Viernes 10 de julio de 2015

Problema 1. Decimos que un conjunto finito $\mathcal{S}$ de puntos del plano es *equilibrado* si para cada dos puntos distintos A y B en $\mathcal{S}$ hay un punto C en $\mathcal{S}$ tal que $AC = BC$. Decimos que $\mathcal{S}$ es *libre de centros* si para cada tres puntos distintos A, B, C en $\mathcal{S}$ no existe ningún punto P en $\mathcal{S}$ tal que $PA = PB = PC$.

(a) Demostrar que para todo $n \geq 3$ existe un conjunto de n puntos equilibrado.

(b) Determinar todos los enteros $n \geq 3$ para los que existe un conjunto de n puntos equilibrado y libre de centros.

Problema 2. Determinar todas las ternas (a, b, c) de enteros positivos tales que cada uno de los números

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

es una potencia de 2.

(*Una potencia de* 2 *es un entero de la forma* 2^n, *donde* n *es un entero no negativo.*)

Problema 3. Sea ABC un triángulo acutángulo con $AB > AC$. Sea Γ su circunferencia circunscrita, H su ortocentro, y F el pie de la altura desde A. Sea M el punto medio del segmento BC. Sea Q el punto de Γ tal que $\angle HQA = 90°$ y sea K el punto de Γ tal que $\angle HKQ = 90°$. Supongamos que los puntos A, B, C, K y Q son todos distintos y están sobre Γ en este orden.

Demostrar que la circunferencia circunscrita al triángulo KQH es tangente a la circunferencia circunscrita al triángulo FKM.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos

Sábado 11 de julio de 2015

Problema 4. El triángulo ABC tiene circunferencia circunscrita Ω y circuncentro O. Una circunferencia Γ de centro A corta al segmento BC en los puntos D y E tales que B, D, E y C son todos diferentes y están en la recta BC en este orden. Sean F y G los puntos de intersección de Γ y Ω, tales que A, F, B, C y G están sobre Ω en este orden. Sea K el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo BDF y el segmento AB. Sea L el segundo punto de intersección de la circunferencia circunscrita al triángulo CGE y el segmento CA.

Supongamos que las rectas FK y GL son distintas y se cortan en el punto X. Demostrar que X está en la recta AO.

Problema 5. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación

$$f\big(x + f(x+y)\big) + f(xy) \;=\; x + f(x+y) + yf(x)$$

para todos los números reales x, y.

Problema 6. La sucesión de enteros $a_1, a_2, \ldots$ satisface las siguientes condiciones:

(i) $1 \le a_j \le 2015$ para todo $j \ge 1$;

(ii) $k + a_k \ne \ell + a_\ell$ para todo $1 \le k < \ell$.

Demostrar que existen dos enteros positivos b y N tales que

$$\left| \sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b) \right| \le 1007^2$$

para todos los enteros m y n que satisfacen $n > m \ge N$.

Tiempo: 4 horas y 30 minutos
Cada problema vale 7 puntos