XVII^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2011

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1
Las 4 palabras codificadas

□*⊗ ⊕#● *□● ⊗♦⊕

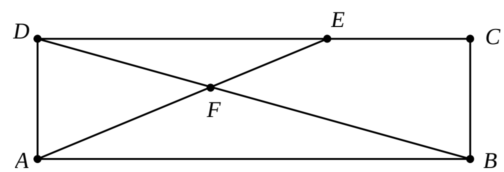
son en algún orden

AMO SUR REO MAS.

Descifrar ⊗♦□*⊕#□●⊗.

PROBLEMA 2
Utilizando una sola vez cada uno de los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 se escriben el cuadrado y el cubo de un número entero positivo. Determinar cuánto puede valer dicho número.

PROBLEMA 3
En el rectángulo $ABCD$, $BC = 5$, $EC = \frac{1}{3}CD$ y F es el punto donde se cortan AE y BD.
El triángulo DFE tiene área 12 y el triángulo ABF tiene área 27. Hallar el área del cuadrilátero $BCEF$.



PROBLEMA 4
Utilizando varios cubitos blancos de arista 1 Guille arma un cubo grande. Luego elige 4 caras del cubo grande y las pinta de rojo. Finalmente desarma el cubo grande y observa que los cubitos con al menos una cara pintada de rojo son 431. Hallar la cantidad de cubitos que utilizó para armar el cubo grande. Analizar todas las posibilidades.

PROBLEMA 5
Consideramos todos los números enteros positivos de 14 dígitos, divisibles por 18, cuyos dígitos son exclusivamente 1 y 2, pero no hay dígitos 2 consecutivos. ¿Cuántos de estos números hay?

XVIIª OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2011

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

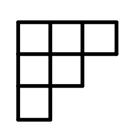
PROBLEMA 1
Hallar un número entero positivo x tal que la suma de los dígitos de x sea mayor que 2011 veces la suma de los dígitos del número $3x$ (3 por x).

PROBLEMA 2
Decimos que un número de cuatro dígitos $abcd$ ($a \neq 0$) es *porá* si se cumplen las siguientes condiciones:
$a \geq b$;
$ab - cd = cd - ba$.
Por ejemplo, 2011 es porá porque $20 - 11 = 11 - 02$.
Hallar todos los números porá.

PROBLEMA 3
En un triángulo rectángulo ABC tal que $AB = AC$, M es el punto medio de BC. Sea P un punto de la mediatriz de AC que pertenece al semiplano determinado por BC que no contiene a A. Las rectas CP y AM se cortan en Q. Calcular el ángulo que forman AP y BQ.

PROBLEMA 4
Dados n puntos en una circunferencia se escribe al lado de uno de ellos un 1 y al lado de cada uno de los otros un 0. La operación permitida consiste en elegir un punto que tenga un 1 y cambiar el número de ese punto y también los números de sus dos vecinos, el de la izquierda y el de la derecha (donde hay 1 se escribe 0 y donde hay 0 se escribe 1).
a) Si $n = 101$, mostrar que se puede lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que cada uno de los n puntos tenga escrito un 0.
b) Si $n = 102$, demostrar que es imposible lograr todos 0.

PROBLEMA 5
Determinar para qué números naturales n es posible cubrir completamente un tablero de $n\times n$, dividido en casillas de 1×1, con piezas como la de la figura, sin huecos ni superposiciones y sin salirse del tablero. Cada una de las piezas cubre exactamente seis casillas.



Nota: Las piezas se pueden girar.