XIII OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2007

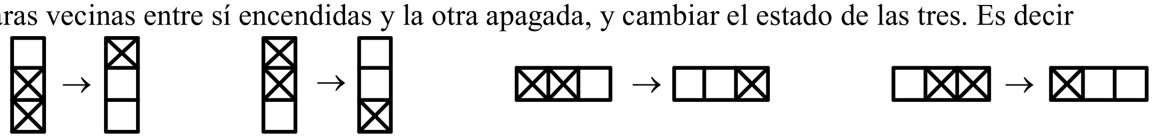
Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1
En un año que tiene 53 sábados, ¿qué día de la semana es el 12 de mayo?
Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2
Sean $X = \overline{a1b9}$ e $Y = \overline{51ab}$ dos números enteros positivos donde a y b son dígitos. Se sabe que X es múltiplo de un número positivo n de dos cifras e Y es el siguiente múltiplo de ese número n. Hallar el número n y los dígitos a y b. Justificar por qué no hay otras posibilidades.

PROBLEMA 3
Jorge elige 6 números enteros positivos distintos y escribe uno en cada cara de un cubo. Arroja su cubo tres veces.
La primera vez su cubo mostró el número 5 hacia arriba y además, la suma de los números de las caras laterales fue 20.
La segunda vez su cubo mostró el número 7 hacia arriba y además, la suma de los números de las caras laterales fue 17.
La tercera vez su cubo mostró el número 4 hacia arriba y además, todos los números de las caras laterales resultaron ser primos.
¿Cuáles son los números que eligió Jorge y cómo los distribuyó en las caras del cubo? Analizar todas las posibilidades.
Recordar que 1 no es primo.

PROBLEMA 4
Un tablero de 7×7 tiene una lámpara en cada una de sus 49 casillas, que puede estar encendida o apagada. La operación permitida es elegir 3 casillas consecutivas de una fila o de una columna que tengan dos lámparas vecinas entre sí encendidas y la otra apagada, y cambiar el estado de las tres. Es decir



Dar una configuración de exactamente 8 lámparas encendidas ubicadas en las primeras 4 filas del tablero tales que, mediante una sucesión de operaciones permitidas, se llegue a tener una única lámpara encendida en el tablero y que ésta esté ubicada en la última fila. Mostrar la secuencia de operaciones que se utilizan para lograr el objetivo.

PROBLEMA 5
Se tiene un pentágono de papel, $ABCDE$, tal que

$$AB = BC = 3 \text{ cm},\ CD = DE = 5 \text{ cm},\ EA = 4 \text{ cm};\ A\hat{B}C = 100^\circ,\ C\hat{D}E = 80^\circ.$$

Hay que dividir el pentágono en cuatro triángulos, mediante tres cortes rectos, de manera que con los cuatro triángulos se arme un rectángulo, sin huecos ni superposiciones. (Los triángulos se pueden girar y/o dar vuelta.)

XII^{I} OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2007

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1
Determinar el mayor número natural que tiene todas sus cifras distintas y es múltiplo de 5, de 8 y de 11.

PROBLEMA 2
Sea $n>2$ un entero par. En las casillas de un tablero de $n\times n$ se deben colocar fichas de modo que en cada columna la cantidad de fichas sea par y distinta de cero, y en cada fila la cantidad de fichas sea impar. Determinar la menor cantidad de fichas que hay que colocar en el tablero para cumplir esta regla. Mostrar una configuración con esa cantidad de fichas y explicar porqué con menos fichas no se puede cumplir la regla.

PROBLEMA 3
Ocho niños, todos de distintas estaturas, deben formar una fila ordenada de menor a mayor. Diremos que la fila tiene exactamente un error si hay un niño que está inmediatamente detrás de otro más alto que él, y todos los demás (salvo el primero de la fila) están inmediatamente detrás de uno más bajo. ¿De cuántas maneras los ocho niños pueden formar una fila con exactamente un error?

PROBLEMA 4
Alex y Bruno escriben, entre los dos, un número natural de 6 dígitos distintos. Cada uno, en su turno, escribe un dígito a la derecha del último dígito que escribió el otro. Empieza Alex con el primer dígito de la izquierda y termina Bruno con el último dígito de la derecha. (Está prohibido escribir un dígito que ya se usó.)
Bruno gana si el número de 6 dígitos es primo. En caso contrario, gana Alex.
Determinar cuál de los dos jugadores tiene una estrategia ganadora y explicar cómo debe hacer para ganar sin importar lo bien que juegue el otro.

PROBLEMA 5
En un triángulo ABC, $\widehat{A}=2\widehat{C}$ y $2\widehat{B}=\widehat{A}+\widehat{C}$. La bisectriz del ángulo $\widehat{C}$ corta al lado AB en E, y F es el punto medio del segmento AE. La altura correspondiente al lado BC es AD. La mediatriz del segmento DF corta al lado AC en M.
Demostrar que $AM=CM$.