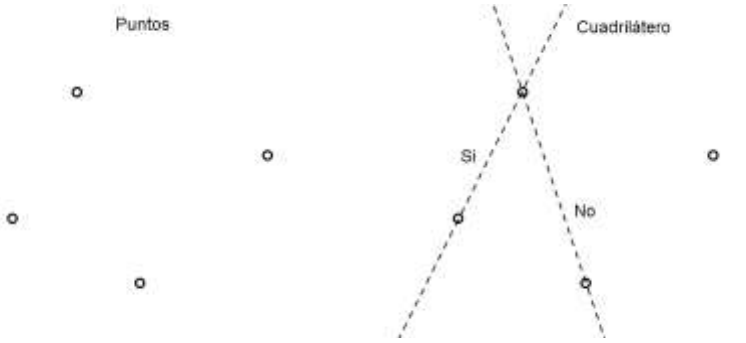
**Soluciones Nota nº 3**

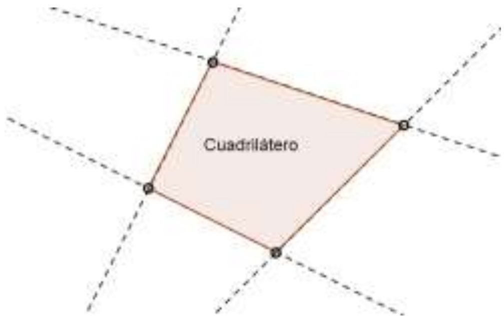
**Problemas Propuestos**

**Problema 1:** Para dibujar el trasladado de un cuadrilátero convexo según un vector dado, ¿Cuántos puntos trasladados se necesita conocer? ¿Cuáles elegiría?
Cómo resolvería el mismo problema si el cuadrilátero no es convexo.

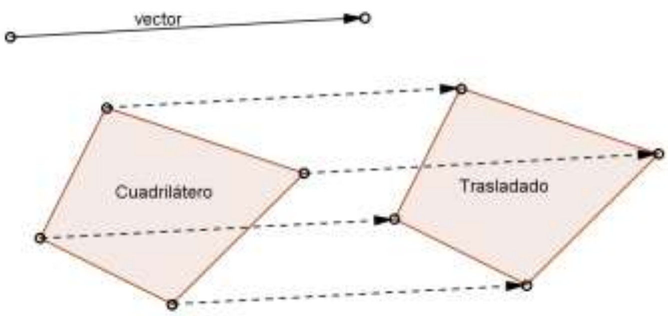
**Solución:** Los vértices determinan un cuadrilátero convexo, es decir, si se conocen los cuatro vértices de un cuadrilátero convexo, se dibuja el cuadrilátero uniendo pares de vértices elegidos de manera conveniente. La figura ilustra dos situaciones.



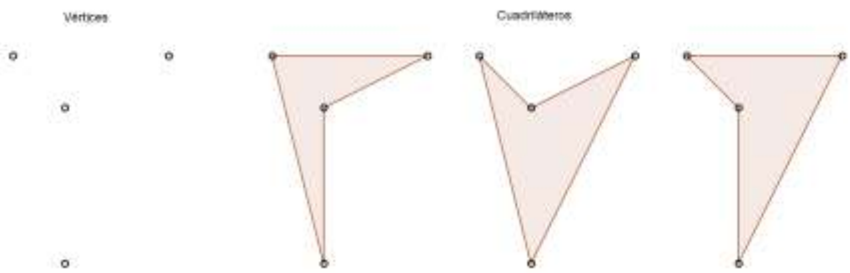

Si trazamos una recta por cada par de los puntos dados, de modo que deje a los dos puntos restantes un el mismo semiplano, habremos limitado con estas  rectas el cuadrilátero buscado.



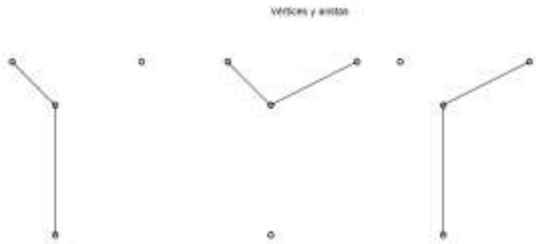

En consecuencia, para trasladar un cuadrilátero convexo, bastará trasladar sus vértices.



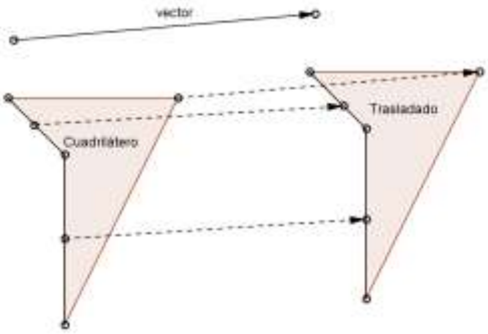

No ocurre lo mismo con un cuadrilátero no convexo. La siguiente figura ilustra cómo en este caso, los vértices no determinan el cuadrilátero.



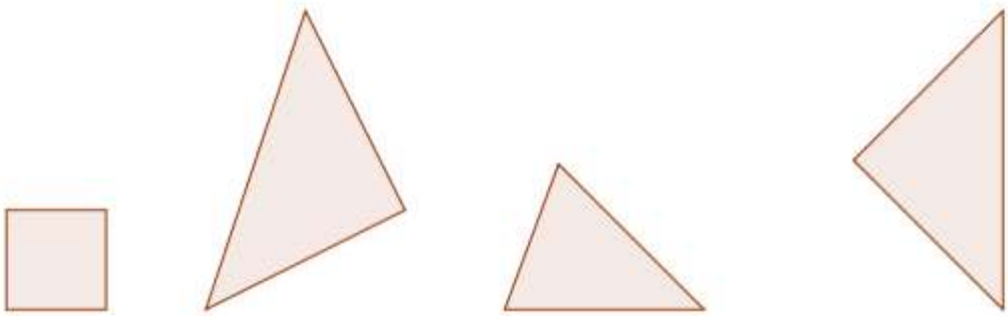

En este caso, los cuatro vértices y dos aristas contiguas determinan el cuadrilátero.



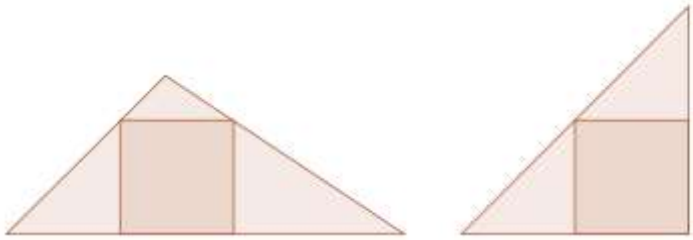

Para trasladar el cuadrilátero no convexo, es suficiente trasladar dos aristas contiguas y el vértice restante.



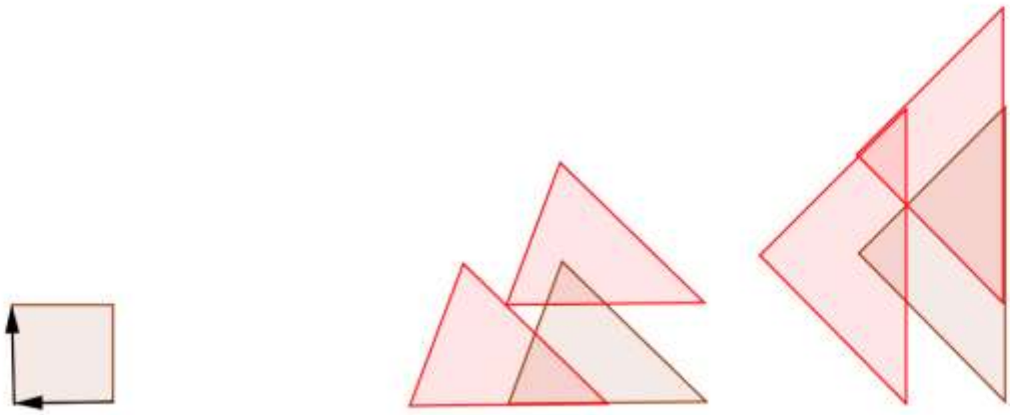

**Problema 2:** Según la figura, ¿Es posible trasladar el cuadrado de modo que quede inscripto en alguno de los triángulos?



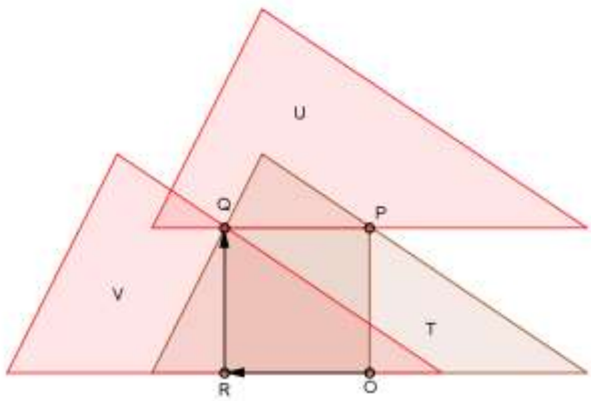
**Solución:** Consideremos situaciones en que el cuadrado está inscripto en un triángulo.



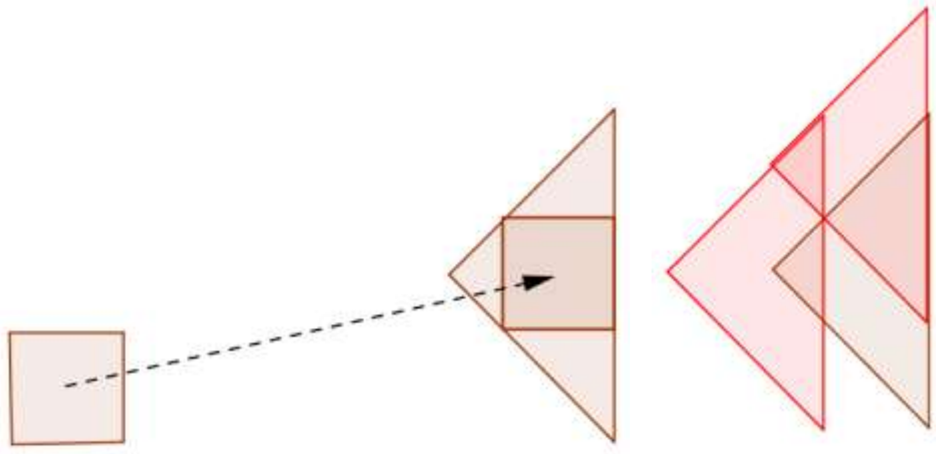
Como dos puntos del cuadrado estarán sobre un mismo lado del triángulo, el triángulo debe tener un lado paralelo a algún lado del cuadrado. Esto descarta el primer triángulo en la figura del enunciado de este problema. El segundo triángulo y tercer triángulo tienen un lado paralelo a lados del cuadrado. Para saber si es posible trasladar el cuadrado para que quede inscripto en éstos, trasladamos los triángulos usando como vectores dos lados del cuadrado, como se indica en la figura.



Los triángulos en color rojo son los trasladados, en cada caso, de los triángulos dados. Para que el problema tenga solución, los tres triángulos deben tener un punto en común, pues esto ocurre en todo triángulo que tenga inscripto un cuadrado. Para ver esto, consideremos un triángulo *T* en el que está inscripto el cuadrado *OPQR*; indiquemos con *U* y *V* los trasladados de *T* respecto de los vectores *RQ* y *OR* respectivamente.

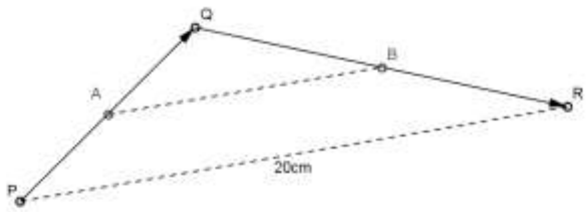



El punto *Q* está en *T* por ser vértice del cuadrado, está en *U* por ser el trasladado de *R* por el vector *RQ* y está en *V* por ser el trasladado de *P* por el vector *OR*. En la situación del problema, sólo el tercer triángulo cumple la condición y el cuadrado inscripto se construye a partir del punto de intersección de este triángulo con sus trasladados.



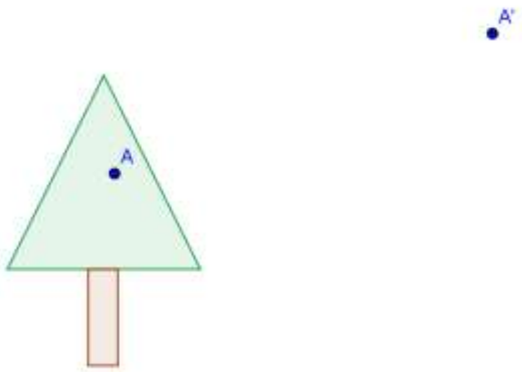
**Problema 3:** Un punto *P* se rota *180º* alrededor de un punto *A* y se obtiene el punto *Q*. Luego, *Q* se rota *180º* alrededor de *B* y se obtiene el punto *R* que dista a *20cm* de *P*. ¿cuál es la distancia entre *A* y *B*?

**Solución:** Formemos el triángulo *PQR*. Los puntos *A* y *B* son los puntos medios de los lados *PQ* y *QR* respectivamente, de modo que *AB* es la base media de *PQR* correspondiente a *PR*.

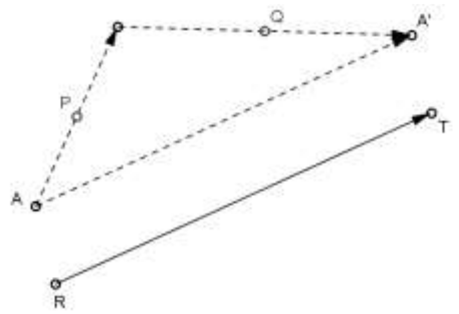



Se concluye que la distancia entre *A* y *B* es *10cm*.

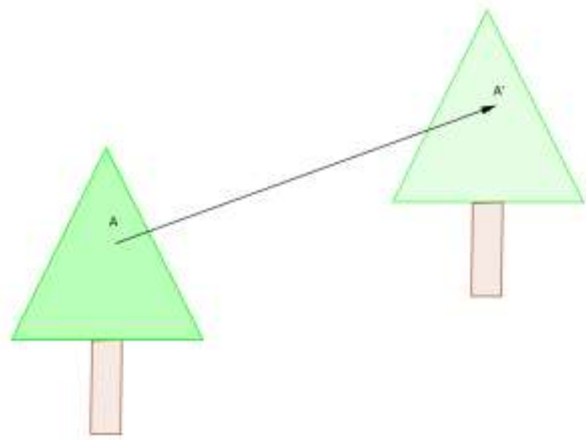
**Problema 4:** El árbol en la figura se rotó sucesivamente *180º* alrededor de un punto y luego *180º* alrededor de otro punto. Después de estas transformaciones el punto *A* del árbol quedó en el punto *A'*. Indicar cómo encontraría la posición del árbol después de las transformaciones.




**Solución:** Veamos el efecto que produce aplicar sucesivamente dos rotaciones de *180º* con centro en los puntos *P* y *Q*.

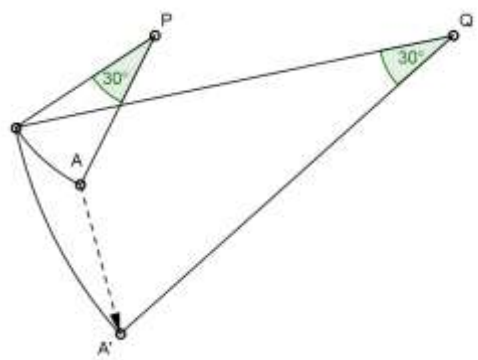



Un punto *A* cualquiera se transforma en *A*'. De la figura surge que *AA'* es base de un triángulo y *QP* es la base media de dicho triángulo, es decir, *AA'* y *PQ* son paralelos y además *AA'* mide el doble que *PQ*. Se concluye que *A'* es el trasladado de *A* según el vector *RT* indicado en la figura.
En la situación del problema, la posición del árbol transformado será la que produce la traslación que lleva el punto *A* hasta el punto *A'*.

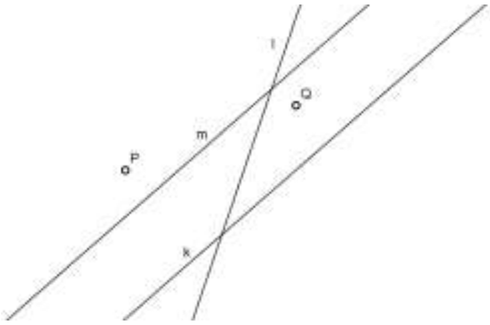



**Problema 5:** El árbol en la figura precedente, se rotó sucesivamente *30º* alrededor de un punto en sentido horario y luego *30º* alrededor de otro punto en sentido antihorario. Después de estas transformaciones el punto *A* del árbol quedó en el punto *A'*. Indicar cómo encontraría la posición del árbol después de las transformaciones.

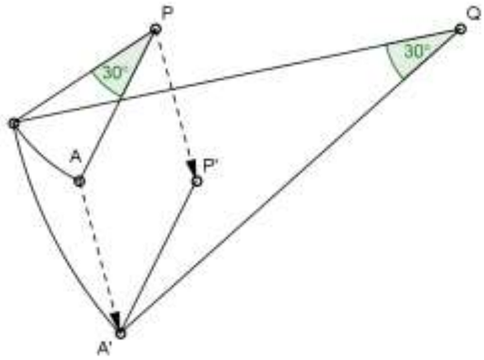
**Solución:** Es problema es similar al Problema 4. Veamos el efecto que producen las sucesivas rotaciones en un punto *A*. Como antes, P y *Q* son los centros de las rotaciones.




El punto *A* rota *30º* alrededor de *P* en sentido horario, luego rota *30º* alrededor de *Q* en sentido antihorario para trasformarse en el punto *A'*. Es oportuno observar que si una recta *k* gira *30º* alrededor de un punto en un sentido, se transforma en una recta *l* que guarda un ángulo de *30º* con *k*. Ahora si *k* gira *30º* alrededor de un punto en sentido contrario al giro anterior, se transforma en una recta *m* que resulta paralela a *k*.



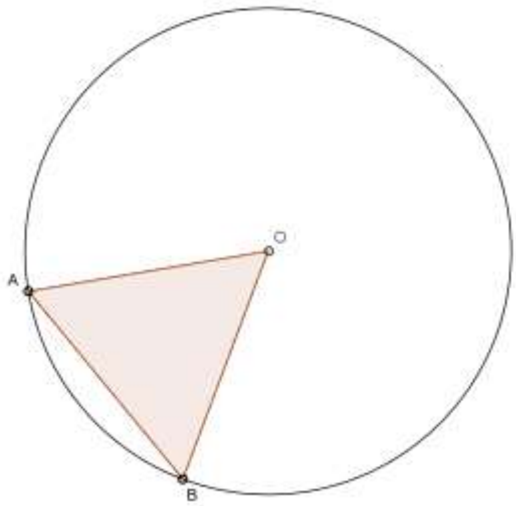

En la figura, la recta *k* giró alrededor de *P* en sentido antihorario para transformarse en la recta *l*, asimismo, la recta *l* giró *30º* alrededor de *Q* en sentido horario para transformarse en la recta *m* que es paralela a *k*. El paralelismo se produce debido a que los giros son en sentidos contrarios y de igual magnitud.
Volviendo al problema, si rotamos *P* alrededor de *Q*, *30º* en sentido antihorario, obtenemos el punto *P'*. El segmento *AP*, por las sucesivas rotaciones, se transforma en el segmento *A'P'* paralelo a *AP* y de igual longitud.



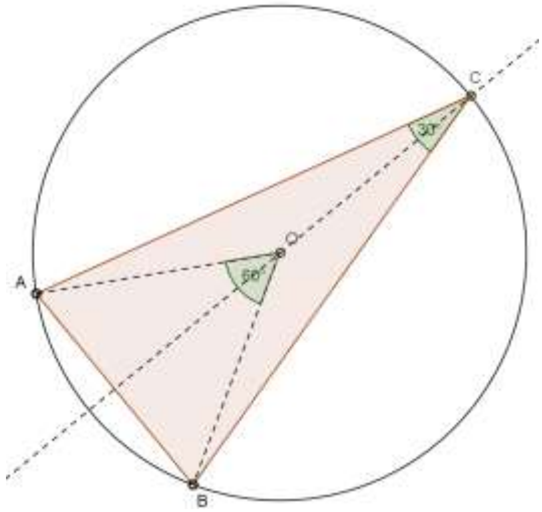

De modo que *AA'P'P* es un paralelogramo. En consecuencia *A'* se obtiene al trasladar *A* respecto del vector *PP'*, siendo esta traslación el resultado de aplicar las rotaciones en forma sucesiva. La solución a este problema es entonces igual que la solución al Problema 4.

**Problema 6:** Encontrar el centro de una rotación de *30º* que mueva el punto *A* en el punto *B*.


**Solución:** Bastará construir un triángulo isósceles *ABC* con base *AB* y *30º* en el vértice *C*. Dibujamos un triángulo equilátero *ABO* y la circunferencia con centro *O* que pasa por *A*.



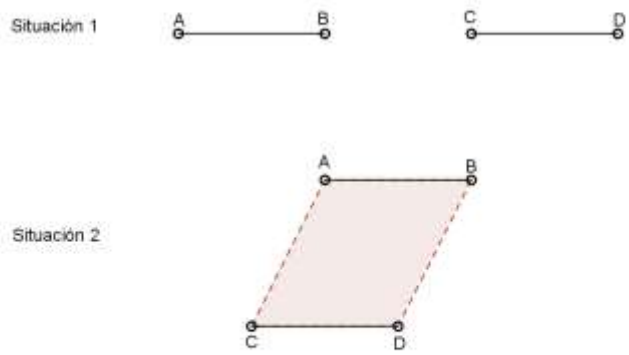

La mediatriz del segmento *AB* corta a la circunferencia en el punto *C*.




En el triángulo *ABC* el ángulo en el vértice *C* es *30º* pues es la mitad del ángulo central. Naturalmente, *C* es el centro de la rotación buscada, en este caso, con sentido antihorario.
**Pregunta:** Si el problema pidiera el centro de una rotación de *30º* y de sentido horario que transforma *A* en *B* ¿cuál sería la solución?

**Problema 7:** Dados *AB* y *CD* dos segmentos paralelos de igual longitud, encontrar el centro de una rotación que mueva el segmento *AB* en el segmento *CD*. ¿De cuántos grados es la rotación?

Solución: Hay básicamente dos situaciones, que los segmentos estén sobre una misma recta o que sus extremos sean los vértices de un paralelogramo.



En ambos casos hay una rotación de *180º* que transforma el segmento *AB* en el segmento *CD* cuyo centro es el punto medio de *BC*.

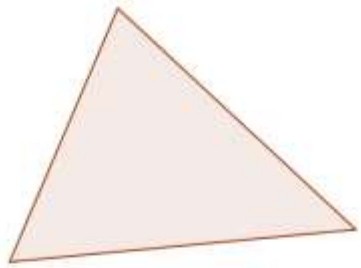
**Pregunta:** ¿Puede haber una rotación cuyo ángulo no sea *180º* y que transforme el segmento *AB* en el segmento *CD*?

**Problema 8:** Diremos que una figura tiene *centro* si después de rotarla *180º* alrededor de algún punto *C* se obtiene la misma figura; cuando este es el caso, el punto *C* se llama *centro de la figura*.

*i)* Indique cuáles de las siguientes figuras tienen centro: triángulo, paralelogramo, pentágono, circunferencia.

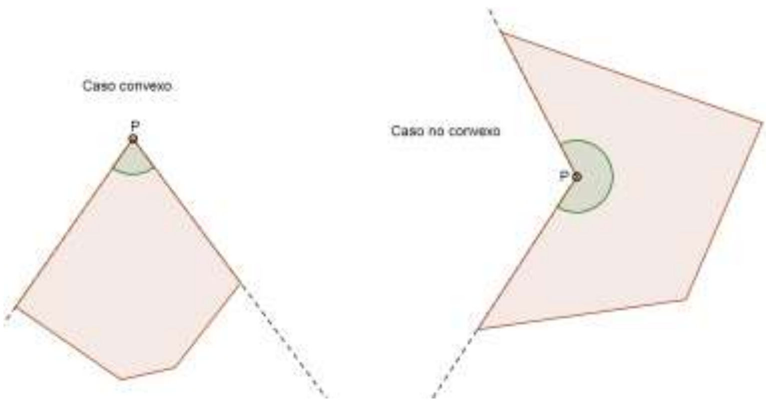
*ii)* ¿Un cuadrilátero convexo con centro es necesariamente un paralelogramo?

*iii)* Indicar cómo inscribir un hexágono con centro en el triángulo dado. (Dos vértices en cada lado)

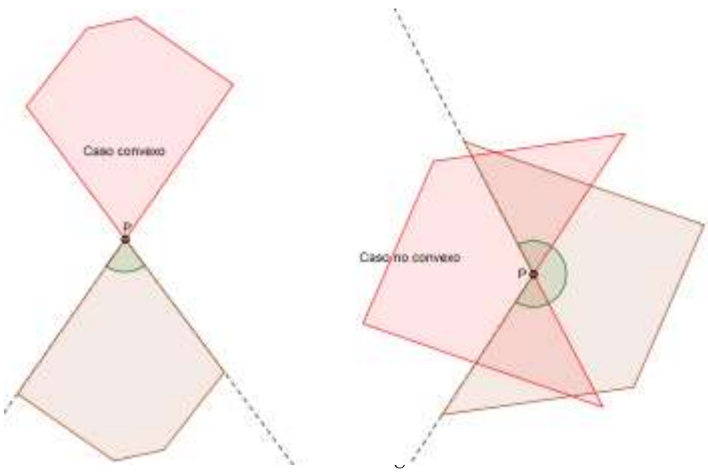


**Solución:** En primer lugar veamos que el centro de un polígono no puede coincidir con un vértice del mismo.

Tomemos un vértice *P* del polígono. El polígono se encuentra en el ángulo interior del vértice *P*.



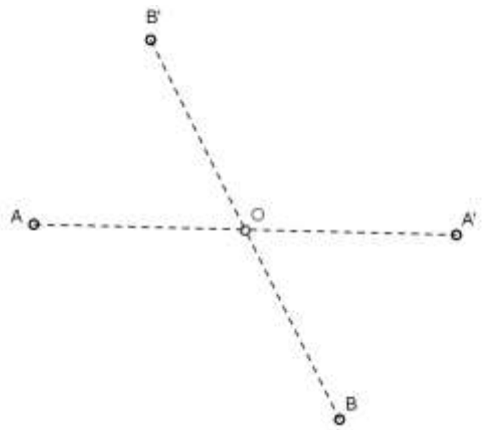

Si rotamos el polígono *180º* alrededor de *P*, tenemos situaciones como en la figura a continuación:



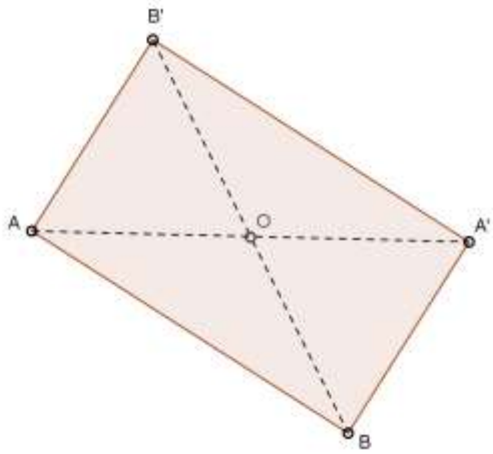
Si el ángulo interior en *P* es menor que *180º*, el polígono y su transformado sólo coinciden en el vértice *P*, si el ángulo es mayor que *180º*, la coincidencia es mayor, pero una porción del polígono, limitada por las prolongaciones de los lados que concurren en *P*, se transforma en puntos que están fuera del polígono.

*i)* El centro de un paralelogramo es el punto de intersección de sus diagonales. El centro de una circunferencia es su propio centro.
Los triángulos y pentágonos no tiene centro. Si una rotación de *180º* transforma un polígono en sí mismo, debe transformar vértices en vértices. El centro de la rotación es el punto medio de los pares de vértices que se corresponden por la rotación. Si el número de vértices fuera impar, un vértice *P* debe coincidir con su correspondiente trasformado, pero esto sólo ocurre con el centro de la rotación y tendríamos que *P* es el centro de la rotación, lo que no puede ser por lo visto anteriormente.

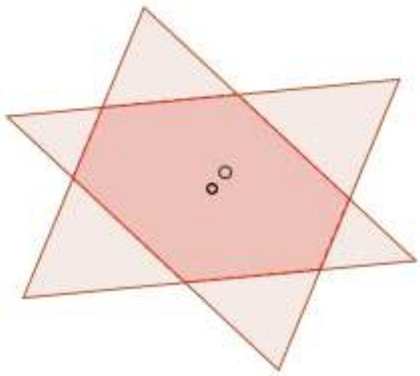
Para responder *ii)*, notemos que si un cuadrilátero tiene centro, este debe ser el punto medio de pares de vértices que se corresponden, es decir, si *O* es el centro del cuadrilátero *ABA'B'*:




Necesariamente *AA'* y *BB'* son las diagonales del cuadrilátero y como éstas se cortan en sus puntos medios, el cuadrilátero en un paralelogramo.

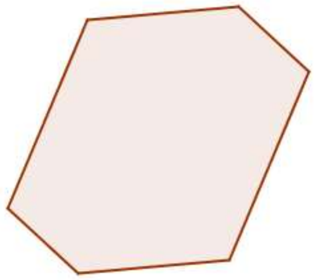



Veamos el punto *iii)*. Tomaos un punto *O* en el interior del triángulo y rotamos éste *180º* alrededor de *O*.



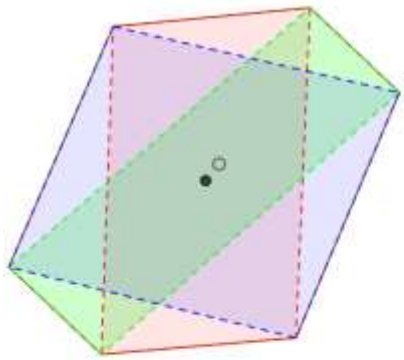
*O* debe tomarse de modo que la intersección entre el triángulo y su transformado sea un hexágono. Como *O* es el punto medio de los pares de vértices opuestos de este hexágono, *O* resulta ser el centro del hexágono.

**Problema 9:** El hexágono de la figura tiene los pares de lados opuestos paralelos y de igual longitud. ¿Tiene centro? En caso afirmativo, indicar cómo encontrarlo y justificar



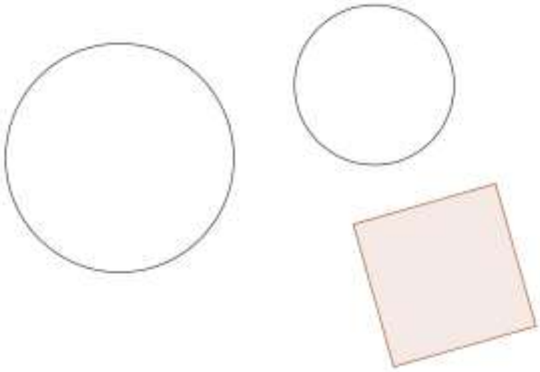
.

Solución: Cada par de lados opuestos da lugar a un paralelogramo.

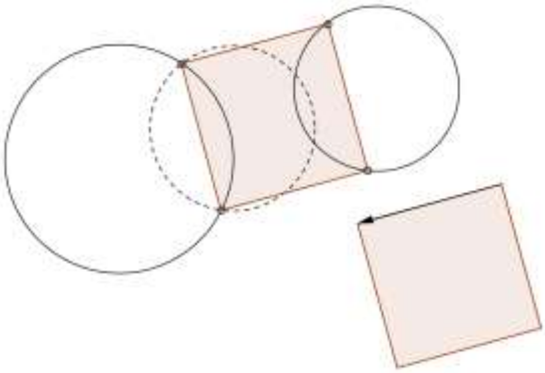


Estos tres paralelogramo tiene un mismo centro, de modo que vértices opuestos del hexágono se corresponden por la rotación de *180º* con centro *O*, en consecuencia *O* es el centro del hexágono.

**Problema 10:** Trasladar el cuadrado de modo que dos de sus vértices caigan sobre una de las circunferencias y los dos restantes sobre la otra.

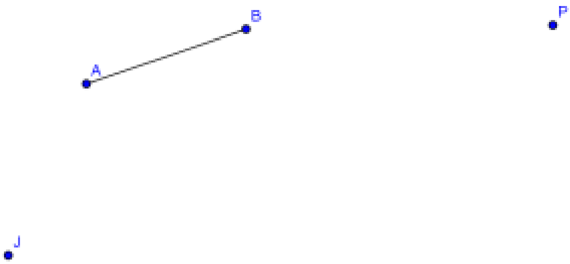


**Solución:** Como ya hemos visto en otros problemas resueltos con traslaciones, bastará trasladar una circunferencia según un vector dado por uno de los lados del cuadrado. Los puntos de intersección de la circunferencia trasladada con la otra circunferencia, serán los candidatos a vértices del cuadrado.

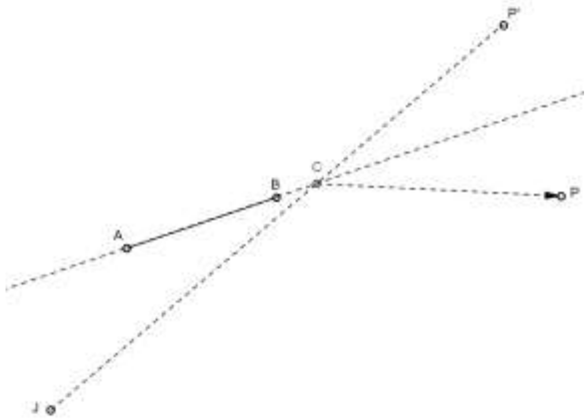


Si hacemos la construcción para la situación dada en el dibujo del problema, encontramos gráficamente la solución del problema.

**Problema 11:** Juana y Pedro se encuentran sobre los puntos $P$ y $J$ de una habitación, Un espejo rectangular ocupa la zona indicada por el segmento $AB$:
*i)* Si Juana puede ver a Pedro en el espejo, ¿Pedro puede ver a Juana?
*ii)* ¿Puede ver Juana a Pedro?



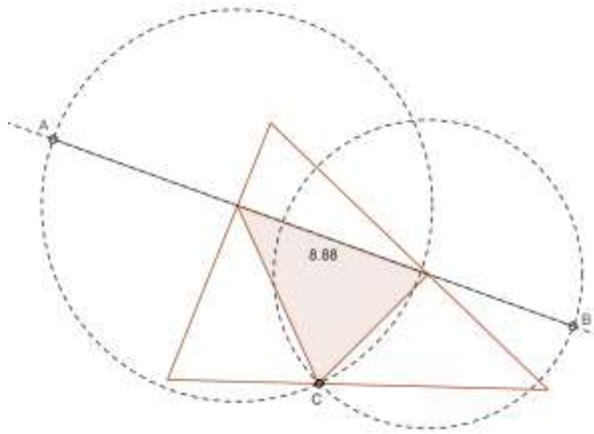

Solución: *i)* Naturalmente, si Juana puede ver a Pedro en el espejo, Pedro puede ver a Juana, esto se aclarará resolviendo el item *ii)* del problema.
*ii)* En esta situación, la vista funciona como una bola de billar. Saber si Juana puede ver a Pedro, equivale a saber si se puede lanzar una bola de billar desde $J$ hasta $P$ rebotando en el segmento $AB$. Para el caso del dibujo considerado, tenemos:



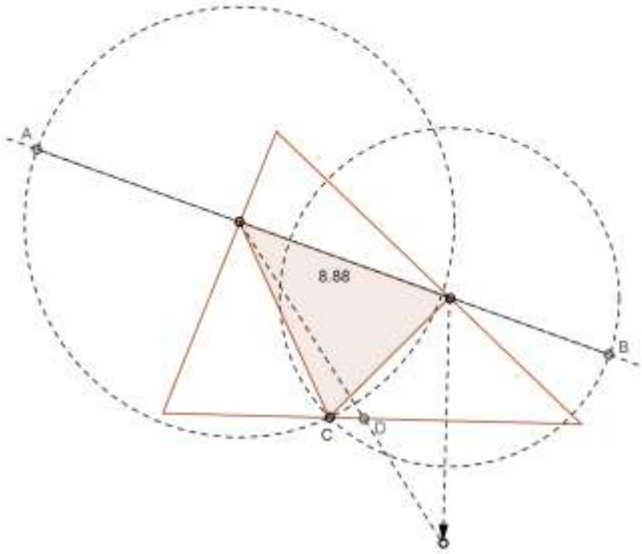

En la construcción geométrica, *P'* es el punto simétrico de *P* respecto de la recta que pasa por *A* y *B*. Para que la bola, partiendo desde *J*, rebote en un punto de la recta *AB* para luego dirigirse a *P*, debe tocar el punto *C*, el cuál no pertenece al espejo. Con esto, la respuesta es no.
Ahora es claro que si Juana puede ver a Pedro, Pedro también puede ver a Juana.

**Problema 12:** Usando un programa interactivo de geometría, investigar la variación del perímetro de un triángulo inscripto en un triángulo acutángulo dado. Sugerencia: tenga en cuenta el *principio de la reflexión*.

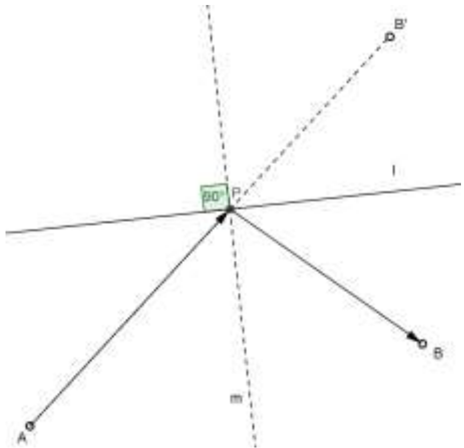
**Solución:** Sobre uno de los lados del triángulo inscripto, construimos un segmento *AB* cuya longitud representa el perímetro del triángulo inscripto.



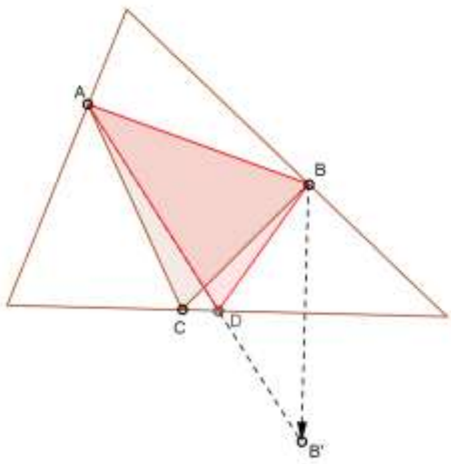

Dejamos visible la longitud de *AB* y hacemos variar el vértice *C* sobre el lado del triángulo circunscripto que lo contiene. Se observará que el perímetro crece cuando nos alejamos del *D* construido según el principio de la reflexión.



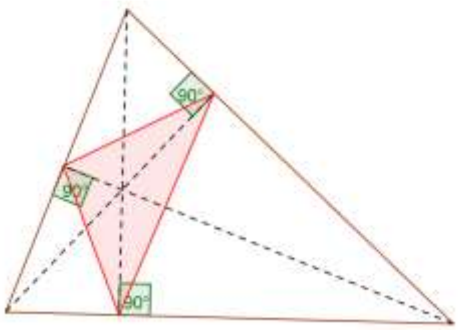

Es claro que el perímetro será máximo cuando ambos triángulos coincidan (justifique esto). Por otra parte, veamos cuando el perímetro será mínimo. Si revisamos el principio de la reflexión, es decir como obtener el camino más corto para ir desde un punto *A* hasta un punto *B* tocando una recta *l*, podemos ver en la figura que para construir este camino, debe partirse desde *A* en dirección al punto *B'*, punto simétrico de *B* respecto de la recta *l*.



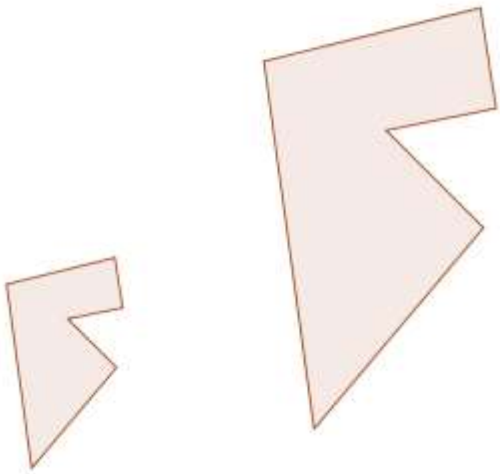

Como *l* es la bisectriz del ángulo *BPB'*, la resta perpendicular a *l* que pasa por *P*, es la bisectriz del ángulo *APB*. Llevando esta observación al caso de un triángulo *ABC* inscripto en otro, si las bisectrices de los ángulos de *ABC* no fueran perpendiculares a los lados del circunscripto, podría construirse el triángulo inscripto *ADC* con menor perímetro *ABC* como muestra la figura;



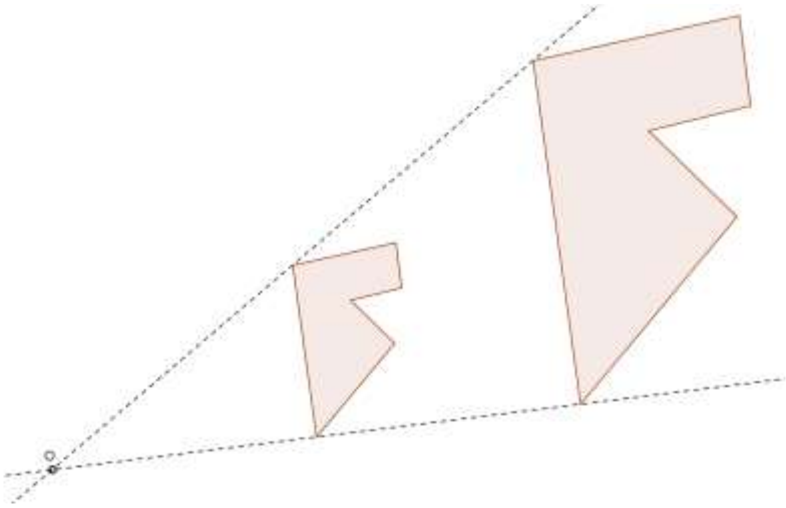

Hay un triángulo inscripto que cumple la condición: las bisectrices de sus ángulos son perpendiculares a los lados del circunscripto, es el triángulo órtico (ver apéndice de la Nota 3), cuyos vértices son los pies de las alturas del triángulo circunscripto.




**Problema 13:** Una figura se obtuvo de la otra mediante una homotecia. Hallar el centro de una homotecia que transforme una figura en la otra:



**Solución:** Bastará trazar dos rectas que unan puntos correspondientes en cada figura.

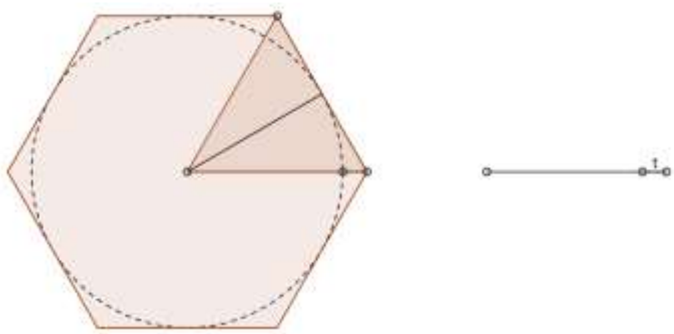



El punto de intersección de estas rectas es el centro de la homotecia.

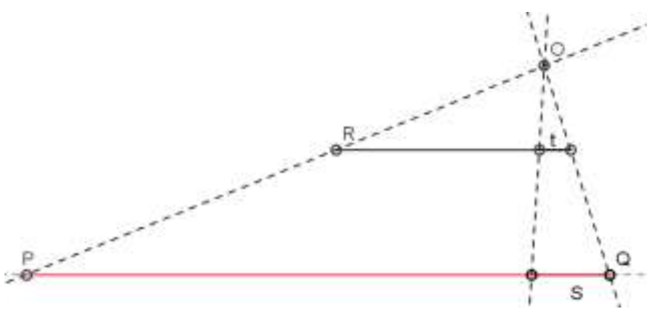
**Problema 14:** Construir un hexágono regular dada la diferencia entre su lado y su apotema.

**Solución:** La diferencia entre su lado y su apotema es un dato, digamos que es el segmento *s* en la figura siguiente.


Dibujamos cualquier hexágono para obtener la relación entre su lado y su apotema.



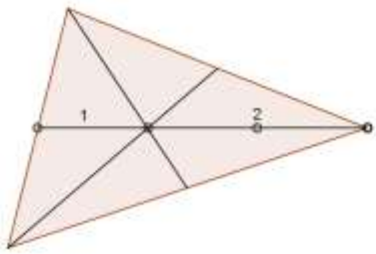

Los segmentos superpuestos a la derecha en la figura, representan el lado, la apotema y la diferencia entre lado y apotema. Indicamos con *t* al segmento que representa dicha diferencia. Si buscamos un hexágono donde esta diferencia sea el segmento *s*, será suficiente transformar estos segmentos con una homotecia con centro *O* cuya descripción damos en la figura a continuación:



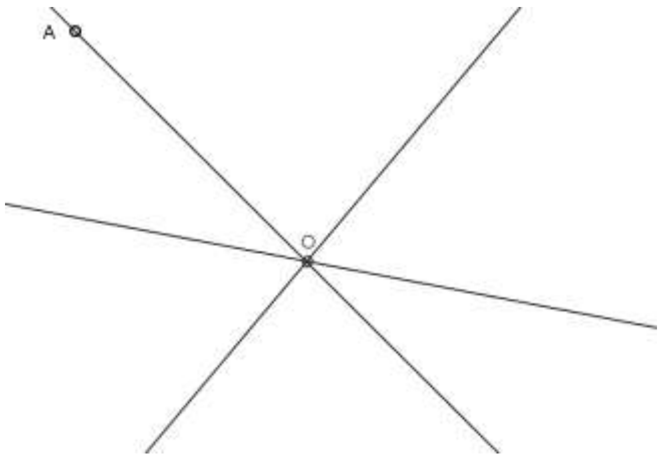
Se ha dibujado *s* paralelo a *t*. El centro *O* de la homotecia se obtuvo como la intersección entre las rectas que unen los extremos de los segmentos *s* y *t*. El punto *P* se obtuvo como la intersección de la recta que contiene a *s* y la recta que une *O* con *R*. El segmento *PQ* es el lado del hexágono buscado.

**Problema 15:** Hallar un triángulo de modo que sus medianas estén sobre tres rectas concurrentes dadas. ¿Es único?

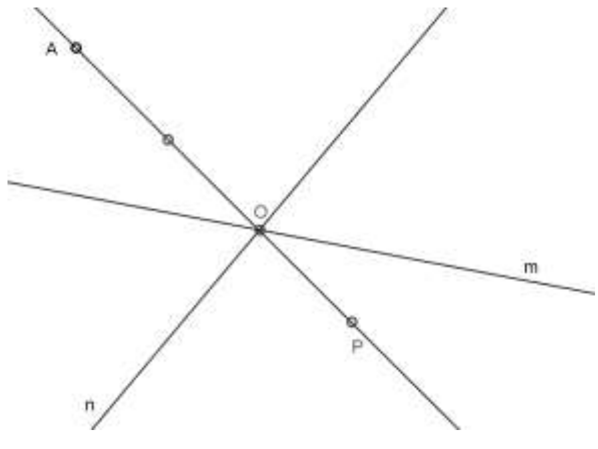
**Solución:** En principio, recordemos que las medianas de un triángulo concurren en un punto, llamado baricentro. Este punto divide a cada mediana en segmentos que guardan la relación 2:1.



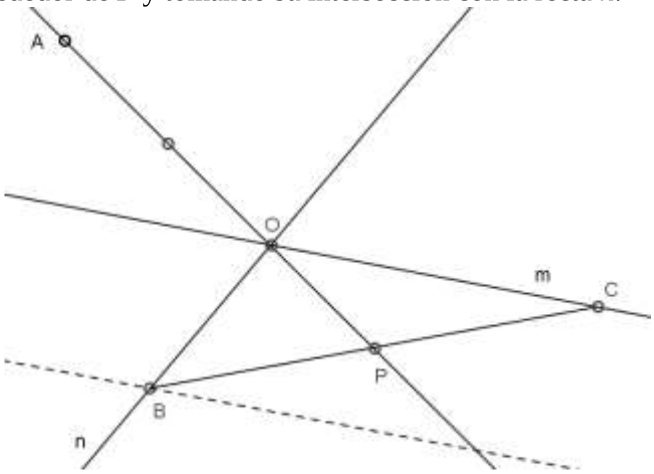

Pongamos las tres rectas concurrentes en un punto *O* como en la figura siguiente y elijamos un punto *A* sobre una de ellas como vértice del triángulo buscado:



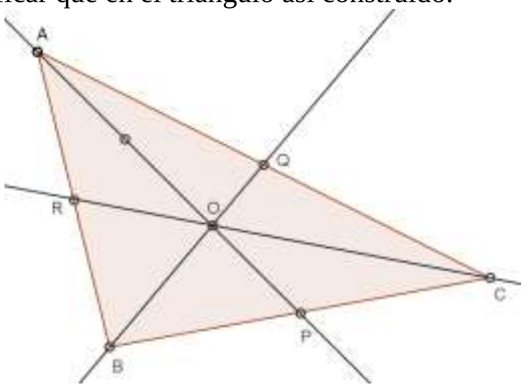

Teniendo en cuenta que *O* será el baricentro y que *P*, el pié de la mediana por *A*, debe verificar: *2PO = AO*, podemos ubicar a *P* en la figura:



Para determinar el lado *BC* del triángulo buscado, necesitamos trazar un segmento desde la recta *m* hasta la recta *n* que tenga a *P* como punto medio. Como hemos visto en otros problemas, esto puede conseguirse rotando la recta *m 180º* alrededor de *P* y tomando su intersección con la recta *n*.

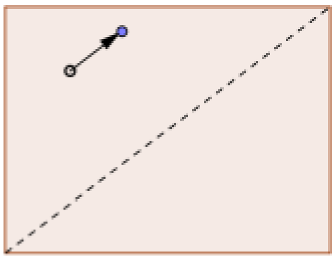



En la figura precedente, la recta punteada es la que se obtiene al rotar la recta *m*, cuya intersección con *n* es el vértice *B* del triángulo, y el punto *C* que se obtiene como la intersección de las rectas *BP* y *m*, es el tercer vértice del triángulo. Resta justificar que en el triángulo así construido:



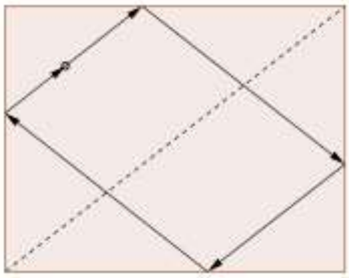

los segmentos *BQ* y *CR* son las otras medianas de *ABC*. Pero esto es así, debido a que, por construcción, *AP* es mediana y *O* el baricentro, puesto que *2PO = AO*.

**Problema 16:** En una mesa rectangular de billar de *108cm* por *144cm*, una bola sale en una dirección paralela a una diagonal y se detiene si vuelve a pasar por el punto de partida.

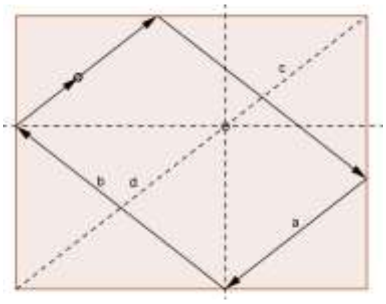


Decidir si la bola se detiene, y en tal caso cuánto centímetros recorre.

**Solución:** Si realizamos el recorrido de la bola conforme el principio de la reflexión, encontramos que su trayectoria describe un paralelogramo cuyos lados son paralelos a las diagonales de la mesa ¿Puede justificar esto?

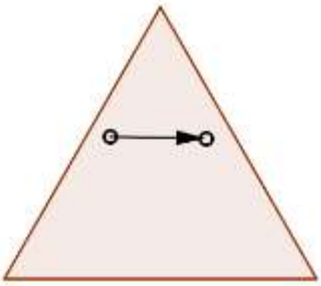


En consecuencia la bola se detiene. La distancia recorrida por la bola, es precisamente el perímetro del paralelogramo. Si trazamos paralelas a los lados de la mesa por dos vértices del paralelogramo, como indica la figura:

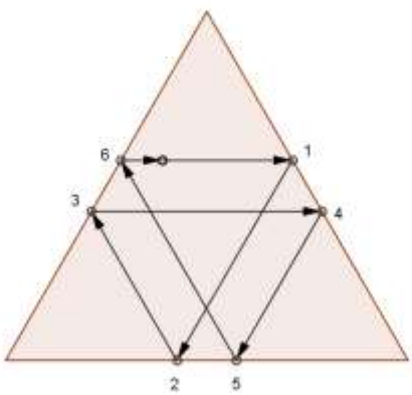



la diagonal de la mesa queda dividida en los segmentos *c* y *d*. El lado *b* del paralelogramo y *d* son las diagonales de un rectángulo, luego *b* = *d*. Por otra parte, *a* y *c* son paralelos, y además son dos lados opuestos de un paralelogramo, deber ser *a* = *c*. Resulta que *a*+*b* = *c*+*d* igual a la longitud de la diagonal de la mesa, que por Pitágoras es $\sqrt{108^2+144^2}=180$ . La distancia recorrida por la bola es *360cm*.

**Problema 17:** Análogo al Problema 16, pero con una mesa con forma de triángulo equilátero de *180cm* de lado y la bola sale en una dirección paralela a un lado del triángulo.

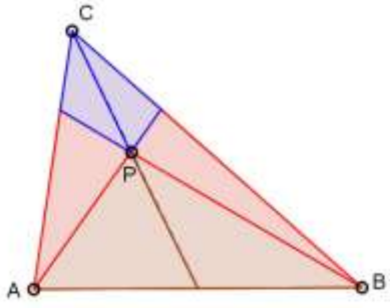


Solución: Si trazamos el recorrido de la bola siguiendo el principio de la reflexión, en este caso vemos que la bola describe una poligonal cerrada de seis vértices y lados paralelos a los lados del triángulo.



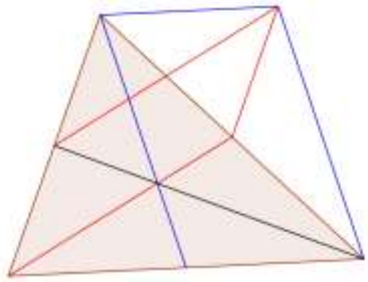
Observando los paralelogramos que se forman en la figura, es posible establecer que la bola recorrerá una distancia igual al perímetro del triángulo, es decir $3\times 180cm = 540cm$ .

**Problema 18:** El punto *P* se encuentra sobre la mediana del triángulo *ABC* que parte desde el vértice *C*. Esta mediana junto con los segmentos que parten desde *A* y *B* pasando por *P*, descomponen al triángulo en *6* triángulos. Mostrar que los triángulos pintados con el mismo color tienen igual área.

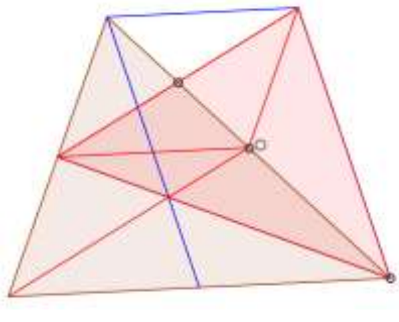



**Solución:** La mediana de *ABC* incluye la mediana de *APB*, por loa tanto los triángulos marrones tienen igual área.
**Problema 19:** Usando como lados las medianas de un triángulo de área *12cm*$^2$ se construye otro triángulo. Hallar el área de este triángulo.

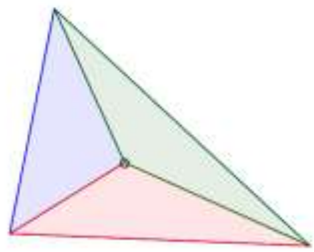
**Solución:** Si construimos paralelogramos sobre dos medianas de un triángulo, como muestra la figura:



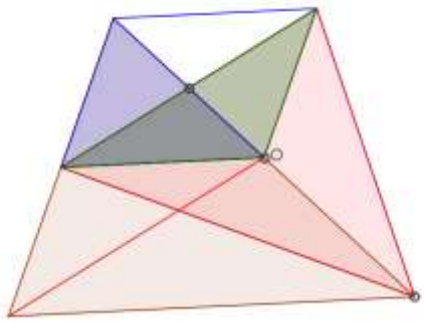
queda determinado un triángulo cuyos lados son las medianas del triángulo inicial ¿Puede justificar esto?




El punto *O* destacado en este nuevo triángulo, es el baricentro del mismo, pues pertenece a un mediana y la divide en la relación *2:1*. El baricentro, permite descomponer un triángulo cualquiera en tres triángulos de igual área:

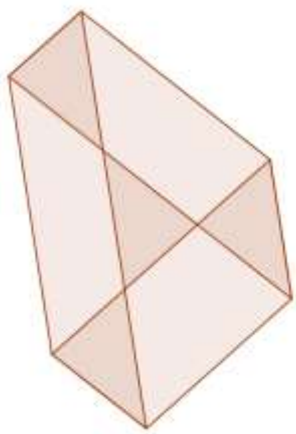


En nuestro problema, uno de esos triángulos tiene por área a *1/4* del área del triángulo inicial, es decir, el triángulo verde tiene igual área que el triángulo azul:

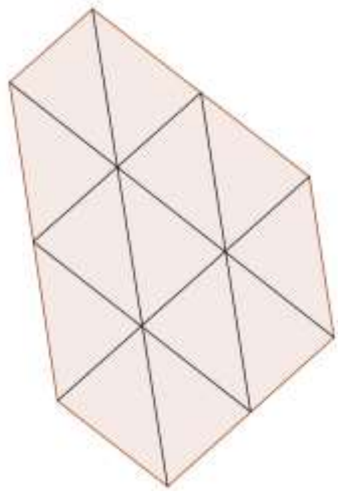


pero el triángulo azul tiene ¼ del área del triángulo inicial. En consecuencia, el área del nuevo triángulo es ¾ de $12cm^2$, es decir $9cm^2$.

**Problema 20:** Un triángulo de $2cm^2$ de área, se rota *180º* alrededor de cada uno de sus vértices para formar un hexágono como muestra la figura. Hallar el área de este hexágono.

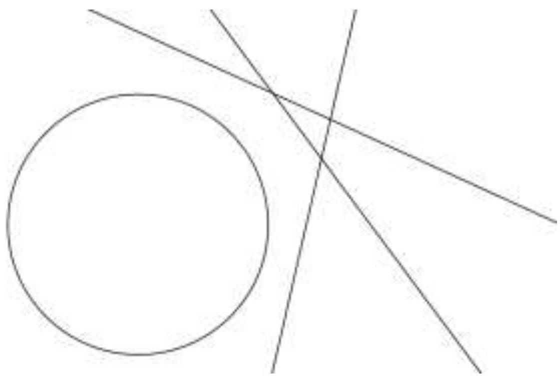


**Solución:** Si tomamos los puntos medios en los lados del hexágono que no son lados de los triángulos rotados, podemos descomponer el hexágono en *13* triángulos de iguales.

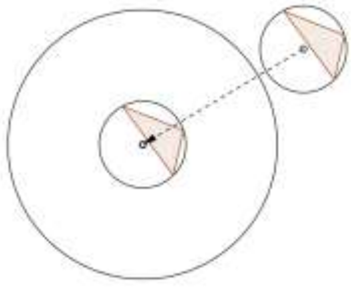


Entonces, el área del hexágono será $26cm^2$.

**Problema 21:** Dadas las tres rectas y la circunferencia de la figura, encontrar dos triángulos inscriptos en la circunferencia cuyos lados sean paralelos a las rectas.



Solución: Dibujamos la circunferencia circunscripta al triángulo limitado por las rectas dadas y trasladamos circunferencia y triángulo para obtener circunferencias concéntricas como lo indica la figura.



Usando una homotecia con centro en el centro común a ambas circunferencias construimos uno de los triángulos pedidos, podemos construir otro, girando este último *180º* alrededor del centro común.