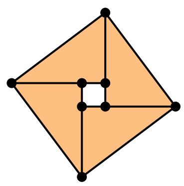
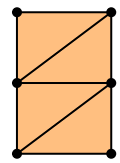
Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría
Nivel Elemental: alumnos de 7º y 8º grados

1. Se tienen cuatro triángulos iguales de madera de lados 3, 4 y 5 centímetros. ¿Cuántos polígonos convexos se pueden formar usando todos estos triángulos? (Dibujar los polígonos sin hacer demostraciones.)
Un polígono convexo es un polígono con todos sus ángulos menores que 180º y que no tiene huecos. Por ejemplo:



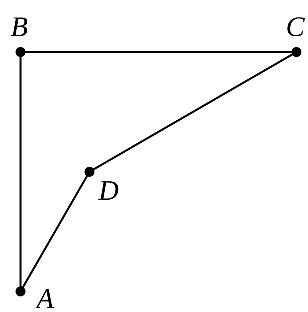
Este polígono no es convexo



Este polígono es convexo

2. Sea ABC un triángulo con $A = 60^{\circ}$. Los puntos M, N, K están en BC, AC, AB respectivamente, de modo que $BK = KM = MN = NC$. Si $AN = 2AK$, hallar los valores de B y C.

3. En la figura que se muestra a continuación sabemos que $AB = CD$, $BC = 2AD$, $BCD = 30^{\circ}$ y $ABC = 90^{\circ}$. Demostrar que $BAD = 30^{\circ}$.



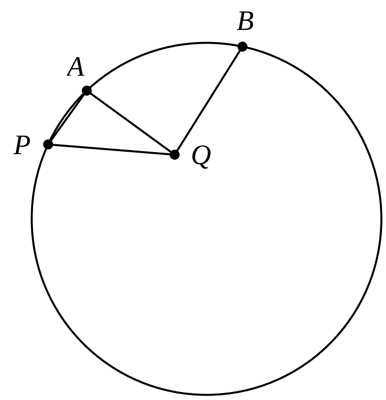
4. En un rectángulo *ABCD*, los puntos *M*, *N*, *P*, *Q* están en *AB*, *BC*, *CD*, *DA* respectivamente de modo que las áreas de los triángulos *AQM*, *BMN*, *CNP*, *DPQ* son iguales. Demostrar que el cuadrilátero *MNPQ* es un paralelogramo.

5. Determinar si existen 6 circunferencias del plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

Tiempo: 3 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría
Nivel Medio: alumnos de 9º y 10º grados

1. En la figura, los puntos *P*, *A*, *B* están en una circunferencia. El punto *Q* está en el interior de la circunferencia de modo que $PAQ = 90^{\circ}$ y $PQ = BQ$. Demostrar que el valor de $AQB - PQA$ es igual al arco AB (o sea, igual al ángulo AOB, donde *O* es el centro de la circunferencia).



2. En el triángulo acutángulo *ABC*, *BH* es la altura desde el vértice *B*. Los puntos *D* y *E* son puntos medios de *AB* y *AC* respectivamente. Supongamos que *F* es el simétrico de *H* con respecto a *ED*. Demostrar que la recta *BF* pasa por el circuncentro del triángulo *ABC*.

3. En el triángulo *ABC* los puntos *M*, *N*, *K* son puntos medios de *BC*, *CA*, *AB* respectivamente. Sean ω_B y ω_C dos semicircunferencias de diámetros *AC* y *AB* respectivamente, exteriores al triángulo. Supongamos que *MK* y *MN* cortan a ω_C y ω_B en *X* e *Y* respectivamente. Si las tangentes trazadas por *X* e *Y* a ω_C y ω_B respectivamente se cortan en *Z*, demostrar que $AZ \perp BC$.

4. Sea *ABC* un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita es ω y cuyo circuncentro es *O*. Sea *P* un punto del arco BC. La tangente a ω trazada por *P* corta las prolongaciones de *AB* y *AC* en *K* y *L* respectivamente. Demostrar que $KOL > 90^{\circ}$.

5. a) Determinar si existen 5 circunferencias en el plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.
b) Determinar si existen 6 circunferencias en el plano tales que cada circunferencia pasa por los centros de exactamente 3 de las otras circunferencias.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos

Problemas de la segunda olimpiada iraní de geometría
Nivel Avanzado: alumnos de 11º y 12º grados

1. Dos circunferencias ω_1 y ω_2 (de centros O_1 y O_2 respectivamente) se cortan en *A* y *B*. El punto *X* pertenece a ω_2. Sea *Y* un punto de ω_1 tal que $XBY = 90^{\circ}$. Sea *X'* el segundo punto de intersección de la recta O_1X y ω_2, y sea *K* el segundo punto de intersección de *X'Y* y ω_2. Demostrar que *X* es el punto medio del arco AK.

2. Sea *ABC* un triángulo equilátero cuya circunferencia circunscrita es ω y cuyo circuncentro es *O*. Sea *P* un punto del arco BC. La tangente a ω trazada por *P* corta las prolongaciones de *AB* y *AC* en *K* y *L* respectivamente. Demostrar que $KOL > 90^{\circ}$.

3. Sea *H* el ortocentro del triángulo *ABC*. Sean l_1 y l_2 dos rectas que pasan por *H* perpendiculares entre sí. La recta l_1 corta a *BC* y a la prolongación de *AB* en *D* y *Z* respectivamente, y la recta l_2 corta a *BC* y a la prolongación de *AC* en *E* y *X* respectivamente. Sea *Y* un punto tal que $YD \parallel AC$ y $YE \parallel AB$. Demostrar que *X*, *Y*, *Z* están alineados.

4. En el triángulo *ABC* dibujamos la circunferencia de centro *A* y radio *AB*. Esta circunferencia corta a *AC* en dos puntos. También dibujamos la circunferencia de centro *A* y radio *AC* y esta circunferencia corta a *AB* en dos puntos. Denotamos a estos cuatro puntos A_1, A_2, A_3, A_4. Los puntos B_1, B_2, B_3, B_4 y C_1, C_2, C_3, C_4 se definen de manera similar. Supongamos que estos 12 puntos están en dos circunferencias. Demostrar que el triángulo *ABC* es isósceles.

5. Los rectángulos ABA_1B_2, BCB_1C_2, CAC_1A_2 son exteriores al triángulo *ABC*. Sea *C'* un punto tal que $C'A_1 \perp A_1C_2$ y $C'B_2 \perp B_2C_1$. De manera similar se definen los puntos *A'* y *B'*. Demostrar que las rectas *AA'*, *BB'*, *CC'* son concurrentes.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 8 puntos