둘째 날

마르 델 플라타, 아르헨티나 - 1997년 7월 25일

4. 모든 항이 집합 $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ 의 원소로 된 $n \times n$ 정방행렬에서, 각각의 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 i 번째 행과 i 번째 열이 함께 S 의 모든 원소를 포함할 경우, 그 행렬을 <u>은빛</u>행렬이라고 부르기로 하자.

   (a) $n = 1997$ 의 경우에는 은빛행렬이 존재하지 않음을 보여라.

   (b) 은빛행렬이 존재하는 자연수 n 이 무한히 많음을 보여라.

5. 다음의 방정식을 만족시키는 정수의 쌍 (a, b) 을 모두 구하여라. (단, $a \geq 1,\ b \geq 1$)

$$a^{b^2} = b^a.$$

6. 양의 정수 n 에 대하여, 음이 아닌 정수 지수를 가지는 2 의 거듭제곱의 합으로 n 을 표현하는 방법의 수를 $f(n)$ 이라고 하자.

   단, 순서만 바뀐 표현은 같은 것으로 간주한다. 예를 들어서, 4 는 4; $2+2$; $2+1+1$; $1+1+1+1$ 의 네가지 방법으로 표현될 수 있으므로 $f(4) = 4$ 이다.

   모든 정수 $n \geq 3$ 에 대하여, 다음이 성립함을 증명하여라.

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

문항당 7점.
제한시간: 4시간 30분.