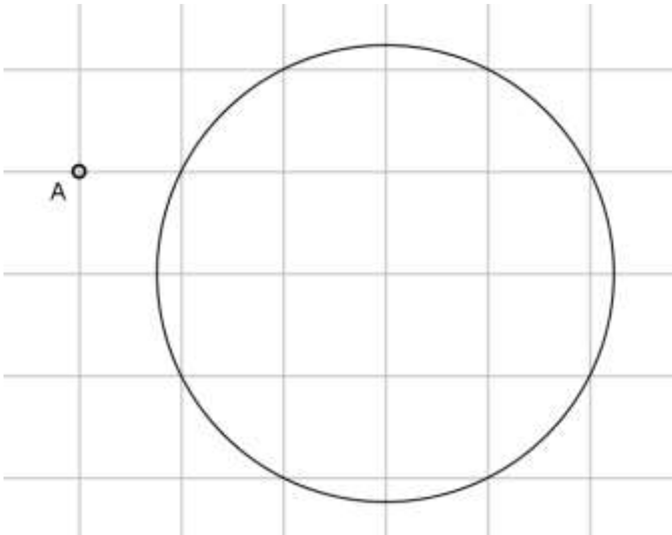
Torneo Geometría e Imaginación

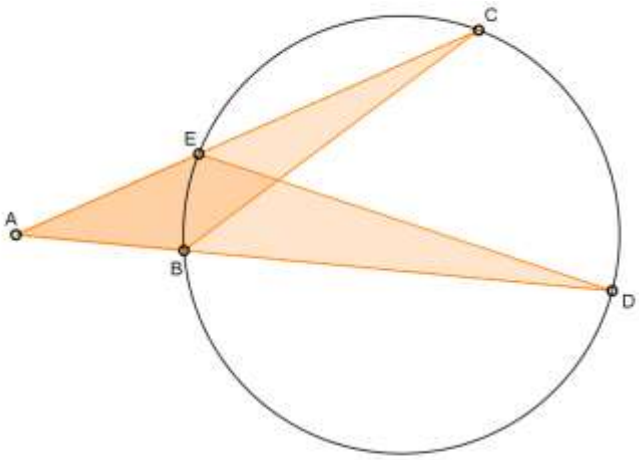
Problema Semanal de entrenamiento – P2- 36-2023

En la figura, usando sólo regla y lápiz, trazar las tangentes por el punto *A* a la circunferencia.

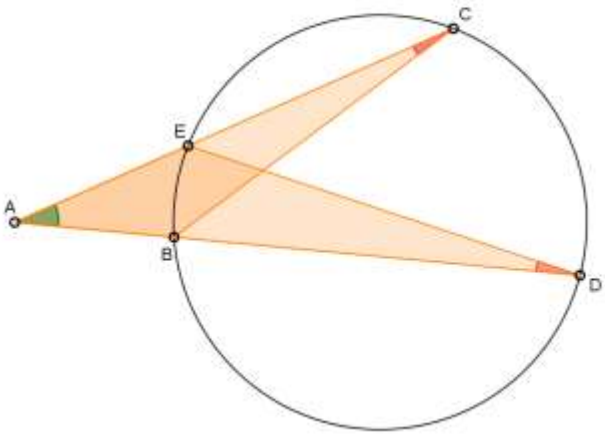


Solución P2-35-2023

Mostrar que los triángulos *ABC* y *ADE*, dados en la figura, son semejantes.



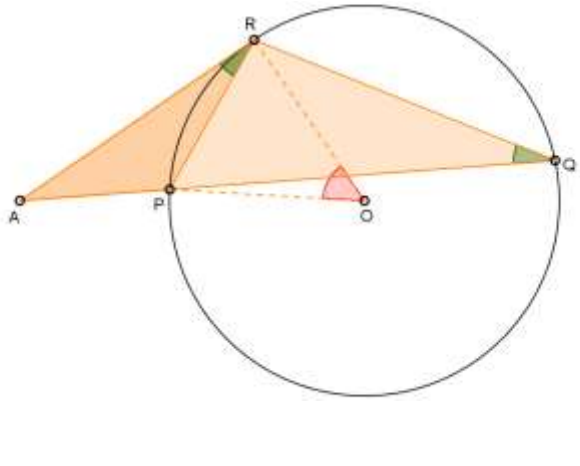
Solución:
: Los triángulos comparten el ángulo y en el vértice común *A*. Dado que *C* y *D* están en un arco capaz de la cuerda *BE*, los ángulos *BDE* y *BCE* tienen igual medida.



Los triángulos son semejantes y se vale la igualdad:

$$AE \times AC = AB \times AD$$

Nota: En la situación del problema, si trazamos desde *A* una recta que corte a la circunferencia en los puntos *P* y *Q* y trazamos un segmento de tangente *AR* como indica la figura,



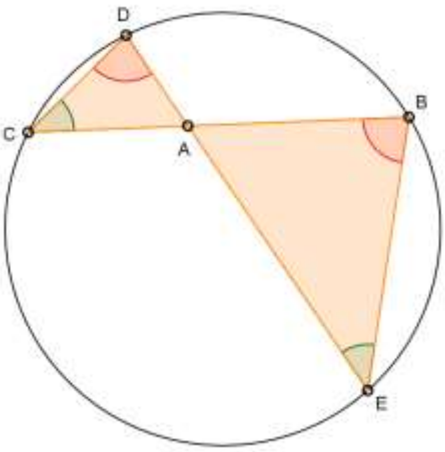
los triángulos AQR y APR son semejantes, dado que comparten el ángulo en el vértice común A y si O es el centro de la circunferencia, el ángulo ARP es igual a:

$$90 - PRO = 90 - \frac{180 - ROP}{2} = \frac{2RQP}{2} = RQP$$

De la semejanza resulta:

$$AP \times AQ = AR^2$$

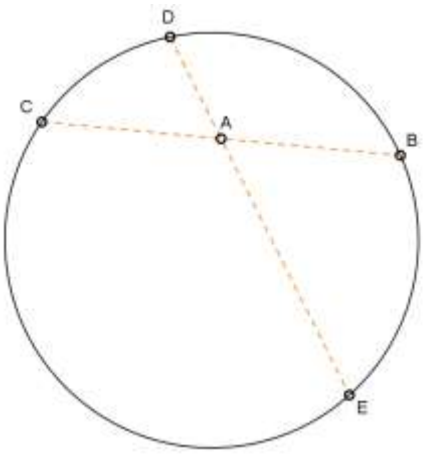
Es decir que el valor de $AP \times AQ$ no depende de la recta que se trace. Este valor asociado con el punto y la circunferencia, se conoce como ***Potencia de un punto respecto de una circunferencia*** y el concepto se mantiene si el punto se encuentra en el interior de la circunferencia.



Por la semejanza de los triángulos sombreados, resulta:

$$AB \times AC = AD \times AE$$

En particular, si se elige una recta que pase por A tal que A sea el punto medio de CB,



se obtiene la igualdad:

$$AD \times AE = AB^2$$