1-\lambda)A$$

La expresión $\lambda B+(1-\lambda)A$ donde λ recorre los números reales, se llama *ecuación vectorial* de la recta que pasa por AB.

Ahora si $A=(a,b)$ y $B=(c,d)$ en el plano, o $A=(a,b,c)$, $B=(d,e,f)$ en el espacio, la ecuación vectorial puede escribirse, en cada caso, como:

$$((c-a)\lambda+a,\ \ (d-b)\lambda+b)$$
$$((d-a)\lambda+a,\ \ (e-b)\lambda+b,\ (f-c)\lambda+c)$$

Estas ecuaciones son: la *ecuación paramétrica de la recta m,* en el plano y en el espacio, respectivamente.

Ecuación implícita del plano que pasa por *A, B, C*

Pongamos $A=(a,b,c)$, $B=(d,e,f)$ y $C=(g,h,i)$, tres puntos no alineados por donde pasa un plano. La condición para que un punto $X=(x,y,z)$ esté en el plano que pasa por ABC equivale a que el tetraedro de vértices $XABC$ tenga volumen cero. Según la Fórmula de Lagrange, esto es:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & z & 1\\ a & b & c & 1\\ d & e & f & 1\\ g & h & i & 1\end{bmatrix}=0$$

Ecuación vectorial y paramétrica del plano que pasa por *A, B, C*

Si X está en el plano Π que pasa por los puntos no alineados A, B, C, $X-A$ está en el plano generado por los vectores $B-A$ y $C-A$, es decir del plano que se obtiene al tomar todas las sumas:

$$\alpha\cdot(B-A)+\beta\cdot(B-A)$$

donde α y β recorren los números reales. Resulta $X = \alpha \cdot (B - A) + \beta \cdot (B - A) + A$, y, como en el caso de la recta, $\alpha \cdot (B - A) + \beta \cdot (B - A) + A$ es la ecuación vectorial del plano Π.

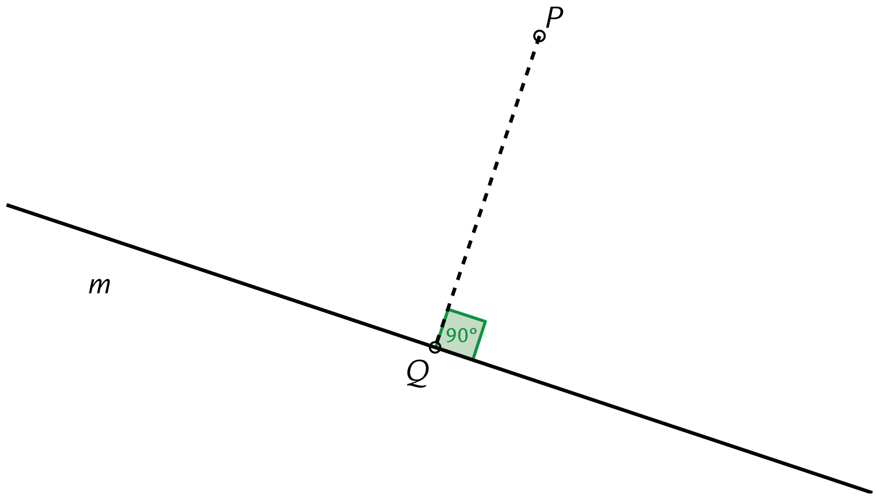
Ahora, si $A = (a, b, c)$, $B = (d, e, f)$ y $C = (g, h, i)$, la ecuación vectorial puede escribirse como:

$$((d - a)\alpha + (g - a)\beta + a, (e - b)\alpha + (h - b)\beta + b, (f - c)\alpha + (i - c)\beta + c)$$

siendo esta última la *ecuación paramétrica del plano* Π.

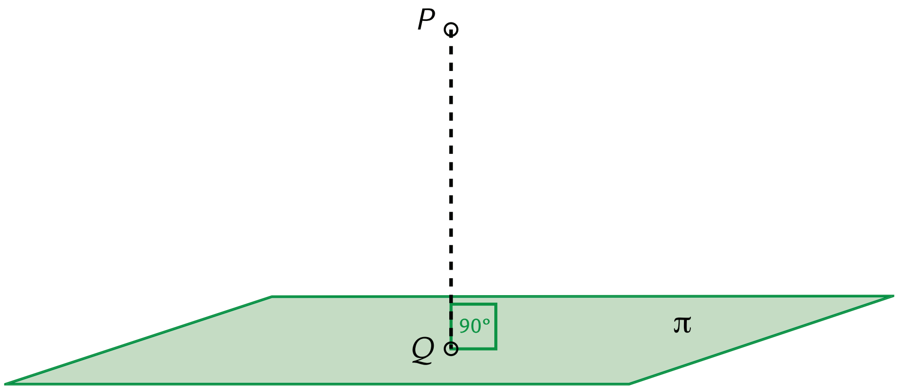
Proyección ortogonal

Dada la recta m en el plano o en el espacio, se puede considerar la *proyección ortogonal* de un punto P sobre la recta m, definida como el punto Q en m tal que el segmento PQ es perpendicular a m.



La distancia desde P a Q es la menor distancia entre las distancias desde P a un punto de la recta m. Esta se llama *distancia del punto P a la recta m*.

Del mismo modo, dado un plano Π en el espacio, la *proyección ortogonal* de un punto P sobre la recta m, definida como el punto Q en m tal que PQ es perpendicular a Π.

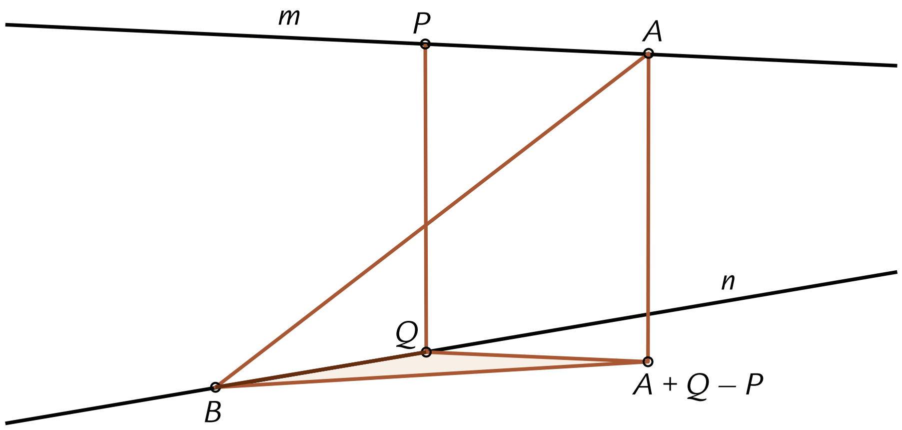


Aquí también, la distancia desde P a Q es la menor distancia entre las distancias desde P a un punto del plano Π. Esta se llama *distancia del punto P al plano* Π.

La *distancia entre dos rectas m y n* es la menor distancia que puede obtenerse entre un punto de m y un punto de n. Es claro que, si las rectas se cortan, esta distancia es cero.

En otro caso, las rectas pueden ser paralelas o alabeadas. En cualquiera de estos casos, veremos que si P y Q son puntos en m y n, respectivamente, tales que el segmento PQ es perpendicular a m y a n, entonces la distancia entre m y n es la longitud del segmento PQ.

Dados los puntos A y B en m y n, respectivamente. Si A es distinto de P, podemos formar el paralelogramo de vértices P, Q, $A + Q - P$, A, que es un rectángulo puesto que el triángulo APQ es recto en P.



Si consideramos el plano Π que pasa por A, P, Q, el segmento que une A con $A + Q - P$ es perpendicular a Π, pues por ser paralelo a PQ, es perpendicular al segmento BQ y es perpendicular al segmento que une Q con $A + Q - P$, que es un lado del rectángulo. En consecuencia, $A + Q - P$ es la proyección de A sobre el plano Π, por lo tanto, la distancia desde A a B es mayor o igual que la distancia desde A al plano Π, que es la distancia desde A a $A + Q - P$, que es igual a la distancia desde P a Q.

Cálculo de la proyección ortogonal

Consideremos primero el caso de la recta m que pasa por 0 y u y el punto v que no esté en m.

El múltiplo Q' del vector u dado por:

$$Q' = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u$$

está en m y el segmento que une v con Q' es paralelo a $v - Q'$. Si calculamos:

$$\langle v - Q', u\rangle = \langle v,u\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot\langle u,u\rangle = 0$$

se tiene que $v - Q'$ es perpendicular a u, luego es perpendicular a m.

La fórmula de la proyección, en este caso, es:

$$Q' = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}\cdot u$$

En el caso general, si tenemos m la recta que pasa por AB y el punto P, podemos trasladar la situación al caso anterior con $u = B - A$, $v = P - A$ usando la traslación asociada al vector $-A$.

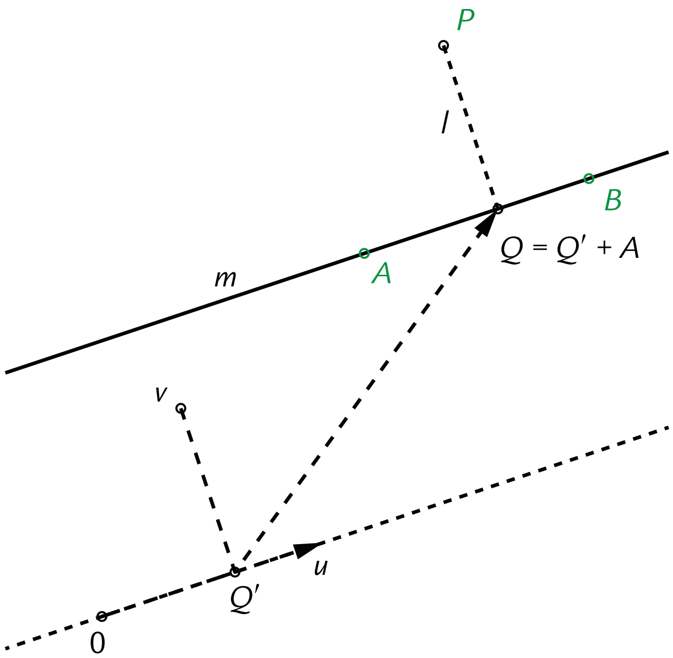
La proyección es:

$$Q' = \frac{\langle B-A, P-A\rangle}{\langle B-A, B-A\rangle}\cdot(B-A)$$

Para retornar al caso general, trasladamos usando el vector A y obtenemos:

$$Q = \frac{\langle B-A, P-A\rangle}{\langle B-A, B-A\rangle}\cdot(B-A) + A$$

La figura ilustra la situación.



Para calcular la proyección del punto w sobre el plano Π que pasa por 0, u, v, es decir por el plano generado por los vectores u y v, ponemos:

$$Q' = w - \frac{\langle u \times v, w \rangle}{\langle u \times v, u \times v \rangle} \cdot (u \times v)$$

Usando las propiedades del producto escalar es posible mostrar que Q' está en el plano Π y que el segmento wQ' es paralelo a $u \times v$, es decir perpendicular a Π.

Para el caso general, dado el punto P y el plano que pasa por ABC, llevamos el problema al caso anterior poniendo $u = B - A$, $v = C - A$, $w = P - A$ para obtener la proyección Q como $Q' + A$.

La fórmula de la proyección en este caso es:

$$Q = P - \frac{\langle (B-A) \times (C-A), P-A \rangle}{\|(B-A) \times (C-A)\|^2} \cdot ((B-A) \times (C-A))$$

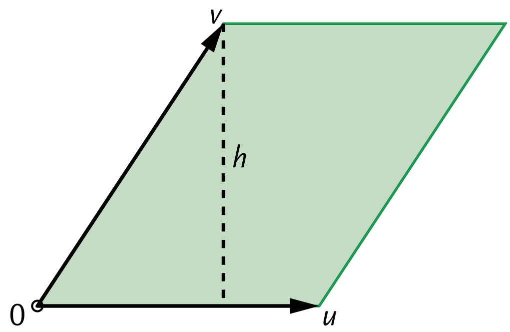
Distancias varias

i) **Distancia desde un punto P a la recta m que pasa por los puntos A, B**

Poniendo $u = B - A$, $v = P - A$, por lo expuesto sobre proyección ortogonal, la distancia de P a m coincide con la distancia desde v a su proyección sobre la recta generada por u, es decir, al vector $\frac{\langle u,v \rangle}{\langle u,u \rangle} \cdot u$. La distancia está dada entonces por:

$$\left\| v - \frac{\langle u,v \rangle}{\langle u,u \rangle} \cdot u \right\|$$

Otra alternativa es usar la fórmula de área del paralelogramo generado por u y v dada por la longitud del producto vectorial $u \times v$. El área es también igual a la longitud de un lado por la altura correspondiente. Podemos usar $\|u\|$ como longitud de un lado y la altura correspondiente h, que coincide con la distancia desde v a la recta generada por u.



Resulta:

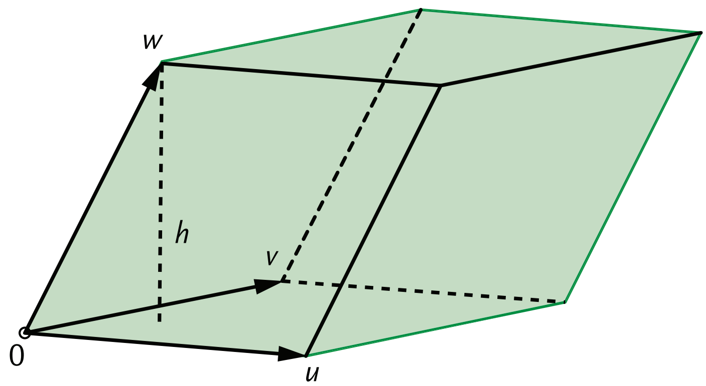
$$h = \frac{\|u \times v\|}{\|u\|}$$

ii) Distancia desde un punto P al plano Π que pasa por los puntos A, B, C

En este caso ponemos: $u = B - A$, $v = C - A$ y $w = P - A$. La distancia está dada por la distancia entre w y $w - \dfrac{\langle u \times v, w\rangle}{\langle u \times v, u \times v\rangle} \cdot (u \times v)$, es decir, esta es:

$$\left\| \frac{\langle u \times v, w\rangle}{\langle u \times v, u \times v\rangle} \cdot (u \times v) \right\| = \frac{|\langle u \times v, w\rangle|}{\|u \times v\|}$$

Otra forma es usar el volumen del paralelepípedo generado por u, v y w, dado por el valor absoluto del determinante de la matriz cuyas filas se forman con las coordenadas de u, v y w. También el volumen es área de una cara por la altura correspondiente. Usando la cara generada por u y v, cuya área es $\|u \times v\|$, la altura correspondiente h coincide con la distancia desde w al plano generado por u y v.



La distancia está dada por:

$$\frac{\left| \det \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix} \right|}{\|u \times v\|}$$

donde $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$.

iii) Distancia desde un punto P al plano Π de ecuación $ax + by + cz = d$

En primer lugar, mostremos que el plano Π es paralelo al plano γ de ecuación $ax + by + cz = 0$. Para ello mostraremos que γ se puede trasladar de modo que coincida con π. Si $v = (d, e, f)$

es un punto en Π, veremos que $\gamma + v = \Pi$ donde con $\gamma + v$ estamos indicando el trasladado de γ según el vector v.

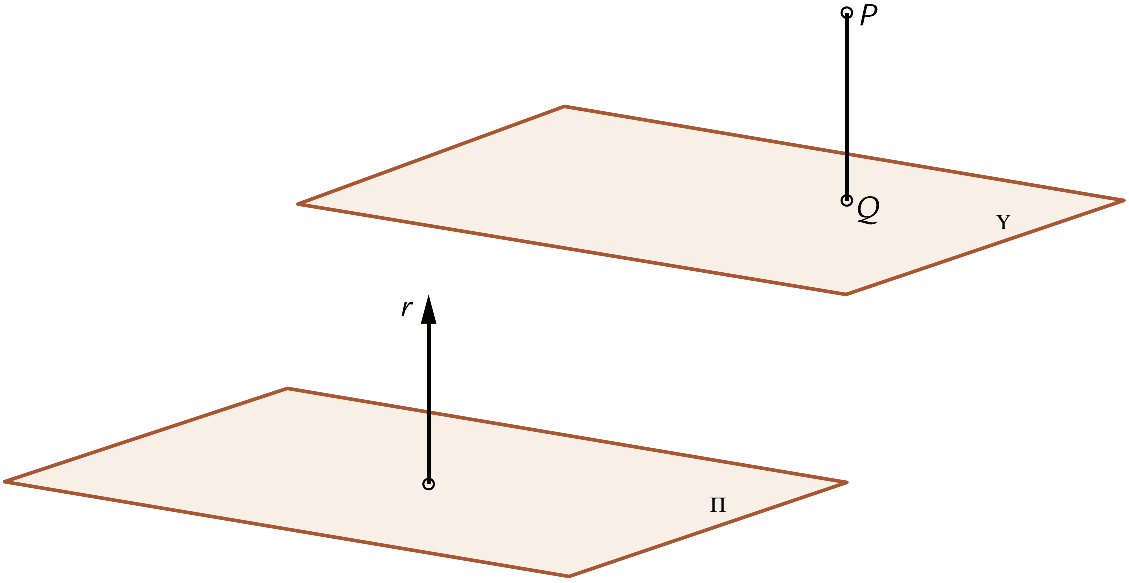
Si $w = (h, i, j)$ está en γ, entonces $w + v = (d + h, e + i, j + f)$ verifica la identidad:

$$a\,(d + h) + b(e + i) + c(j + f) = ad + be + cj + ah + bi + cf = d + 0 = d$$

Es decir, $w + v$ está en Π.

Por otra parte, cualquier punto u de Π puede obtenerse trasladando un elemento de γ según w. En efecto, $u = u - w + w$ y se puede comprobar que $u - w$ verifica la ecuación de γ, es decir, es un elemento de γ.

El vector $r = (a, b, c)$ es perpendicular a γ, puesto que γ está dado por los vectores $u = (x, y, z)$ tales que $\langle r, u\rangle = 0$.



La proyección Q de P sobre γ puede obtenerse sumando a P un múltiplo de r, es decir $Q = P + \alpha \cdot r$, siendo, además:

$$\langle r, Q\rangle = d = \langle r, P\rangle + \alpha \cdot \langle r, r\rangle$$

de donde resulta:

$$\alpha = \frac{d - \langle r, P\rangle}{\|r\|^2}$$

La distancia desde P a Q es:

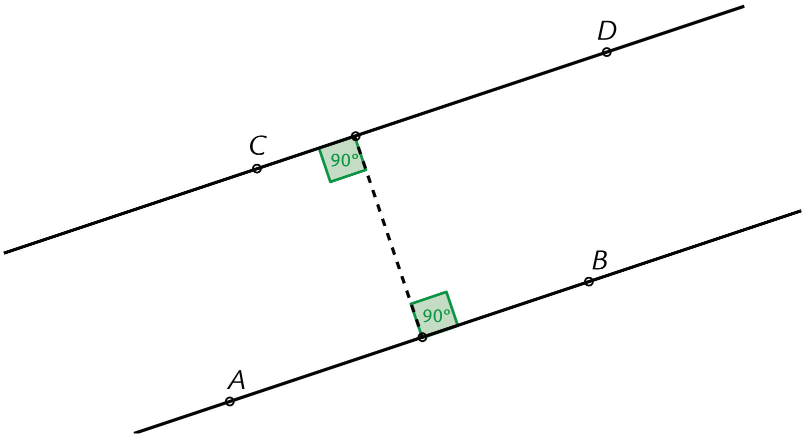
$$\|Q - P\| = \|\alpha \cdot r\| = \frac{|d - \langle r, P\rangle|}{\|r\|} = \frac{|\langle r, P\rangle - d|}{\|r\|}$$

De esta manera obtenemos una fórmula para hallar la distancia desde P a π cuando conocemos una ecuación para π y las coordenadas de P. Si $P = (m, n, k)$ la distancia está dada por la fórmula:

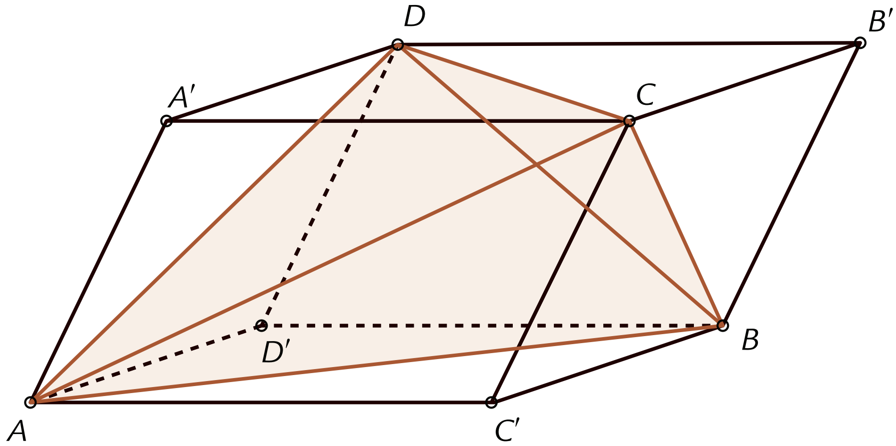
$$\frac{|am + bn + ck - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

iv) Distancia entre la recta que pasa por A, B y la recta que pasa por C, D

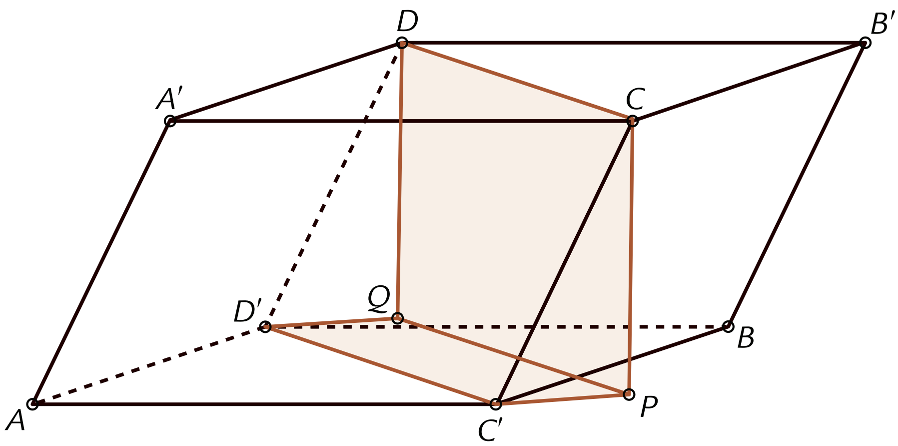
Si las rectas se cortan, la distancia es cero. Si las rectas son paralelas, la distancia es igual a la distancia desde un punto de la recta que pasa por A, B, a la recta que pasa por C, D.



Si A, B, C, y D fueran los vértices de un tetraedro donde los segmentos AB y CD son aristas opuestas, veríamos que la distancia entre las rectas es igual a la altura del paralelepípedo circunscripto al tetraedro respecto de la cara que contiene a AB.



Si P es la proyección de C sobre el plano Π de la cara $AC'BD'$,

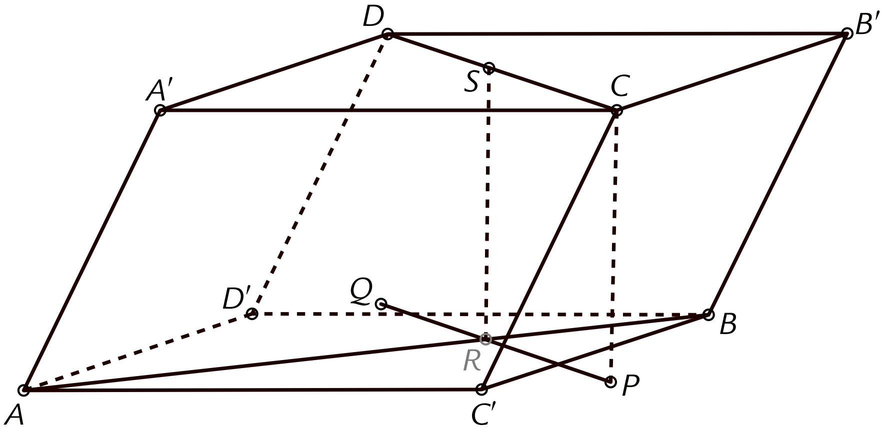


$P - C$ es perpendicular a Π y teniendo en cuenta que:

$$Q = D + P - C = P + D' - C'$$

dado que $D - C = D' - C'$, y que los puntos C', D', P, Q son los vértices de un paralelogramo, resulta entonces que Q está en el plano Π y siendo el segmento DQ perpendicular a Π, Q es la proyección de D sobre Π.

Como PQ es paralelo a $C'D'$, PQ no es paralelo a AB, luego la recta que pasa por PQ corta a la recta que pasa por AB en un punto R del plano Π, este punto es la proyección de un punto S sobre la recta CD.



El segmento SR es perpendicular a los segmentos AB y CD, es decir que la distancia buscada entre estas rectas es la longitud de SR, que es la altura del paralelepípedo circunscripto al tetraedro $ABCD$. Esta distancia puede calcularse como la distancia desde C al plano que pasa por A, B, C'.

Simetría respecto de un punto, una recta, un plano

La simetría de un punto P respecto de:

i) un punto C, es un punto P' tal que C sea el punto medio del segmento PP';

ii) una recta m, es un punto P' tal que el punto medio del segmento PP' esté en m y el segmento sea perpendicular a m;

iii) un plano Π, es un punto P' tal que el punto medio del segmento PP' esté en Π y el segmento sea perpendicular a Π.

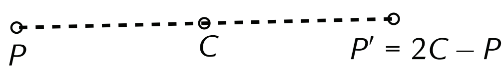
En el primer caso debe ser:

$$C = \frac{P + P'}{2}$$

De modo que:

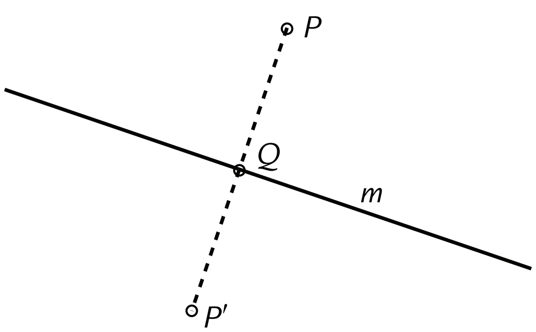
$$P' = 2C - P$$

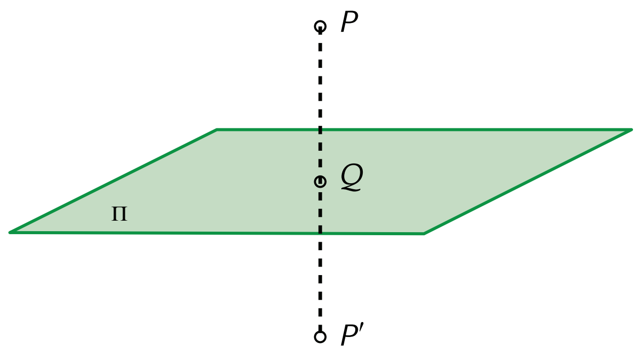
En la figura, P' es simétrico de P respecto de C.



Para la simetría, tanto respecto de una recta m como de un plano Π, usamos la proyección ortogonal Q de P: sea sobre la recta m o el plano Π, para obtener P' como:

$$P' = 2Q - P$$





NOTAS DE GEOMETRÍA 7

Homotecia

La siguiente fórmula corresponde a la expresión vectorial de una homotecia con centro C y razón λ. El transformado por esta homotecia de un punto P es el punto P' dado por:

$$P' = C + \lambda \cdot (P - C) = \lambda P + (1 - \lambda)C$$

Paralelismo y perpendicularidad

Las rectas m y n son paralelas si dados dos puntos distintos en cada recta: A y B en m, C y D en n, los vectores $B - A$ y $D - C$ son uno múltiplo del otro.

Un plano Π y una recta m son paralelos si Π contiene una recta n paralela a m.

Dos planos son paralelos si coinciden o no se cortan.

Las rectas m y n son perpendiculares si dados dos puntos distintos en cada recta: A y B en m y C y D en n, el producto escalar $\langle B - A, C - D\rangle = 0$.

Un plano Π y una recta m son perpendiculares si m es perpendicular a dos rectas no paralelas que estén en Π.

Dos planos son perpendiculares si se cortan formando un ángulo diedro de 90°.

Ángulos

El ángulo entre dos rectas, m y n, es el ángulo que forman una recta paralela a m y una recta paralela a n que pasen por un mismo punto.

Nota: Dos rectas que se cortan delimitan cuatro ángulos, iguales de a pares por opuestos por el vértice. Convenimos en llamar ángulo entre las rectas al menor valor entre los dos posibles.

El ángulo entre una recta m y un plano Π es el ángulo que forma m con la recta obtenida al proyectar ortogonalmente m sobre Π.

El ángulo entre dos planos paralelos es 0. El ángulo entre dos planos que se cortan en una recta es el menor valor de los ángulos diedros que estos planos limitan.

Problemas propuestos

1. Hallar la altura del tetraedro que tiene por vértices a los puntos de coordenadas (1, 1, 1), (–1, –1, 1), (1, –1, –1), (–1, 1, –1).

2. Hallar el pie de cada altura del triángulo en el plano cuyos vértices están dados por los puntos de coordenadas (3, 2), (–4, 1), (7, 5).

3. Hallar el pie de una altura del triángulo en el espacio cuyos vértices están dados por los puntos de coordenadas (2, 1, 2), (–3, –1, 1), (0, 2, 3).

4. Hallar las coordenadas del circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (9, 2), (8, 5) y (–3, 8).

5. Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo del Problema 4.

6. Hallar un pie de altura del tetraedro cuyos vértices son (1, 1, 1), (–1, –1, 1), (1, –1, –1), (–1, 1, –1).

7. Las aristas de un paralelepípedo miden 6 cm, 9 cm y 11 cm.

i) ¿Puede tener un volumen de 600 cm^3?

ii) Si su volumen es 594 cm^3, hallar el área de cada cara del paralelepípedo.

8. Hallar el volumen del paralelepípedo generado por (1, 2, 3), (2, –1, 2) y el producto vectorial

$$(1, 2, 3) \times (2, -1, 2).$$

9. Hallar el pie de la altura de la pirámide cuyos vértices son los puntos de coordenadas (1, 1, 0), (1, –1, 0), (–1, –1, 0), (–1, 1, 0), (7, 5, –9).

10. ¿Sobre qué cara apoyaría el tetraedro cuyos vértices son los puntos de coordenadas (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0) y (1, 0, 0) para que alcance la menor altura posible?

11. El segmento *AB* es la proyección del segmento *CD* sobre el plano π. ¿Cuándo ocurre que *AB* y *CD* tienen la misma longitud?

12. ¿Qué ángulo debe haber entre un segmento y un plano para que la longitud de la proyección del segmento sobre el plano sea la mitad de la longitud del segmento?

13. Las proyecciones de un segmento sobre los planos coordenados tienen longitudes 3 cm, 4 cm y 5 cm. Hallar la longitud del segmento.

14. Las proyecciones ortogonales de un cuadrilátero en el espacio, sobre los planos coordenados, son figuras de áreas 3 cm², 4 cm² y 5 cm². Hallar el área del cuadrilátero.

15. Hallar la distancia entre el punto de coordenadas (4, 2, 1) y el plano de ecuación:

$$2x - y + 3z = 5$$

16. Hallar un punto *A* en la recta *m* y un punto *B* en la recta *n* tales que el segmento *AB* sea perpendicular a ambas rectas, sabiendo que *m* pasa por los puntos de coordenadas (2, 2, 1), (1, 2, 2) y *n* pasa por (1, 1, 2) y (2, 1, 1).

17. Hallar la distancia entre dos aristas opuestas de un tetraedro regular de 10 cm de arista. Hallar la altura del tetraedro.

18. Usando regla y compás, dibujar el ángulo diedro entre dos caras de un tetraedro regular. Lo mismo para un octaedro.

19. Hallar la ecuación paramétrica y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (1, 3, 5) y (−2, 0, −7).

20. Mostrar que los ángulos diedros en un ángulo triedro suman más de 180° y menos de 540°.

21. ¿Hay un tetraedro cuyas aristas midan 3 cm, 3 cm, 4 cm, 4 cm, 5 cm y 5 cm? Si encontró uno, ¿qué volumen tiene?

22. ¿Puede ser (–2, 2, 3) el producto vectorial de dos vectores de longitud 2?

23. Encontrar el punto simétrico de (1, 3, 5) respecto del plano de ecuación $x + y + z = 1$.

24. Los puntos de coordenadas (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 2, –1) son los baricentros de los triángulos *ABC*, *BCD*, *CDA* y *DAB*. Hallar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero *ABCD*.

25. ¿Cabe una esfera de radio 3 entre los planos paralelos cuyas ecuaciones son $x + y + z = 1$ y $x + y + z = 7$?

Bibliografía

Área y Volumen en la Geometría Elemental.
José Araujo, Guillermo Keilhauer, Norma Pietrocola, Valeri Vavilov –Red Olímpica–

Materiales de Matemática para 6° año EGB.
Carlos Bosch Giral, Luz María Ma rván Garduño, Agustín Prieto Huesca –Red Olímpica–

Resolviendo Problemas de Matemática.
Juan Ignacio Fuxman Bass –Red Olímpica–

Sorpresas Geométricas.
Claudi Alsina –Red Olímpica–

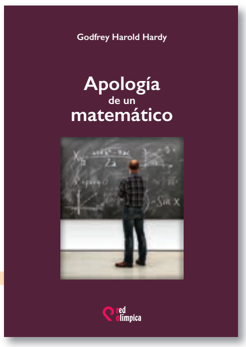
Viaje al país de los rectángulos.
Claudi Alsina –Red Olímpica–

Colección de Problemas Ñandú.
Julia Seveso, Graciela Ferrarini –Red Olímpica–

Colección New Mathematical Library de la Mathematical Association of America.

- Aritmética Elemental para la Formación Matemática. Volumen 1. *Enzo Gentile*
- Aritmética Elemental para la Formación Matemática. Volumen 2. *Enzo Gentile*
- Retorno a la Geometría. *H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer*
- El Ingenio en las Matemáticas. *Ross Honsberger*
- Métodos Matemáticos de la Ciencia. *George Pólya*

Olimpíadas de Mayo XVII al XXIV
Patricia Fauring, Flora Gutiérrez –Red Olímpica–



Apología de un matemático
Godfrey Harold Hardy –Red Olímpica–