첫째 날

마르 델 플라타, 아르헨티나 - 1997년 7월 24일

1. 좌표평면 위에서 정수좌표를 갖는 점들은 단위 정사각형들의 꼭지점들이다. 이 정사각형들은 번갈아서 검은 색과 흰 색으로 (서양장기판 처럼) 칠해져 있다.
   임의의 두 양의 정수 m, n 에 대하여, 다음과 같은 직각삼각형을 생각하자: 세 꼭지점은 모두 정수좌표를 가지며, 직각을 낀 두 변은 정사각형들의 변을 따라 놓여 있고, 그 길이가 각각 m 과 n 이다.
   이러한 직각삼각형 내부의 검은 부분의 넓이를 S_1, 흰 부분의 넓이를 S_2 라 하고
   $$f(m,n) = |S_1 - S_2|$$
   라 하자.
   (a) 동시에 짝수이거나 동시에 홀수인 모든 양의 정수 m, n 에 대하여 $f(m,n)$ 을 구하여라.
   (b) 모든 m, n 에 대하여 $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ 임을 증명하여라.
   (c) 모든 m, n 에 대하여 $f(m,n) < C$ 를 만족시키는 상수 C 는 존재하지 않음을 보여라.

2. 삼각형 ABC 에서 각 A 가 제일 작다.
   점 B 와 점 C 는 이 삼각형의 외접원을 두 개의 원호로 나눈다. U 는 A 를 포함하지 않는 원호 BC 의 내부에 있는 점이다.
   AB 와 AC 의 수직이등분선은 직선 AU 와 각각 V 와 W 에서 만나고, 두 직선 BV 와 CW 는 T 에서 만난다.
   이 때, 다음을 보여라.
   $$AU = TB + TC.$$

3. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 은 다음의 두 조건을 만족하는 실수이다.
   $$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1,$$
   $$|x_i| \le \frac{n+1}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$
   이 때, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 의 재배열 중에는 다음을 만족시키는 재배열 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 이 있음을 보여라.
   $$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

문항당 7점.
제한시간: 4시간 30분.