

INTRODUCCIÓN A LAS PROBABILIDADES DISCRETAS

GONZALO PÍNGARO

Presentación:

Se propone una clase introductoria de probabilidades para alumnos de tercer año de secundaria.

Conocimientos previos específicos:

Números combinatorios, factorial, combinaciones. Los mismos pueden brindarse en una clase previa a la propuesta.

Material específico: Dados, Calculadora con función “Random”.

.

1.1- El profesor anuncia que va a tirar dos dados y pide que se registren diferencias. Más tarde, que se registre si los números obtenidos son o no iguales. Finalmente, que se anote cuántos números pares salen en cada tirada. Para cada caso se pregunta cuáles son las respuestas posibles. Se puede, inclusive, pedirle a los alumnos que sugieran “cosas” que se pueden registrar a partir de tirar dos dados. Se pide determinar y comparar los conjuntos formados por las posibles respuestas en cada caso.

Finalmente pide que se registren las sumas. ¿Cuáles son las respuestas posibles?

En este momento se puede definir el término “Suceso” después de dar la noción de “Espacio muestral”. Una vez anotado dicho espacio muestral, se permite que discutan cuáles son las sumas que más veces pueden aparecer. Recién entonces se les da a los alumnos pares de dados para que registren 50 sumas. Se anota en el pizarrón una tabla de frecuencias.

(A modo de ejemplo, podría ser...

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	2	3	2	5	7	8	6	7	4	3	3

- Determinar cuáles son las más probables (en función del experimento)
- ¿Por qué?
- Discutir respuestas

Éste es un buen momento para discutir qué suma creen que es más posible que salga, y porqué y qué tan “probable”. Se puede preguntar cuántas veces creen que esto debe suceder si se repite el experimento, digamos 200 veces. Es un buen momento para enunciar la definición de probabilidades de Laplace para probabilidades discretas

1.2- Se puede completar el cuadro con una tercera fila $p = \text{pr}(\text{suma} = x)$

- ¿Cuál cree que es el motivo por el cual $\text{pr}(9) > \text{pr}(11)$?
- Cuánto debería dar la suma de los números de la tercera fila?
- ¿Por qué?
- ¿Cuánto vale $\text{pr}(\text{suma} = 15)$?
- ¿Cuál es el número más probable? Anda cerca del promedio...
Interesante!

2.- Ahora tiremos 5 dados. Consideremos el suceso “sale par”. Contamos el número de pares en cada tirada de 5 dados, sobre 200 experimentos.

Esta vez se propone usar la tabla de ceros y unos al azar (El 1 representa al par¹)

¿Qué cantidad de pares es más probable?

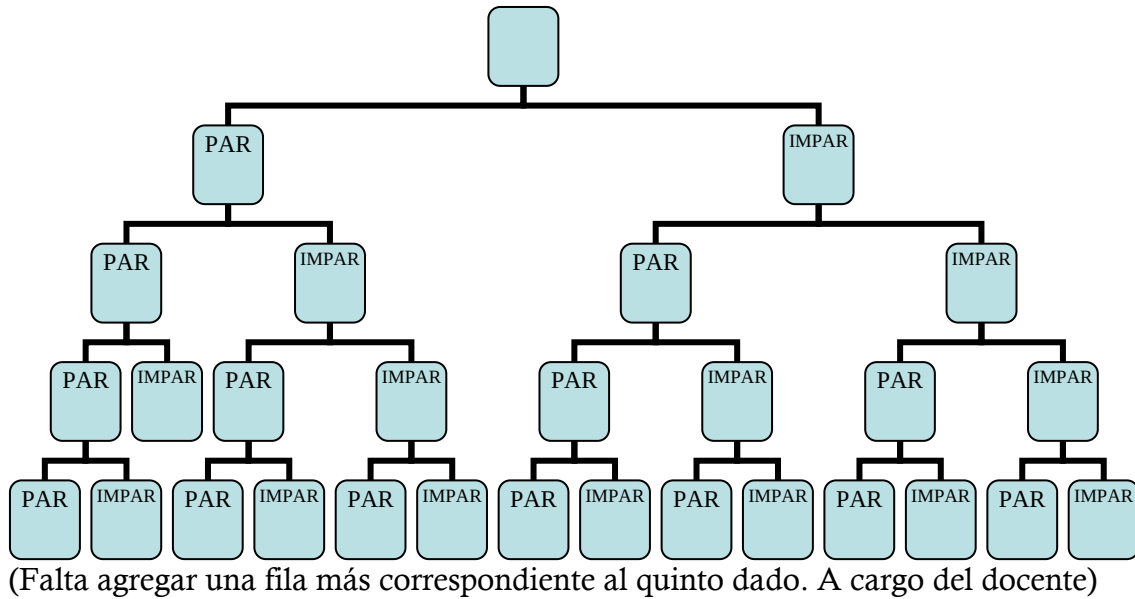
Se pregunta entonces cómo podría responderse esta pregunta sin tirar los dados ni usar una tabla de números aleatorios

Se sugiere un diagrama de árbol

Se construye uno en función del problema²

¹ Si genera confusión, se toma a 0 como representante de par

² Se debe preguntar qué relación hay entre $\text{pr}(\text{par})$ y $\text{pr}(\text{impar})$.



Se les pide a los alumnos que completen las ramas con las probabilidades de cada caso.

Considerando “tirada por tirada” se puede sugerir la idea de multiplicar las probabilidades de cada suceso. Al momento de evaluar la segunda tirada se puede preguntar si es igual de probable obtener par-par que obtener dos números de distinta paridad.

3.1- Ahora supongamos que anoto si el número es o no múltiplo de 3. Realizamos un nuevo árbol³.

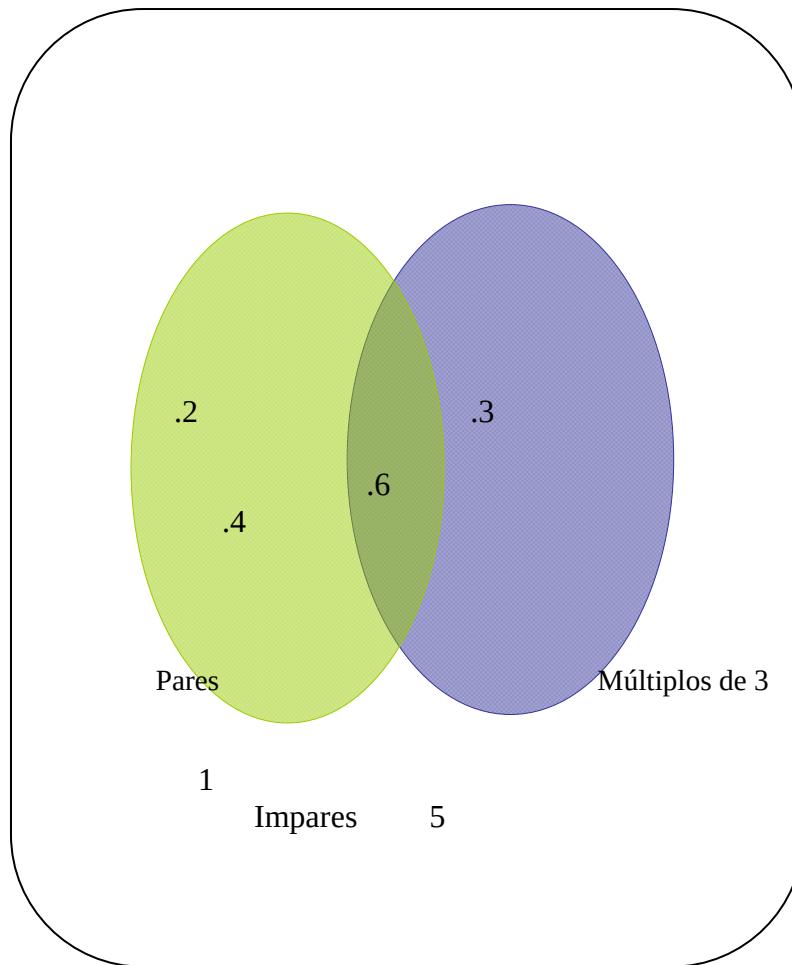
- En este caso... ¿Cuál es el número más esperado de múltiplos de 3?
- Y si se quisiera evitar el diagrama de árbol, ¿cómo puedo encontrar la pr (Ningún múltiplo de 3)?
- ¿Cuánto vale pr ($x=2$)?

3.2- En este momento es posible que surja como respuesta $(4/6)^2 \cdot (2/6)^4$. Es importante hacer notar, quizás con el diagrama de árbol, que hay muchos más caminos que conducen a “dos múltiplos de tres” que los que conducen a “ningún múltiplo de 3”. ¿Exactamente cuántos?

3.3- Es un buen momento para proponer una generalización de esta situación. Si se tiene un suceso A de probabilidad p , cuál es la probabilidad de que ese suceso se repita n veces en m tiradas?

³ Para ello debemos indagar si $\text{pr}(\text{múltiplo de } 3) = \text{pr}(\text{no múltiplo de } 3)$. Entonces...?

4.- Comparemos ahora los “casos favorables” entre los sucesos mencionados. Armemos un Diagrama de Venn.



Se pueden proponer preguntas tales como⁴:

- ¿Cuál es la pr (par y múltiplo de 3)?
- ¿Cuál es la pr (par o múltiplo de 3)?
- ¿Cuál es la pr (par sabiendo que salió un múltiplo de 3)?
- ¿Cuál es la pr (múltiplo de 3 sabiendo que salió un par)?
- Es cierto que $pr(\text{par sabiendo que salió un múltiplo de 3}) = pr(\text{par y múltiplo de 3}) / pr(\text{múltiplo de 3})$? Y que $pr(\text{múltiplo de 3 sabiendo que salió un par}) = pr(\text{par y múltiplo de 3}) / pr(\text{par})$? Después de obtener las respuestas a estas preguntas es oportuno definir para sucesos A y B arbitrarios la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B en la forma $pr(A|B) = \frac{pr(AB)}{pr(B)}$.
- Es cierto que $pr(\text{par sabiendo que salió múltiplo de 3}) = pr(\text{par})$? Si lo fuera uno podría decir que los sucesos “salió par” y “salió múltiplo de 3” son “independientes”, y no independientes en caso contrario. La respuesta a esta pregunta da pie para definir la noción de “Sucesos independientes”, diciendo que dos sucesos arbitrarios A y B son independientes si $pr(A|B) = pr(A)$.

5.- Algunos ejercicios y problemas propuestos:

1.1 Se tiene un mazo de 40 cartas españolas. Hallar la probabilidad de extraer un oro

1.2 Hallar la probabilidad de extraer el 12 de oros.

1.3 Hallar la probabilidad de extraer un 12 ó un oro.

2.1 Con la ayuda de la tecla ran# de la calculadora, armar una tabla de 50 números aleatorios entre 1 y 6 (Si el colegio dispone de computadoras en el aula se puede hacer en el Excel o en cualquier planilla de cálculo)

2.2 Idem para números entre 1 y 10

2.3 Idem para 0 ó 1

3.1 En una mano de truco, ¿cuál es la probabilidad de obtener flor¹ de oro?²

3.2 Saco cartas del mazo hasta obtener una de oro. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el primer oro en la jugada k?

3.3 Saco cartas del mazo hasta obtener una flor de oro. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el último oro en la jugada k?

3.4 Saco cartas del mazo y las repongo hasta obtener tres oros. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el tercer oro en la jugada k?³

4. *El problema de las llaves.* Se mezclan cuatro llaves de las cuales sólo una abre un cofre. Se extraen de a una y se prueban hasta que el cofre sea finalmente abierto.

4.1 Hallar la probabilidad de que la llave “ganadora” sea la tercera.

4.2 Repetir con 20 llaves y que la ganadora sea la 13^o.

4.3 Generalizar para “n” llaves y que la ganadora sea la “k-ésima”

5.1 Dados cuatro vértices de un cuadrado, ¿Cuántos triángulos se pueden formar?

5.2 Repetir para un polígono de “n” lados.

5.3 Hallar el número de diagonales de un polígono de “n” lados.

5.4 Dados 6 puntos en una recta y 9 en otra paralela a la anterior, se forman triángulos. ¿Cuántos se pueden formar?

5.5 Generalizar para “m” y “n” puntos.

5.6 Entre los vértices de un decágono regular, se eligen al azar tres vértices y se los une formando un triángulo. Inmediatamente se eligen nuevamente tres vértices (pueden repetirse) y se los une formando otro triángulo. Hallar la probabilidad de que los triángulos determinados sean congruentes.

6. Oscar es conocido como un hombre no muy honesto; de hecho, el 10% de las veces utiliza una moneda con dos caras. En una oportunidad arrojó la moneda 5 veces y obtuvo cinco caras. ¿Cuál es la probabilidad de que Oscar no haya hecho trampa esa vez?

7. A, B, C son tres sucesos de los cuales se sabe que (escribimos P en lugar de pr):

$P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,3$; $P(C) = 0,4$;

$P(AB) = 0,15$; $P(AC) = 0,1$; $P(BC) = 0,3$;

$P(ABC) = 0,05$.

- 7.1 Hallar la probabilidad de que ocurran exactamente dos de los tres sucesos
 7.2 Hallar la probabilidad de que ocurran al menos dos de los tres sucesos
 7.3 Hallar la probabilidad de que ocurran a lo sumo dos de los tres sucesos

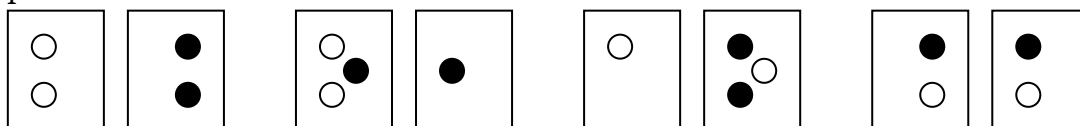
8. De un mazo imperfecto de cartas españolas se sabe que:

$$P(\text{obtener un rey o un oro}) = 1/3$$

$$P(\text{obtener un oro}) = 5/18 \text{ y que } P(\text{obtener el rey de oro}) = 1/12.$$

- 8.1 ¿Cuántos reyes hay en el mazo?
 8.2 ¿Cuántas cartas hay en total?
 8.3 ¿La respuesta es única? ¿Porque?
 8.4 ¿Cómo se podría reformular el ejercicio para que la respuesta sea única?

9. *Una historia de prisioneros.* A un prisionero condenado a muerte se le ofrece la siguiente posibilidad de salvar su vida. Se le dan dos bolillas blancas y dos negras y se le dice que puede distribuirlas entre dos urnas de manera que haya por lo menos una en cada urna. Entonces el verdugo elegirá una urna al azar y una bolilla de la misma. Si la bolilla resulta negra, el prisionero será ejecutado. Pero si la bolilla es blanca, quedará en libertad. Se desea saber cómo debe el prisionero distribuir las bolillas para que la probabilidad de quedar libre sea máxima. Aclaración: los casos posibles son:



10.1 En una bolsa se tienen seis fichas numeradas de 1 a 6. Se van sacando una a una sin reponerlas en la bolsa. ¿Cuál es la probabilidad de que hayan salido en orden creciente?

10.2 Considerar el mismo caso pero ahora cada vez que se extrae una ficha se anota el número y se devuelve a la bolsa.

10.3 Comparar los resultados.

11. Se tienen seis dados en un cubilete y se lanzan al azar sobre una mesa. Hallar la probabilidad de obtener escalera

12.1 Marquito es muy desorganizado. A tal punto que guarda sus cinco pares de zapatos (Son todos distintos) en un mismo cajón, y saca siempre dos zapatos sin mirar. Hallar la probabilidad de que saque dos de un mismo par.

12.2 Generalizar para un número n de pares de zapatos.

13. Laura, que es igual de desorganizada que Marquito, hace lo mismo con sus 12 pares de medias. Pero ella saca las medias de a una hasta obtener dos del mismo par. Hallar la probabilidad de que logre su objetivo en la extracción “ k ”.

14. El problema de los cumpleaños. ¿Cuál es la probabilidad de que entre los alumnos de un curso de 25 personas haya dos que cumplen el mismo día?

15. “Dos jugadores tiran dos dados cada uno. Esta vez no se trata de dados ordinarios sino que están numerados del cero al cinco. El primer jugador anuncia antes de tirar si prefiere sumar o multiplicar los números obtenidos en el dado para obtener su puntaje. El segundo jugador está obligado a hacer la otra operación.

Gana el jugador que mayor puntaje obtenga”. ¿Qué le conviene elegir al primer jugador?

¹ “Flor” es un juego de cartas del mismo palo.

² A partir de la resolución de este problema se puede construir la fórmula de la `Hipergeométrica`

³ A partir de este problema se puede construir la fórmula de la `Binomial`

⁴ En futuras clases se propondrá llegar a $\text{pr}(A \cup B) = \text{pr}(A) + \text{pr}(B) - \text{pr}(A \cap B)$; justificar $\text{Pr}(AB) = \text{pr}(A) \text{pr}(B) \Leftrightarrow A \text{ y } B \text{ son independientes}$ y establecer el teorema de Bayes.

RESPUESTAS Y SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS PLANTEADOS

1.1.1) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

1.1.2) $S = \{\text{si}, \text{no}\}$

1.1.3) $S = \{0, 1, 2\}$

1.1.4) $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

1.2)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
f(x)	2	3	2	5	7	8	6	7	4	3	3
p	1/25	3/50	1/25	1/10	7/50	4/25	3/25	7/25	2/25	3/25	3/25

2. Rta: 2 y 3, con frecuencia 34.

3.1 .1 A cargo del alumno.

3.1. 2 Sea x el número de múltiplos de 3 en 5 tiradas, pr (ningún múltiplo de 3) =
= pr (x = 0) = $(4/6)^5$ 3.2 Tantos como formas de ordenar dos “3” haya en 5 lugares = $\binom{5}{2} = 10$

3.3 $\Pr(x=n) = \binom{m}{n} p^n \cdot q^{m-n}$

Entonces la respuesta al problema es pr (x=2) = $\binom{5}{2} (4/6)^2 \cdot (2/6)^4$

4.1 $P(\text{par y múltiplo de 3}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{1}{6}$; ó bien

$$P(\text{par y múltiplo de 3}) = P(\text{par}) \cdot P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

4.2 $P(\text{par ó múltiplo de 3}) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$; ó bien

$$P(\text{par ó múltiplo de 3}) = P(\text{par}) + P(\text{múltiplo de 3}) - P(\text{par y múltiplo de 3}) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4.3 $P(\text{par} \mid \text{múltiplo de 3}) = \frac{P(\text{par y múltiplo de 3})}{P(\text{múltiplo de 3})} = \frac{1/6}{2/6} = \frac{1}{2}$

4.4 $P(\text{múltiplo de 3} \mid \text{par}) = \frac{P(\text{par y múltiplo de 3})}{P(\text{par})} = \frac{1/6}{3/6} = \frac{1}{3}$

4.5 Si fueran independientes, $P(\text{par} \mid \text{múltiplo de 3}) = P(\text{par})$ lo cual claramente es cierto.

5.1.1) $1/4$;

5.1.2) $1/40$;

5.1.3) $P(\text{Oro ó 12}) = P(\text{oro}) + P(12) - P(12 \text{ de oro}) = 10/40 + 4/40 - 1/40 = 13/40$

5. 2.1) Como la tecla ran# arroja números entre 0 y 1, lo que hay que hacer es multiplicar por 5 y sumar 1; es decir hay que tipear en el visor de la pantalla de la calculadora (o en la celda del Excel) $5 \times \text{Ran\#} + 1$ y entonces cada vez que se presione la tecla de = aparecerá en pantalla un número aleatorio entre 1 y 6.

5.2.2) $9 \times \text{Ran\#} + 1$

5.2.3) $10 \times \text{Ran\#}$

$$5.3.1) \frac{\binom{40}{10} \binom{10}{3}}{\binom{40}{3}}$$

$$5.3.2) \text{ Si } k < 31, P(\text{Oro en la jugada "k"}) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39} \cdots \frac{30-k+1}{40-k+1} \cdot \frac{10}{40-k}$$

$$5.4.1) P(x=3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$5.4.2) P(x=13) = \frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18} \cdots \frac{13}{14} \cdot \frac{1}{13} = \frac{1}{20} \text{ En este momento se puede "sospechar que todas las llaves tienen igual probabilidad...}$$

$$5.4.2) P(x=k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \text{ Con esto queda demostrada nuestra "sospecha".}$$

5.5.1) 2

$$5.5.2) \binom{n}{3}$$

$$5.5.3) \frac{1}{2} n \cdot (n-1)$$

$$5.5.4) \binom{6}{2} \cdot 9 + \binom{9}{2} \cdot 6$$

$$5.5.5) \binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m$$

$$5.6) P(\text{No trampa} / 5 \text{ caras seguidas}) = \frac{P(\text{No trampa y 5 caras seguidas})}{P(\text{No trampa})} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{0,9}$$

$$5.7.1) P(AC) + P(BC) + P(AB) - 3 \cdot P(ABC)$$

$$5.7.2) P(A) + P(B) + P(C) - (P(AC) + P(BC) + P(AB)) + 2 \cdot P(ABC)$$

$$5.7.3) P(A) + P(B) + P(C) - (P(AC) + P(BC) + P(AB)) + 3 \cdot P(ABC)$$

5.8) Una forma de resolver este problema es plantear que: Siendo A = Obtener un rey y B = obtener un oro...

$$\text{pr}(A \cup B) = \text{pr}(A) + \text{pr}(B) - \text{pr}(A \cap B)$$

$1/3 = P(\text{Rey}) + 5/12 - 1/12$ entonces $P(\text{Rey}) = 5/36$, es decir que de cada 36 cartas, 5 son reyes. Si se agregara con información que hay menos de 50 cartas, la respuesta a la pregunta 8.2 sería única

5.9) Para cada opción se debe calcular la probabilidad de extraer una bola negra. A modo de ejemplo, resolvemos el caso para la opción 2 (Llamaré A a la primera urna y B a la segunda).

$$P(N) = P(A) \cdot P(N/A) + P(B) \cdot P(N/B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Realizando las cuentas para cada opción, se llega a que la opción 3 tiene $P(N) = 1/3$ por lo tanto es la más favorable

$$5.10.1) 1/6 \cdot 1/5 \cdot 1/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/6!$$

$$5.10.2) (1/6)^6$$

$$5.10.3) (1/6)^6 < 1/6!$$

$$5.11) 6!/6^6$$

$$5.12.1) \frac{5}{\binom{10}{2}}$$

$$5.12.2) \frac{n}{\binom{2n}{2}}$$

$$5.13) P(k=1) = 0 \text{ (Es obvio, no?);}$$

$$P(k=2) = 1/11;$$

$$P(k=3) = 10/11 \cdot 1/10;$$

$$P(k=4) = 10/11 \cdot 8/10 \cdot 3/9;$$

$$P(k=5) = 10/11 \cdot 8/10 \cdot 6/9 \cdot 4/8$$

$$\text{Y en general, } P(K=k) = \frac{\prod_{i=8-k}^5 2 \cdot i}{\prod_{i=13-k}^{11} i} \text{ (Siempre que } k > 2)$$

5.14 En este caso es sencillo hallar la probabilidad de que esto no ocurra. Ésta vale:

$$\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \frac{362}{365} \cdot \frac{361}{365} \cdots \frac{341}{365} \cdot \frac{340}{365} = \frac{364!}{339! \cdot 365^{29}} \cong 0,401759$$

Por lo tanto la probabilidad de que haya al menos dos que cumplan años el mismo día es $1 - 0,401759 = 0,598241 > 1/2$ (Curioso, no?)

5.15) Primero armamos dos cuadros, uno con la suma y otro con el producto.

Jugador A							Jugador B						
+	0	1	2	3	4	5	x	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5	0	0	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	5	6	1	0	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	6	7	2	0	2	4	6	8	10
3	3	4	5	6	7	8	3	0	3	6	9	12	15
4	4	5	6	7	8	9	4	0	4	8	12	16	20
5	5	6	7	8	9	10	5	0	5	10	15	20	25

Entonces evaluemos caso por caso quién gana. Si el jugador A (no es necesariamente el primero) obtiene cero, cuya probabilidad es $1/36$, el jugador B gana con $p_B = 25/36$ y empatan con $p_E = 11/36$

El siguiente cuadro describe la probabilidad de que gane B o de que empaten en cada caso:

Si A obtiene	con probabilidad	pr(gana b)	pr (empatan)
1	2/36	24/36	1/36
2	3/36	22/36	2/36
3	4/36	20/36	1/36
4	5/36	18/36	3/36
5	6/36	15/36	2/36
6	5/36	13/36	2/36
7	4/36	13/36	0
8	3/36	10/36	2/36
9	2/36	10/36	1/36
10	1/36	8/36	2/36

Dado que los sucesos son independientes,

$$\Pr(\text{gane B}) = \frac{2}{36} \cdot \frac{24}{36} + \dots + \frac{1}{36} \cdot \frac{8}{36} = b$$

$$\Pr(\text{empate}) = \frac{2}{36} \cdot \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{36} \cdot \frac{2}{36} = t$$

Además los sucesos “gane A”, “gane B”, y “empaten” son disjuntos y completos, entonces $\Pr(\text{Gane A}) = 1 - b - t = a$

Como $a > b > t$ el primer jugador debería elegir sumar.