Año 1 - Número 1 - Junio 2013

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redacctadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

TORNEO DE LAS CUENCAS

Esta es la primera de una serie de Notas previstas para dar apoyo a los alumnos interesados en participar del Torneo de las Cuencas. El formato de las mismas, como es habitual en las propuestas de la Olimpíada Matemática Argentina, incluye tres aspectos.

- La resolución de problemas referidos a los temas particulares que se pretende desarrollar.
- Una propuesta de problemas afines para resolver por parte del lector.
- Un apéndice con información básica que podría ser de utilidad en la resolución de los problemas. Los resultados incluidos serán presentados en general sin demostración, para no ahogar la intuición con un formalismo innecesario.

PRIMERA NOTA

Ángulos entre rectas paralelas y una recta transversal.
Suma de ángulos interiores y suma de ángulos exteriores de un polígono.
Teorema de Thales.

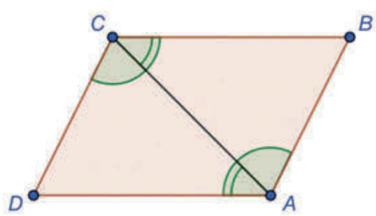
Problema 1 En un paralelogramo,

i) los ángulos opuestos son iguales,
ii) los lados opuestos son iguales,
iii) las diagonales se cortan en sus puntos medios.

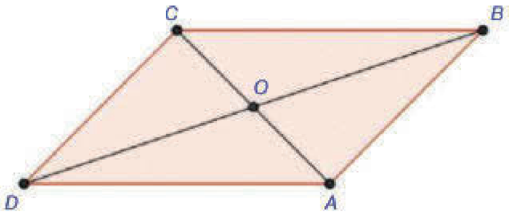
Solución:

i) Por el principio de ángulos entre paralelas, los ángulos igualmente marcados en la figura son iguales:

ii) Las diagonales descomponen al paralelogramo en dos triángulos iguales. En efecto, por uno de los criterios de igualdad de triángulos (ver apéndice) los triángulos *ABC* y *CDA* son iguales pues tienen un lado común *AC* y los dos ángulos adyacentes iguales. Luego los lados *AB* y *CD* son iguales y lo mismo vale para los lados *AD* y *CB*.



iii) Usaremos el teorema de Thales.

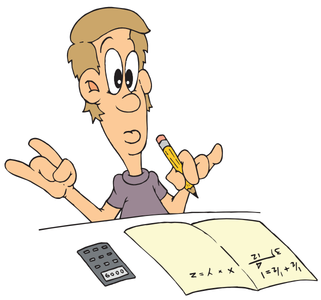


Como AD y BC son paralelos, se tiene:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OD}{OB}$$

y como AB y CD son paralelos, es:
Luego

$$\left(\frac{OA}{OC}\right)^2=\frac{OD}{OB}x\frac{OB}{OD}=1$$



es decir:

$$\frac{OA}{OC}=1 \qquad \text{ó} \qquad OA=OC$$

De la primer igualdad:

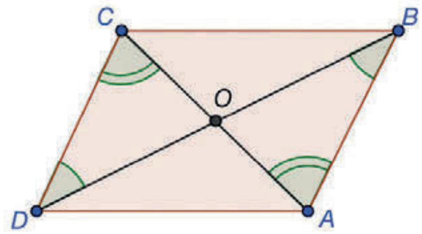
$$\frac{OD}{OB}=\frac{OA}{OC}=1$$

obtiene que:

$$OD=OB$$

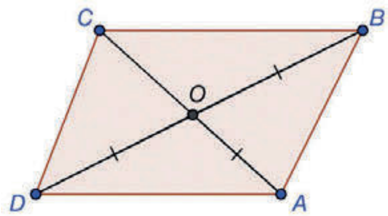
Problema 2 **Las diagonales de un paralelogramo descomponen al mismo en 4 triángulos. Mostrar que éstos pueden agruparse en dos pares de triángulos iguales. Como consecuencia de este hecho, las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios.**

Solución:



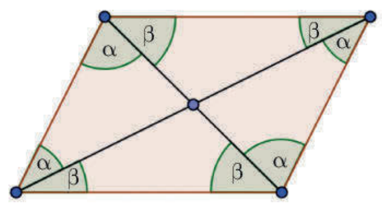
Usando el principio de ángulos entre paralelas y el resultado anterior: ii), los triángulos ABO y CDO tienen un lado y dos ángulos adyacentes iguales, entonces son iguales. Luego, $OB = OD$. Un razonamiento análogo muestra que los otros 2 triángulos: AOD y COB son iguales y por lo tanto $OA = OC$.

Problema 3 **Las diagonales de un paralelogramo dividen al mismo en 4 triángulos. Determinar los ángulos interiores del paralelogramo sabiendo que uno de los triángulos es isósceles y su base es un lado de paralelogramo.**



Solución:

Supongamos que DAO es isósceles con base DA, luego $OD = OA$. Del problema 2 se tiene que $OD = OB$, por lo tanto el triángulo ABO es isósceles. Por el mismo argumento OCD es isósceles. En consecuencia, las diagonales del paralelogramo son iguales, es decir se trata de un rectángulo.



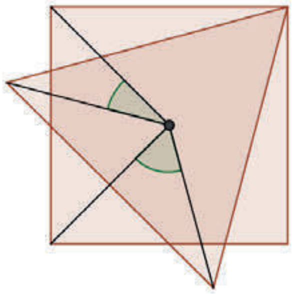
En efecto, llamando α y β a los ángulos de los triángulos formados, adyacentes a los lados del paralelogramo, se tiene que: $4(\alpha + \beta) = 360°$. Luego, $(\alpha + \beta) = 90°$.

Nota: En el caso especial que el paralelogramo sea un cuadrado, los cuatro triángulos en que queda descompuesto son iguales. En consecuencia, el ángulo en el vértice común mide

$$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

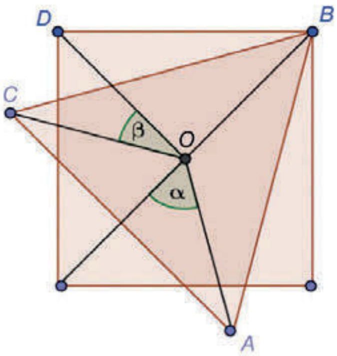
de modo que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares.

Problema 4 Un cuadrado y un triángulo equilátero tienen el centro y un vértice común. Hallar el valor de los ángulos marcados en la figura. Nota: el centro de un triángulo o un cuadrado es el punto que equidista de los vértices.



Usando esta figura, construir un polígono regular de 12 lados con regla y compás

Solución:



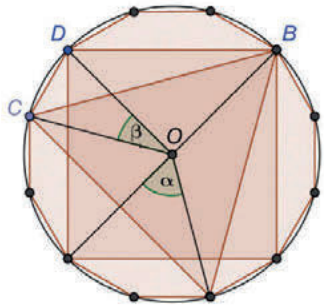
Sean A, B, C los vértices del triángulo equilátero, O el centro común y α, β los ángulos a calcular.
Notar que los triángulos *ABO, BOC* y *AOC* son iguales, por el primer principio de igualdad de triángulos (ver apéndice).

Los ángulos de estos triángulos en el vértice común O miden 120°. Como $\alpha + 120^\circ = 180^\circ$, es $\alpha = 60^\circ$. De acuerdo con la nota del problema 3, el ángulo BOD mide 90°, de modo que $\beta + 90^\circ = 120^\circ$, es decir $\beta = 30^\circ$.

En un polígono regular de 12 lados, el ángulo central correspondiente a un lado del mismo, mide:

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

que es el valor del ángulo β. Luego, en la circunferencia de centro O que pasa por D se marcan los 12 vértices del polígono, usando el compás con la medida de CD.

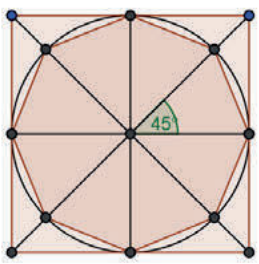


Observemos que los vértices del triángulo y los del cuadrado son vértices del dodecágono.

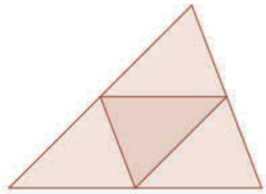
Problema 5 Partiendo de un cuadrado, usando regla y compás, construir un octógono regular.

Solución:

Teniendo en cuenta que el ángulo central correspondiente a un lado del octógono mide 45°, podemos considerar los cuatro puntos medios de los lados del cuadrado como cuatro vértices del octógono. Al trazar una circunferencia con centro en el centro del cuadrado y que pase por dichos puntos medios, las intersecciones de las diagonales del cuadrado con esta circunferencia dan los cuatro vértices restantes.

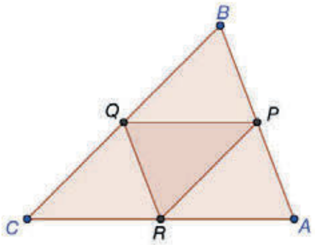


Problema 6 Triángulo de puntos medios.
Los puntos medios de los lados de un triángulo *ABC* dado, son los vértices de otro triángulo, y el triángulo dado queda descompuesto en 4 triángulos, como se indica en la figura. Mostrar que los 4 triángulos son iguales.



Solución:

Usando el teorema de Thales, se puede mostrar que los lados del triángulo central son paralelos a los lados del triángulo dado.



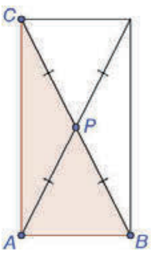
En efecto, sean P, Q y R los puntos medios de los lados AB, BC y CA respectivamente. Dado que:

$$\frac{AP}{PB}=1=\frac{CQ}{QB}$$

por el teorema de Thales se tiene que PQ es paralelo a AC. En forma análoga se establece el paralelismo en los otros lados. El triángulo PQR forma parte de los paralelogramos $APQR$, $PBQR$ y $PQCR$. Como se muestra en la solución del problema 1, una diagonal de un paralelogramo descompone al mismo en dos triángulos iguales, de modo que los triángulos APR, PBQ y QCR son iguales a PQR.
Nota: los lados de PQR se llaman las bases medias de ABC.

Problema 7 En un triángulo rectángulo el punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del mismo. Deducir que la hipotenusa es estrictamente mayor que los catetos.

Solución:

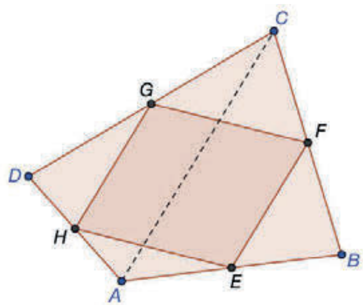


A partir del triángulo rectángulo ABC, se forma un rectángulo como muestra la figura. Las diagonales del rectángulo son iguales y se cortan en sus puntos medios. Luego el punto de intersección P equidista de los vértices del triángulo rectángulo. Este queda descompuesto en dos triángulos isósceles ABP y APC. Se concluye, teniendo en cuenta que en un triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos, que las longitudes de los segmentos considerados verifican: $AB < AP + PB = BP + PC = BC$ y $AC < AP + PC = BP + PC = BC$, es decir que la hipotenusa de un triángulo rectángulo es estrictamente mayor que los catetos.

Problema 8 Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo, llamado el paralelogramo de Varignon.

Solución:

El cuadrilátero $ABCD$ se descompone por su diagonal AC en los triángulos ABC y ACD.
Los segmentos HG y EF son bases medias de ACD y ABC respectivamente y ambos son paralelos a AC. Análogamente se establece el paralelismo entre FG y HE. Luego el cuadrilátero $EFGH$ es un paralelogramo.

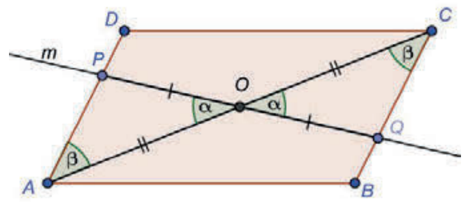


Problema 9 *División del un paralelogramos en dos regiones iguales.* **Una recta que pase por el centro de un paralelogramo, descompone a éste en dos figuras iguales. En sentido recíproco, si una recta descompone un paralelogramo en dos figuras de igual área, entonces esta recta pasa por el centro del paralelogramo.**

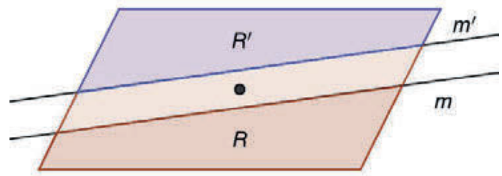
Aclaración. El centro de un paralelogramo es el punto de intersección de las diagonales.

Solución:

Si la recta dada es una diagonal, en el problema 1 se demostró que el paralelogramo queda descompuesto en dos triángulos iguales. Sea entonces m la recta que pasa por el centro O del paralelogramo y corta en los puntos P y Q a dos lados opuestos del mismo, como se muestra en la figura:

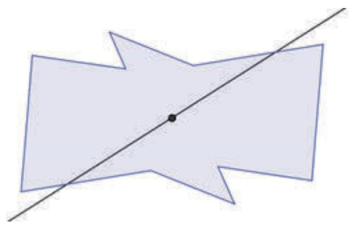


Los triángulos AOP y COQ son iguales por tener un lado igual, $AO = OC$, y los dos ángulos adyacentes iguales:
$COQ = AOP$ por opuestos por el vértice y $QCO = PAO$ por alternos internos entre paralelas. Luego $OP = OQ$. Por otra parte, las diagonales del paralelogramo se cortan en sus puntos medios, es decir $OC = OA$ y $OB = OD$. Por lo tanto, por un giro de 180° alrededor de O, los vértices C, D, P, Q del cuadrilátero $CDPQ$ se transforman respectivamente en los vértices A, B, Q, P del cuadrilátero $ABQP$.



Recíprocamente, sea m una recta que divida al paralelogramo $ABCD$ en dos figuras de igual área.
Si m no pasa por el centro del paralelogramo, haciendo un giro de 180° alrededor del centro del paralelogramo, como antes, la región R se transforma en R', lo que muestra que las dos regiones separadas por m no son iguales.

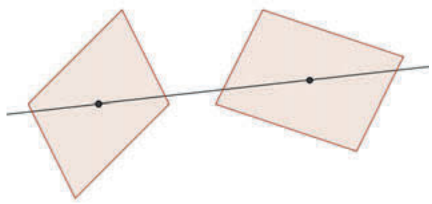
Nota: *Estas mismas consideraciones son válidas en cualquier figura con un centro de simetría, por ejemplo:*



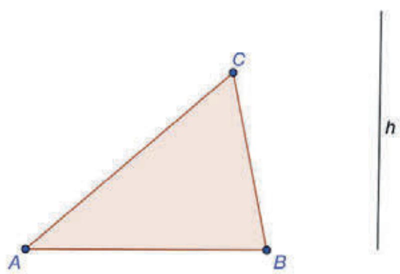
Problema 10 **Dados dos paralelogramos, existe una misma recta que descompone a cada paralelogramo en figuras iguales.**

Solución:

Teniendo en cuenta el problema 8, la recta que une los centros de los paralelogramos satisface lo pedido.

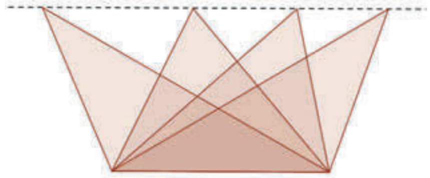


Problema 11 **Dado una triángulo *ABC*, construir con regla y compás, otro triángulo de igual área que *ABC* y una de las alturas de longitud *h* dada.**

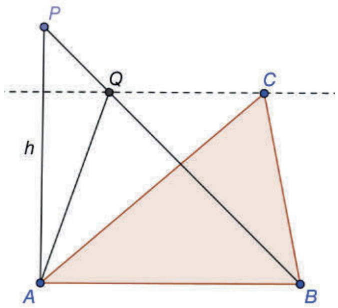


Solución:

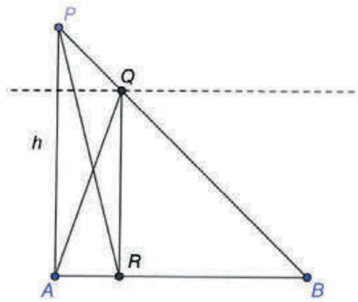
Se usará el siguiente hecho: Los triángulos que se obtienen al desplazar un vértice de un triángulo paralelamente al lado opuesto, tienen todos ellos la misma área.



Trazamos el segmento PA perpendicular a AB y de longitud h. Por el vértice C trazamos una paralela a AB que corta a PB en el punto Q. Los triángulos ABC y ABQ tienen la misma área, dado que comparten la base AB y tienen igual altura.



Ahora trazamos el segmento QR paralelo a PA.

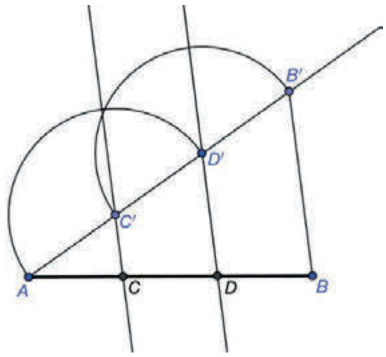


Los triángulos RQA y RQP tienen igual área por compartir la base RQ y por ser AP paralela a RQ. Finalmente, el área del triángulo BPR coincide con la suma de las áreas de BQR y de RQP, o bien con la suma de las áreas de BQR y de RQA, es decir, BPR y ABQ tiene igual área y ésta coincide con el área de ABC.

Problema 12 **Dividir un segmento en 3 segmentos iguales, usando regla y compás.**

Solución:

Sea dado el segmento AB. Por el punto A se traza una semirrecta y en ella con el compás se marcan los puntos C', D' y B' de modo que los segmentos AC', $C'D'$ y $D'B'$ tengan la misma longitud, como muestra la figura. Se unen los puntos B' y B y se trazan por C' y D' rectas paralelas a $B'B$ que cortan al segmento AB respectivamente en los puntos C y D. Por el teorema de Thales (ver apéndice), los segmentos AC, CD y DB tiene la misma longitud.

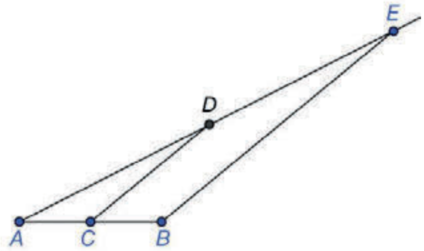


Problema 13 **Dados los segmentos cuyas medidas son 1, x e y, construir con regla y compás segmentos de medidas**

i) $x \cdot y$ ii) x/y

Solución:

Sean 

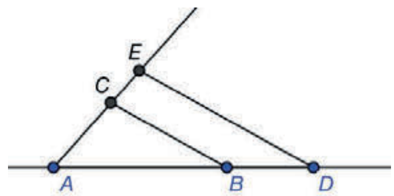


i) Se consideran los segmentos $AB = x$, $AC = 1$. Sobre una semirecta de origen A se marca $AD = y$, se une D con C y por el punto B, se traza una paralela a CD que corta a la semirecta en E.

Por el teorema de Thales se verifica que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} \quad \text{o bien} \quad AB \times AD = AE \times AC$$

es decir $AE = xy$.



ii) Sean $AB = x$, $AD = y$. Sobre una semirecta de origen A se marca $AC = 1$. Se unen C y D y por D se traza la paralela a CD que corta a la semirecta en E.

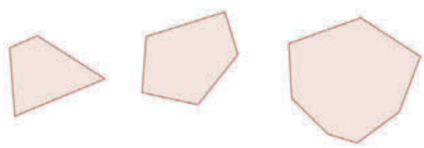
Por el teorema de Thales se verifica

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{o bien} \quad AE = \frac{y}{x}$$

Problemas Propuestos

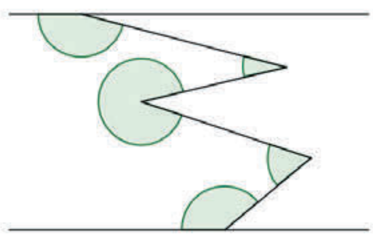
1. En el paralelogramo $ABCD$ el ángulo en el vértice A es 30° ¿Cuánto miden los ángulos en los vértices restantes?

2. Hallar la suma de los ángulos interiores y la suma de los ángulos exteriores de los siguientes polígonos dados.

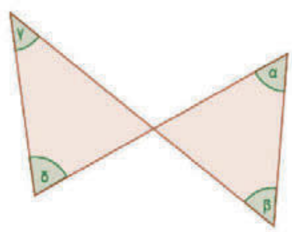


¿Y cuánto dan las sumas consideradas anteriormente para un polígono convexo de 2012 lados?
Un polígono es convexo si dados dos puntos del mismo, el segmento que los une está contenido en el polígono.

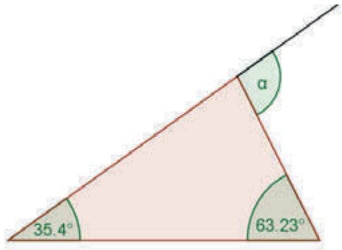
3. Una poligonal une dos paralelas dividiendo la franja limitada por las paralelas en dos regiones. Hallar la suma de los ángulos de la poligonal marcados en una de las regiones. ¿y cuál es la suma de los ángulos en la otra región?



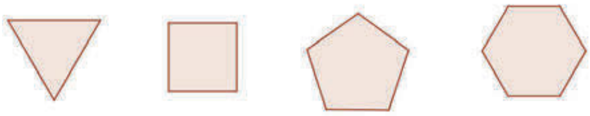
4. Dados los ángulos marcados en la figura, calcular $\alpha + \beta - \gamma - \delta$:



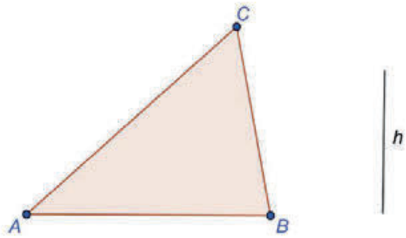
5. Calcular el valor de α (ángulo exterior).



6. Determinar el valor de los ángulos interiores y exteriores de un polígono regular de 3, 4, 5 y 6 lados.



7. Dado una triángulo *ABC*, construir con regla y compás, otro triángulo de igual área que *ABC* y una de las alturas de longitud *h* dada.



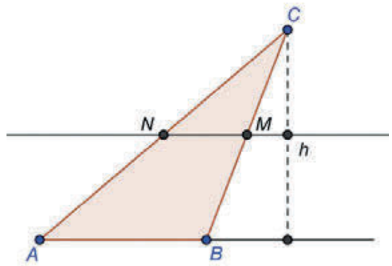
8. Dado un paralelogramo cuyos vértices son los puntos medios de los lados de un cuadrilátero, dibujar dos de estos cuadriláteros.

9. En el cuadrilátero *ABCD*, el triángulo *ABC* tiene área 5 cm^2 y el triángulo *ACD* tiene área 7 cm^2. ¿En qué relación corta la diagonal *AC* a la diagonal *BD*?

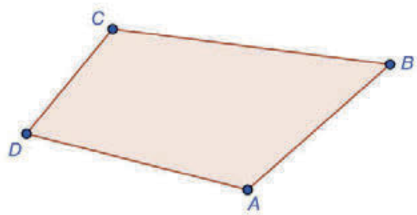
10. Usando regla y compás, dividir un segmento *AB* por un punto *C* tal que

$$\frac{AC}{CB}=\frac{3}{4}$$

11. Dado el triángulo *ABC* de área 20 cm^2 y altura *h* respecto del lado *AB*, por el punto medio *D* de h se traza la paralela a *AB* que corta a los lados *AC* y *BC* en los puntos *N* y *M* respectivamente. Calcular el área de *NMC*.



12. Dado el cuadrilátero *ABCD*, construir con regla y compás un triángulo de la misma área.



13. En el triángulo *ABC* de área 9 cm^2. Usando regla y compás trazar una recta por uno de sus vértices que divida al triángulo *ABC* en dos triángulos, uno de área 2 cm^2 y otro de área 7 cm^2.

14. Por cada vértice de un triángulo dado, se trazan paralelas al correspondiente lado opuesto. Estas rectas delimitan un triángulo de 20 cm^2 de área. Hallar el área del triángulo dado.

15. En un cubo de 1 cm de arista se consideran todos los triángulos cuyos vértices son vértices del cubo. ¿Cuántos triángulos hay? ¿Cuántos son equiláteros? ¿Cuántos son rectángulos? ¿Cuántos son isósceles no equiláteros? ¿Cuánto miden sus áreas?

16. Entre los cuadriláteros cuyas diagonales miden 2 cm y se cortan en sus puntos medios, ¿Cuál es el área máxima? ¿Hay uno de área mínima? Sugerencia: usar un programa de geometría dinámica como CABRI GEOMETRE o GEO-GEBRA para visualizar la situación y experimentar.

MISCELÁNEAS

1- Si un cuadrilátero tiene sus diagonales iguales, ¿Es un rectángulo?

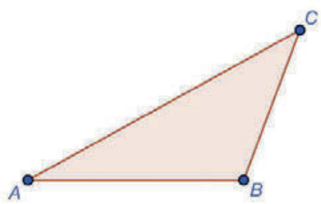
2- Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en sus puntos medios, ¿Es un paralelogramo?

3- Si un cuadrilátero tiene sus cuatro lados iguales, ¿Es un cuadrado?

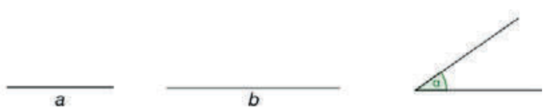
4- ¿Las diagonales de un rombo son perpendiculares?

5- Si un ángulo de un paralelogramo es recto, ¿se trata de un rectángulo?

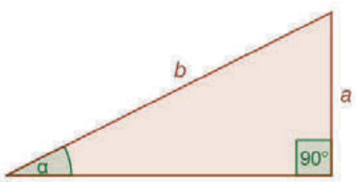
6- Construya con regla y compás 2 triángulos distintos que tengan los mismos ángulos que *ABC*.



7- Dados los segmentos *a* y *b* y el ángulo α, construya con regla y compás, 4 triángulos distintos que tengan *a* y *b* por lados y uno de los ángulos sea igual a α.



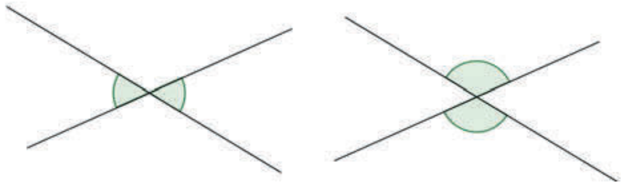
8- Se puede hacer lo mismo que en el ejercicio 6- si se dan los segmentos *a* y *b* y el ángulo α como en la figura?



Resultados aplicables a la resolución de los problemas

1- Ángulos opuestos por el vértice son iguales.

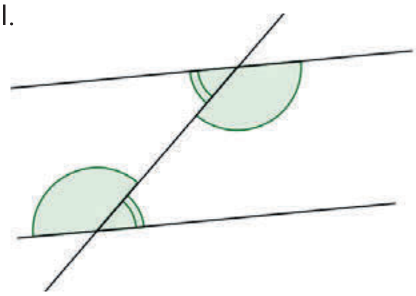
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales



2- Ángulos entre rectas paralelas cortadas por una recta transversal.

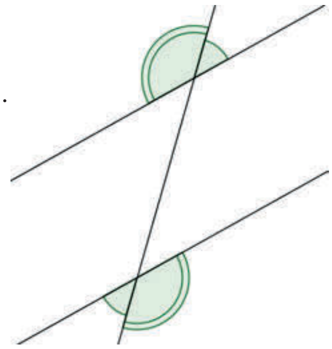
i) Ángulos alternos internos

Los ángulos alternos internos son iguales.



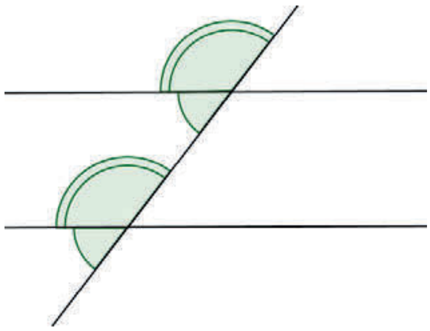
ii) Ángulos alternos externos

Los ángulos alternos externos son iguales.

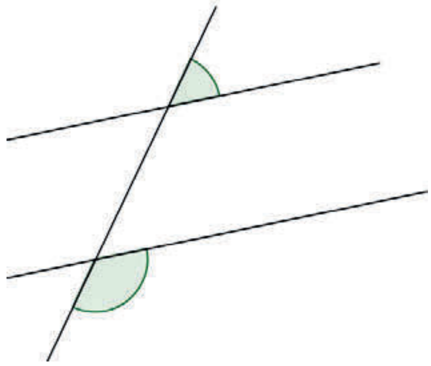


iii) Ángulos correspondientes

Los ángulos correspondientes son iguales.
Dibuje los ángulos correspondientes a la derecha de la transversal y deduzca que son iguales.

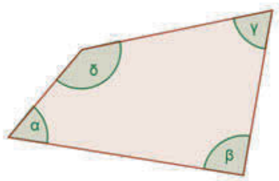


iv) ¿Cuánto mide la suma de los ángulos marcados?



Los ángulos marcados se llaman conjugados externos. Dibuje los conjugados internos y deduzca que la suma pedida es la misma (180°).

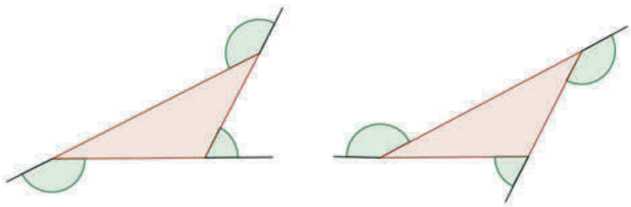
3- Suma de los ángulos interiores de un triángulo.



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

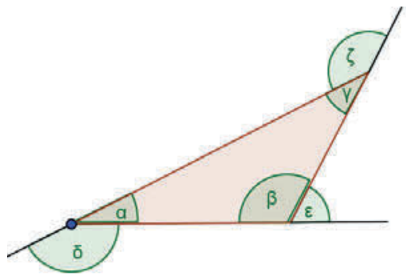
La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.
Dado el cuadrilátero *ABCD*, calcular la suma de los ángulos $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

4- Ángulos exteriores de un triángulo.



a) b)

¿Cuánto vale la suma de los ángulos exteriores correspondientes a cada uno de los vértices, considerados en uno de los sentidos expuestos? Figuras a) ó b)



Observemos en primer lugar cuánto vale un ángulo exterior con relación a los ángulos interiores del triángulo.

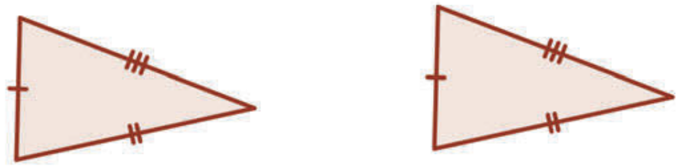
$$\zeta + \gamma = 180° = \alpha + \beta + \gamma$$

Luego $\zeta = \alpha + \beta$ y análogamente $\varepsilon = \alpha + \gamma$ y $\delta = \beta + \gamma$. En consecuencia, un ángulo exterior es la suma de los ángulos interiores no adyacentes. Ahora podemos calcular la suma pedida

$$\delta + \varepsilon + \zeta = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 2.180 = 360°$$

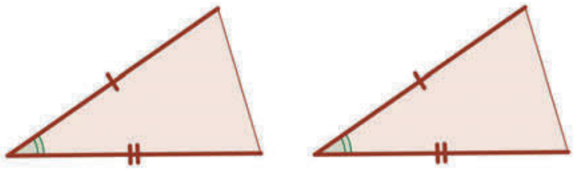
5- Conocemos un triángulo si conocemos los 3 lados y los 3 ángulos, es decir con 6 datos. Sin embargo, estos 6 datos pueden obtenerse a partir de una menor cantidad de datos. Surgen así los **Principios de igualdad de triángulos.**

i) Principio LLL



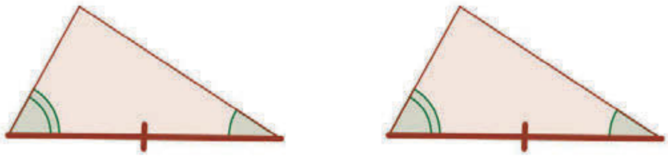
Dos triángulos que tienen los tres lados iguales son iguales.

ii) Principio LAL



Dos triángulos que tienen dos lados iguales y el ángulo comprendido igual, son iguales.

iii) Principio ALA



Dos triángulos que tienen un lado igual y los dos ángulos adyacentes iguales, son iguales.

iv) ¿Es cierto que son iguales dos triángulos que tengan 2 lados iguales e igual el ángulo opuesto a uno de ellos?
¿Puede enunciar un principio?

¿Es cierto que son iguales dos triángulos que tienen 2 lados iguales e igual un ángulo no comprendido entre ellos?

6- Teorema de Thales

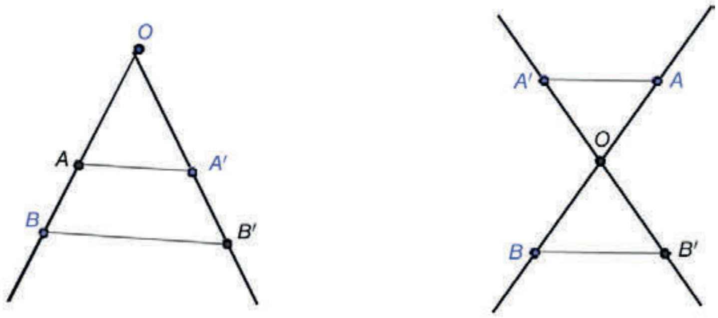
Dadas las rectas AB y $A'B'$ que se cortan en un punto O, si las rectas AA' y BB' son paralelas, entonces

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

Recíprocamente, si las rectas AB y $A'B'$ que se cortan en O satisfacen

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$$

entonces AA' y BB' son paralelas.



Como consecuencia del teorema de Thales se tiene, con las mismas hipótesis:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$$

Bibliografia

Área y Volumen en la Geometría Elemental –Red Olímpica–

Materiales de Matemática para 6º –Red Olímpica–

Resolviendo Problemas de Matemática –Red Olímpica–

Sorpresas Geométricas –Red Olímpica–

Viaje al país de los rectángulos –Red Olímpica–

Colección de Problemas Ñandú –Red Olímpica–