XI Olimpíada de Mayo

Mayo de 2005

Primer nivel

PROBLEMA 1

En el pizarrón había seis figuras: un círculo, un triángulo, un cuadrado, un trapecio, un pentágono y un hexágono, pintadas de seis colores: azul, blanco, rojo, amarillo, verde y marrón. Cada figura tenía un solo color y todas las figuras eran de colores distintos.
Al día siguiente se preguntó de qué color era cada figura.
Pablo respondió: “El círculo era rojo, el triángulo era azul, el cuadrado era blanco, el trapecio era verde, el pentágono era marrón y el hexágono era amarillo”.
Sofía respondió: “El círculo era amarillo, el triángulo era verde, el cuadrado era rojo, el trapecio era azul, el pentágono era marrón y el hexágono era blanco”.
Pablo se equivocó tres veces y Sofía dos veces, y se sabe que el pentágono era marrón.
Determina si es posible saber con certeza cuál era el color de cada una de las figuras.

PROBLEMA 2

Un número entero se llama *autodivi* si es divisible entre el número de dos cifras formado por sus dos últimos dígitos (decenas y unidades). Por ejemplo, 78013 es autodivi pues es divisible entre 13, 8517 es autodivi pues es divisible entre 17.
Halla 6 números enteros consecutivos que sean autodivi y que tengan las cifras de las unidades, de las decenas y de las centenas distintas de 0.

PROBLEMA 3

Un segmento AB de longitud 100 está dividido en 100 segmentitos de longitud 1 mediante 99 puntos intermedios. Al extremo A se le asigna el 0 y al extremo B, el 1.
Gustavo asigna a cada uno de los 99 puntos intermedios un 0 o un 1, a su elección, y luego colorea cada segmento de longitud 1 de azul o de rojo, respetando la siguiente regla:
Son rojos los segmentos que tienen el mismo número en sus extremos y son azules los segmentos que tienen diferentes números en sus extremos.
Determina si Gustavo puede asignar los 0 y los 1 de modo de obtener exactamente 30 segmentos azules. ¿Y 35 segmentos azules? (En cada caso, si la respuesta es sí, muestra una distribución de los 0 y los 1, y si la respuesta es no, explica el porqué).

PROBLEMA 4

Se tienen dos figuras de papel: un triángulo equilátero y un rectángulo. La altura del rectángulo es igual a la altura del triángulo y la base del rectángulo es igual a la base del triángulo. Divide al triángulo en tres partes y al rectángulo en dos, mediante cortes rectos, de modo que con los cinco pedazos se pueda armar, sin huecos ni superposiciones, un triángulo equilátero. Para armar la figura, cada parte se puede girar y/o dar vuelta.

PROBLEMA 5

a) En cada casilla de un tablero de 7x7 se escribe uno de los números: 1, 2, 3, 4, 5, 6 ó 7 de manera que cada número esté escrito en siete casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?
b) En cada casilla de un tablero de 5x5 se escribe uno de los números: 1, 2, 3, 4 ó 5 de manera que cada uno esté escrito en cinco casillas distintas. ¿Será posible que en ninguna fila y en ninguna columna queden escritos números consecutivos?

Segundo nivel

PROBLEMA 1

Determina el menor número de tres cifras que sea el producto de dos números de dos cifras, de modo que las siete cifras de estos tres números sean todas diferentes.

PROBLEMA 2

Gonzalo escribe en el pizarrón cuatro números elegidos entre 0, 1, 2, 3 ó 4. Puede repetir números. Nicolás realiza repetidas veces la siguiente operación: cambia uno de los números, a su elección, por el resto de dividir entre 5 el producto de otros dos números del pizarrón, a su elección.
El objetivo de Nicolás es lograr que los cuatro números sean iguales.
Determina si Gonzalo puede elegir los números iniciales de modo que a Nicolás le sea imposible lograr su objetivo.

PROBLEMA 3

En el triángulo isósceles ABC, con AB=AC, sea M el punto medio de BC. El punto D en el lado BC es tal que $B\widehat{A}D = \frac{1}{6} B\widehat{A}C$. Además, la recta perpendicular a AD por C corta a AD en N de modo que DN=DM. Calcula los ángulos del triángulo ABC.

PROBLEMA 4

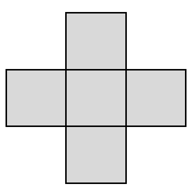
En un baile hay 12 hombres, números de 1 a 12, y 12 mujeres numeradas, de 1 a 12. A cada hombre se le asigna un "amigo secreto" entre los otros 11. Todos bailaron todas las piezas. En la primera pieza cada hombre bailó con la mujer que tiene su mismo número. A partir de allí, cada hombre bailó la nueva pieza con la mujer que había bailado la pieza anterior con su amigo secreto.
En la tercera pieza las parejas fueron:

Hombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Mujeres	5	11	2	12	8	10	9	4	6	3	7	1

Halla el número del amigo secreto de cada hombre.

PROBLEMA 5

Sobre un tablero de 9x9 se ha posado la nave enemiga que cubre exactamente 5 casillas del tablero, así:



La nave es invisible.
Cada misil defensivo cubre exactamente una casilla, y destruye a la nave si impacta en una de las 5 casillas que ésta ocupa.
Determina el mínimo número de misiles que se necesitan para destruir con certeza a la nave enemiga.