Para:

OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA

SANTA FE 3312 9º PISO
(C1425BGV) BS. AS. - ARGENTINA
TEL/FAX: 4826-6900 - http://www.oma.org.ar

CLAMI - UMA - FOMA

Buenos Aires, marzo de 2014

Querido participante:

Por tu actuación en la Olimpíada del año pasado, te invitamos a participar en la 20° Olimpíada de Mayo que se realiza, como todos los años, en 16 países de América, en España y en Portugal.

Esta competencia es para jóvenes menores de 15 años y se toma en dos niveles: **primer nivel**, para los menores de 13 años, **segundo nivel**, para los chicos entre 13 y 15 años.

Las pruebas son difíciles, por eso sólo invitamos a los alumnos que llegaron al certamen nacional. Para que conozcas el grado de dificultad y te prepares para la competencia te enviamos los enunciados de las pruebas que se tomaron en 2012 y 2013, con sus soluciones.

Este año la prueba será el 10 de mayo a las 10 horas (duración 3 horas, no puedes usar calculadora ni consultar libros ni apuntes) y como se toma en varios lugares del país, deberás dirigirte al lugar que se indica, en la localidad más cercana a tu casa. No necesitas preinscribirte y como todo certamen internacional no tiene costo, solo el de tu traslado hasta la sede elegida. No te olvides de llevar la autorización firmada por tus padres y sellada por tu escuela.

Te esperamos:

Patricia y Flora

- **Bs. As. - Bahía Blanca**
Instituto Avanza
Vieytes 51, primer piso.
Ana Monserrat
Te: 0291 488 2801
amonser@bvconline.com.ar

- **Bs. As. - Mar del Plata**
Complejo Universitario
Fac. de Cs. Ex. y Naturales
Funes 3350
Guillermo Valdez
Te: 0223 475 6429
gvaldez@mdp.edu.ar

- **Chaco – Resistencia**
E.E.S. Nº 76 Col. Nacional
Avda. 9 de Julio Nº 630
Marcela Gazzola
Te: 0362 4446106
caruso01ar@yahoo.com.ar

- **Cdad. de Buenos Aires**
Salón Palais Rouge
Jerónimo Salguero 1441
Te: 011 4826 6900
veronica@oma.org.ar

- **Chubut – Comodoro Rivadavia**
Universidad Nacional de la Patagonia
San Juan Bosco
Ciudad Universitaria - Km 4
María de Gracia Mendonça
mendonca@ing.unp.edu.ar

- **Córdoba – Córdoba Capital**
Colegio "25 de Mayo"
Rivera Indarte 345
María del Carmen SPINA
Te: 0351 15 2657062
secretariaregional@omacordoba.com.ar

- **Río Negro – Bariloche**
Centro Regional Universitario Bariloche
de la Universidad Nac. del Comahue -
Quintral 1250
María Angélica Urtubey -
alder@speedymail.com.ar

- **Salta – Ciudad de Salta**
Colegio Belgrano
General Mitre 764
Ana Tadea Aragón
Te: 0387-4240367
aragonana@arnet.com.ar

- **Santa Cruz – Río Gallegos**
EGB Nº 10
Los Inmigrantes 700
Mónica Paulette
Te: 02966- 434657
mpaulette@speedy.com.ar

- **Santa Fe - Rosario**
Instituto Politécnico
Avenida Pellegrini 250
Natalia Ferrari
Te: 0341-4824952 o
0341 - 152 712876
olimpiadarosario@gmail.com

- **Tucumán – S. M. de Tucumán**
Colegio Suizo
Mendoza 149
Rosa Vitriu
Te: 0381 4306248
rosavitriu@hotmail.com

XVIII^{a} OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
Justifica cada una de tus respuestas.
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

Pablo dice: “Al día de mi cumpleaños le sumo 2 y multiplico el resultado por 2. Al número obtenido le sumo 4 y multiplico el resultado por 5. Al nuevo número obtenido le sumo el número del mes de mi cumpleaños (por ejemplo, si es junio, le sumo 6) y obtengo 342.”
¿Cuál es la fecha del cumpleaños de Pablo? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 2

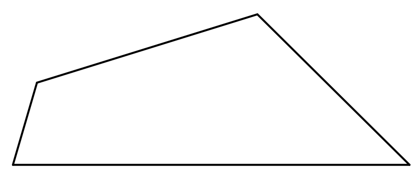
Llamamos $S(n)$ a la suma de las cifras del entero n. Por ejemplo, $S(327)=3+2+7=12$.
Hallar el valor de

$$A=S(1)-S(2)+S(3)-S(4)+\ldots+S(2011)-S(2012).$$

(A tiene 2012 términos).

PROBLEMA 3

De un cuadrilátero de papel como el de la figura, hay que recortar un nuevo cuadrilátero cuya área sea igual a la mitad del área del cuadrilátero original. Solo se puede doblar una o más veces y cortar por algunas de las líneas de los dobleces.
Describir los dobleces y los cortes y justificar que el área es la mitad.



PROBLEMA 4

Pedro tiene 111 fichas azules y 88 fichas blancas. Hay una máquina que por cada 14 fichas azules entrega 11 fichas blancas y por cada 7 fichas blancas entrega 13 azules. Decidir si Pedro puede lograr, mediante sucesivas operaciones con la máquina, aumentar en 33 el número total de fichas, de modo que la cantidad de fichas azules sea igual a $\frac{5}{3}$ de la cantidad de fichas blancas.
Si se puede, indicar cómo hacerlo. Si no se puede, indicar porqué.

PROBLEMA 5

En una reunión hay 12 personas. Se sabe que para cada dos personas A y B de la reunión hay (al menos) otra persona C de la reunión que es amiga de A y de B. Determinar el mínimo número de pares de amigos que hay en la reunión.
Cada persona puede integrar varios pares. Si X es amigo de Y entonces Y es amigo de X.

XVIII^a OLIMPÍADA de MAYO
Segundo Nivel
Mayo de 2012

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

Un número de cuatro cifras es *tartamudo* si tiene las dos primeras cifras iguales entre sí y las dos últimas cifras iguales entre sí, por ejemplo 3311 y 2222 son números tartamudos. Hallar todos los números tartamudos de cuatro cifras que son cuadrados perfectos.

PROBLEMA 2

Se tienen dos octógonos regulares de cartulina. Los vértices de cada octógono se numeran de 1 a 8, en cualquier orden (el orden para un octógono puede ser diferente al del otro). Luego los octógonos se superponen, de modo que cada vértice de uno quede en contacto con un vértice del otro. Los números de los vértices en contacto se multiplican, y los 8 productos obtenidos se suman.
Demostrar que, cualquiera sea el orden en que hayan sido numerados los vértices, siempre es posible superponer los octógonos de manera que esa suma sea mayor o igual que 162.

PROBLEMA 3

En el triángulo ABC, se verifica que $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ y $\widehat{A} > 90^{\circ}$. Llamamos M al punto medio de BC. La perpendicular por C al lado AC corta a la recta AB en el punto D. Demostrar que $A\widehat{M}B = D\widehat{M}C$.

PROBLEMA 4

Se dan seis puntos de manera que no haya tres sobre una misma recta y que las longitudes de los segmentos determinados por estos puntos sean todas distintas. Consideramos todos los triángulos que tienen sus vértices en estos puntos. Demostrar que hay un segmento que es a la vez el lado más corto de uno de esos triángulos y el lado más largo de otro.

PROBLEMA 5

Hay 27 cajas ubicadas en una fila; cada una contiene por lo menos 12 bolitas. La operación permitida es transferir una bolita desde una caja hacia su vecina de la derecha, siempre y cuando dicha vecina contenga más bolitas que la caja desde la que se hará la transferencia. Diremos que una distribución inicial de las bolitas es *feliz* si es posible lograr, mediante una sucesión de operaciones permitidas, que todas las bolitas queden en una misma caja. Determinar cuál es el menor número total de bolitas con el que se puede tener una distribución inicial feliz.

XIX^a OLIMPÍADA de MAYO
Primer Nivel
Mayo de 2013

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

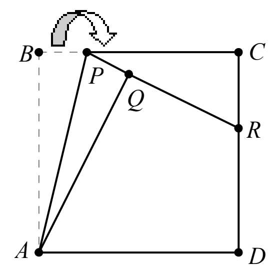
Hallar la cantidad de formas de escribir el número 2013 como suma de dos enteros mayores o iguales que cero de modo que al sumar no haya **ningún** acarreo.
ACLARACIÓN: En la suma $2008 + 5 = 2013$ hay acarreo de las unidades a las decenas.

PROBLEMA 2

Elisa suma los dígitos de su año de nacimiento y observa que el resultado coincide con los dos últimos dígitos del año en que nació su abuelo. Más aún, los dos últimos dígitos del año en que ella nació, son precisamente la edad actual de su abuelo. Hallar el año en el que nació Elisa y el año en el que nació su abuelo.

PROBLEMA 3

Sea $ABCD$ un cuadrado de papel de lado 10 y P un punto en el lado BC. Al doblar el papel a lo largo de la recta AP, el punto B determina el punto Q, como se ve en la figura. La recta PQ corta al lado CD en R. Calcular el perímetro del triángulo PCR.



PROBLEMA 4

Pablo escribió 5 números en una hoja y luego escribió los números 6,7,8,8,9,9,10,10,11 y 12 en otra hoja que le dio a Sofía, indicándole que esos números son las sumas posibles de dos de los números que él tiene escondidos. Decidir si con esta información Sofía puede determinar los cinco números que escribió Pablo.

PROBLEMA 5

En la pizarra está dibujado un cuadrado de 8×8 dividido en 64 cuadraditos de 1×1 mediante líneas paralelas a los lados.
Gustavo borra algunos segmentos de longitud 1 de modo que a cada cuadradito de 1×1 le borra 0, 1 ó 2 lados.
Gustavo afirma que borró 6 segmentos de longitud 1 del borde del cuadrado de 8×8 y que la cantidad de cuadraditos de 1×1 que tienen exactamente 1 lado borrado es igual a 5. Decidir si lo que dijo Gustavo puede ser cierto.

XIX^{a} OLIMPÍADA de MAYO

Segundo Nivel

Mayo de 2013

Duración de la prueba: 3 horas.
Cada problema vale 10 puntos.
No puedes usar calculadora; no puedes consultar libros ni apuntes.
<u>Justifica cada una de tus respuestas.</u>
Al participar te comprometes a no divulgar los problemas hasta el 25 de mayo.

PROBLEMA 1

Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?

PROBLEMA 2

Se dispone de un regla sin números y de un *trisector* que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.

PROBLEMA 3

Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta r no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por r? Dar todas las posibilidades.

PROBLEMA 4

¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?

PROBLEMA 5

Se tienen 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?

18ª Olimpíada de Mayo (2012)

Mayo 2012 Primer Nivel

Problema 1
Solución
Sean x el día e y el mes del cumpleaños de Pablo. El número que se obtiene siguiendo las indicaciones del enunciado es $((x + 2)2 + 4)5 + y$, que es igual a 342. Luego,
$(2x + 4 + 4)5 + y = 342$, $10x + 40 + y = 342$, $10x + y = 302$.
Se deduce que el número y termina en 2; como y representa un mes sólo puede tomar los valores de 1 a 12. Hay dos posibilidades: $y = 2$ o $y = 12$. Es decir que Pablo nació en febrero o en diciembre. Si $y = 2$ entonces $10x = 300$, $x = 30$, de modo que Pablo debería haber nacido el 30 de febrero. Como febrero tiene a lo sumo 29 días, $y = 2$ es imposible. Luego Pablo nació en diciembre: $y = 12$. Entonces $10x + y = 302$ se transforma en
$10x = 290$ y se obtiene $x = 29$. Por lo tanto Pablo nació un 29 de diciembre.

Problema 2
Solución
Si n es par entonces $S(n+1) - S(n) = 1$. En efecto, n y $n + 1$ difieren solamente en el dígito de las unidades, que para n será 0, 2, 4, 6 u 8 y para $n + 1$ será, respectivamente, 1, 3, 5, 7 o 9. Entonces
$S(1) = 1$, $S(3) - S(2) = 1$, $S(5) - S(4) = 1$, …, $S(2011) - S(2010) = 1$.
Sumando todas las igualdades anteriores resulta
$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + ... - S(2010) + S(2011) = 1006$
y restando $S(2012) = 5$ resulta
$S(1) - S(2) + S(3) - S(4) + ... + S(2011) - S(2012) = 1001$.

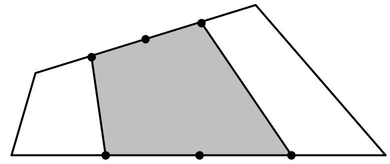
Problema 3

Solución 1
Observamos que un doblez en el que se hacen coincidir los extremos de un lado pasa por su punto medio. De esta manera marcamos los puntos medios de dos lados opuestos del cuadrilátero. Uniendo cada uno de estos puntos medios con uno de los vértices opuestos mediante dobleces que no se intersequen obtenemos las líneas de corte.

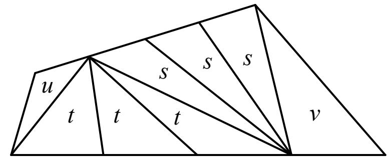
La diagonal que comparten ambos cuadriláteros y las dos líneas de corte dividen a la figura original en 4 triángulos: dos de área a y dos de área b. Esto es así porque en ambos casos los dos triángulos tienen bases y alturas iguales. Luego el área del cuadrilátero original es igual a $2a + 2b$ y la del cuadrilátero recortado es $a + b$.

Solución 2

Usando el mismo método que en la solución 1 se dividen los lados opuestos en 4 partes iguales. Las líneas de corte se obtienen uniendo mediante un doblez los dos primeros puntos marcados en lados opuestos y con otro doblez los dos últimos.

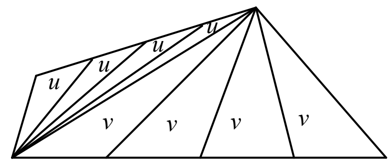


Dividimos el cuadrilátero en 8 triángulos.



Hay 3 triángulos de área t y 3 de área s (tienen bases y alturas respectivamente iguales). Así el cuadrilátero original tiene área $u+3t+3s+v$.

Haciendo otra partición del cuadrilátero en 8 triángulos tenemos que el área es $4u+4v$. Por lo tanto $u+3t+3s+v=4u+4v$, de donde $t+s=u+v$.
Como el área del cuadrilátero recortado es igual a $2t+2s$, se tiene lo pedido.



Problema 4
Solución 1

El número total de fichas $(111+88)$ aumentó en 33. Ahora hay 232 fichas $(199+33)$. De este nuevo número, 87 son blancas y 145 azules, pues $A=\frac{5}{3}B$. En efecto, $\frac{5}{3}B+B=\frac{8}{3}B=232$, luego

$B=\frac{3\cdot 232}{8}=87$ y $A=232-87=145$.

Llamamos m a la cantidad de veces que Pedro cambia 14 azules por 11 blancas y n a la cantidad de veces que cambia 7 blancas por 13 azules. Entonces

$$111-14m+13n=145$$
$$88+11m-7n=87.$$

Luego, $\begin{cases} 13n-14m=34 \\ 7n-11m=1 \end{cases}$. Las soluciones son $n=8$ y $m=5$. Pedro debe cambiar 5 veces 14 azules por 11 blancas y 8 veces 7 blancas por 13 azules.

Solución 2

Llamamos m a la cantidad de veces que Pedro cambia 14 azules por 11 blancas y n a la cantidad de veces que cambia 7 blancas por 13 azules. Después de estos cambios la cantidad de fichas azules es $111-14m+13n$ y la cantidad de fichas blancas es $88+11m-7n$.

En total son $111+88-3m+6n$ y queremos lograr 33 fichas más, o sea $199-3m+6n=199+33$,

$$m=2n-11. \qquad (1)$$

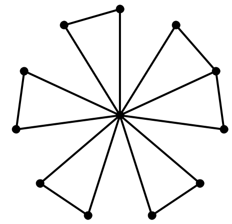
Además, debe ser $111-14m+13n=\frac{5}{3}(88+11m-7n)$, y usando (1)

$$111-14(2n-11)+13n=\frac{5}{3}(88+11(2n-11)-7n)$$
$$n=8.$$

Luego $m=2\cdot 8-11=5$.

Pedro debe cambiar 5 veces 14 azules por 11 blancas y 8 veces 7 blancas por 13 azules.

Problema 5
Solución
17 pares de amigos son suficientes, como se aprecia en el gráfico, en el que cada punto representa una persona y cada línea que une dos puntos, una amistad.



Veamos que la condición del enunciado es imposible si hay 16 o menos pares de amigos. Supongamos que hay 16 pares de amigos. Numeramos las personas de 1 a 12 y denotamos c_i a la cantidad de amigos de la persona i. Notemos que $c_i \geq 2$: no puede ser que haya un i tal que $c_i = 0$, pues se viola ostensiblemente la condición del enunciado, y si c_i vale 1 para algún i, sea j el único amigo de i. Entonces no existe una tercera persona k que sea amiga de i y de j, como exige el enunciado.
Con esta notación, hay $\frac{c_i(c_i-1)}{2}$ pares de personas que son ambas amigas de i. Ahora bien, cada par de personas tienen que estar en el conjunto de los $\frac{c_i(c_i-1)}{2}$ pares de personas que son ambas amigas de i, para algún i. Como el total de pares que se forman con 12 personas son $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ tenemos

$$\frac{c_1(c_1-1)}{2}+\frac{c_2(c_2-1)}{2}+\ldots+\frac{c_{12}(c_{12}-1)}{2}\geq 66\text{, es decir}$$
$$c_1(c_1-1)+c_2(c_2-1)+\ldots+c_{12}(c_{12}-1)\geq 132\,.$$

Si hay 16 o menos pares de amigos, entonces $c_1+c_2+\ldots+c_{12}\leq 2\cdot 16=32$, pues cada amistad se cuenta 2 veces, una por cada amigo que participa. Por otra parte, $2 \leq c_i \leq 11$, de modo que $2 \leq c_i \leq 10$ para todo i, pues $11\cdot 2 + 11 > 32$.
Ahora bien, si $2 < j < k < 10$, entonces $j(j-1)+k(k-1)<(j-1)(j-2)+(k+1)k$. En efecto, esta desigualdad equivale a $j^2-j+k^2-k<j^2-3j+2+k^2+k$, o sea, $2j<2k+2$, que es verdadera si $2 < j < k < 10$. Esto significa que si alguien con j amigos pierde un amigo y alguien que tiene k amigos gana un amigo entonces la suma $c_1(c_1-1)+c_2(c_2-1)+\ldots+c_{12}(c_{12}-1)$ aumenta. Y el mayor valor de esta suma se alcanza cuando uno de los c_i vale 10 y los restantes valen 2, o sea cuando no se puede hacer la operación de quitar un amigo a uno con pocos amigos y agregarle un amigo a uno con más amigos. El máximo es igual a $11\cdot 2+10\cdot 9=112<132$. Esto demuestra que 16 amistades no son suficientes.

Mayo 2012 Segundo Nivel

Problema 1
Solución 1
El número es de la forma *aabb* así que es divisible entre 11, como además es un cuadrado debe ser múltiplo de 121. Por lo tanto el número es de la forma 121*p* donde *p* debe ser un cuadrado. Como el número es de 4 cifras entonces está entre 1100 y 9999, así que $\frac{1100}{121} < p < \frac{9999}{121}$, es decir, $10 \leq p \leq 82$.
Los posibles valores de *p* son 16, 25, 36, 49, 64, 81 de los cuales hay uno solo que da soluciones y es el que corresponde a 64. El número es $7744 = 88^2$.
Solución 2
Dado que $aabb = 10^3 a + 10^2 a + 10b + b = 11(100a + b)$ y *aabb* es un cuadrado, debe ser $100a + b = 11 \cdot k^2$ ($k \in \mathbb{Z}$). Luego $99a + a + b = 11 \cdot k^2$, de donde *a* + *b* debe ser un múltiplo de 11. Hay 8 casos, con *a* = 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 y respectivamente *b* = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Como *n* = *aabb* es un cuadrado, *b* solo puede valer 0, 1, 4, 5, 6 o 9. Por lo tanto, los casos posibles son 2299, 7744, 6655 y 5566, y el único cuadrado es $7744 = 88^2$.

Problema 2
Solución
Escojamos un vértice del primer octógono y sean $a_1, a_2, ..., a_8$ los números que se encuentran al recorrer los vértices, a partir del escogido, en sentido horario. Análogamente, sean $b_1, b_2, ..., b_8$ los números que se encuentran al recorrer los vértices del segundo octógono, en sentido horario, a partir de uno de ellos. Si el vértice 1 del primer octógono se superpone al vértice *j* del segundo, entonces la suma obtenida es
$S_j = a_1 b_j + a_2 b_{j+1} + ... + a_8 b_{j+7} = \sum_i a_i b_{i+j-1}$,
donde los subíndices se toman módulo 8. Entonces

$$\sum_{j=1}^{8} S_j = \sum_{j=1}^{8} \sum_{i=1}^{8} a_i b_{i+j-1} = \sum_{i=1}^{8} a_i \sum_{j=1}^{8} b_{i+j-1} = \left(\sum_{i=1}^{8} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{8} b_{i+j-1} \right).$$

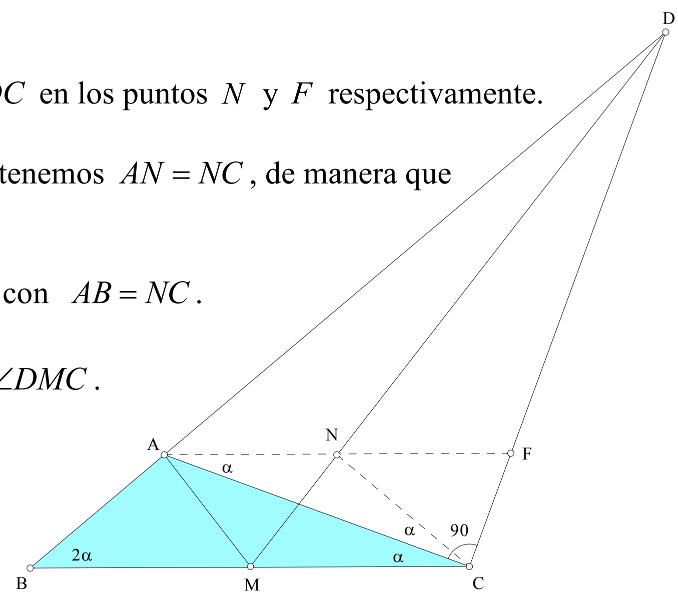
Pero $\sum_{i=1}^{8} a_i = \sum_{j=1}^{8} b_{i+j-1} = \sum_{i=1}^{8} i = 36$, por lo tanto $\sum_{j=1}^{8} S_j = 36^2$. Como los 8 sumandos S_j no pueden ser todos menores que $36^2/8 = 162$ (pues entonces la suma de ellos sería menor que 36^2) debe existir al menos un *j* para el cual $S_j \geq 162$.

Problema 3
Solución 1
La recta que pasa por A y es paralela a BC corta a DM y a DC en los puntos N y F respectivamente.
Se sigue que $AN : BM = DN : DM = NF : MC$.
Como $BM = MC$, resulta $AN = NF$. Dado que $\angle ACF = 90^\circ$, tenemos $AN = NC$, de manera que $\angle NCA = \angle NAC = \angle ACB$.
Así, pues, $\angle NCB = 2 \cdot \angle ACB = \angle ABC$.
Como $AN \| BC$, el cuadrilátero $ABCN$ es un trapecio isósceles con $AB = NC$.

Por consiguiente, $\Delta ABM \equiv \Delta NCM$ y

$$\angle AMB = \angle NMC = \angle DMC.$$

.

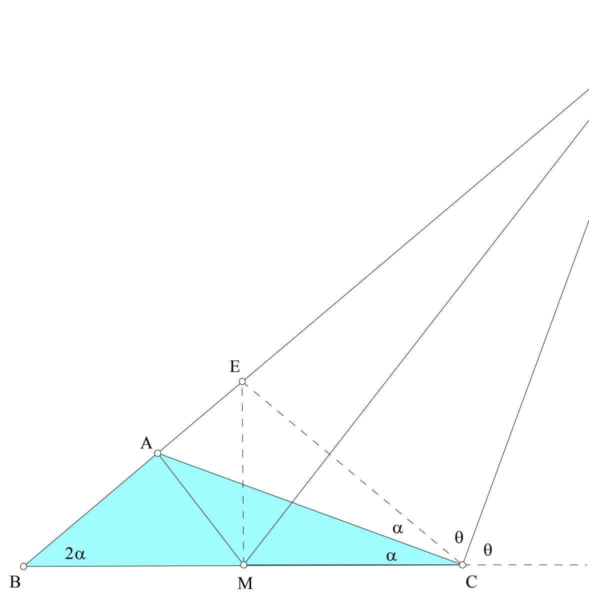


Solución 2
La mediatriz de BC corta a AB en el punto E. Entonces $\angle ECB = \angle EBC = 2 \cdot \angle ACB$ y, por tanto, $\angle ECA = \angle ACB$, con lo que CA es la bisectriz interior del ángulo en C en el triángulo EBC.
Dado que $CD \perp AC$, CD es la bisectriz exterior del ángulo en C en ΔEBC.
Por consiguiente, tenemos $AE : AB = EC : BC = ED : BD$, de donde

$$AE : ED = AB : BD \qquad (1)$$

Como $\angle EMB = 90^{o}$, de (1), por el recíproco del teorema de la bisectriz interior y exterior, resulta que $\angle AME = \angle EMD$, de donde resulta inmediatamente

$$\angle AMB = \angle DMC.$$



Problema 4

Solución
Coloreamos el lado más corto de cada triángulo de verde y pudiera ser que de esta forma alguno de los segmentos se colorean de verde más de una vez, pero esto no es esencial. Si el resto de los segmentos se pintan de azul, se tienen seis puntos donde todos los posibles segmentos que los unen (15 segmentos) están coloreados de verde o de azul. Es bien conocido (aplicación sencilla del principio del palomar) que habrá al menos un triángulo T en el que sus tres lados tienen el mismo color: verde o azul. Veámoslo. De cada punto salen 5 segmentos, entonces habrá tres del mismo color, por el principio del palomar. Digamos color *A*. Consideramos los otros extremos de esos tres segmentos. Si algún par de ellos está coloreado de color *A*, hemos terminado. Si no, los tres son de color *B*, y de nuevo, hemos terminado.
Necesariamente el color de los lados de este triángulo T será verde, pues el triángulo ya tiene su lado más corto pintado de verde. Entonces el lado más largo de T estará coloreado de verde, y por tanto será el más corto en algún otro triángulo.

Problema 5
Solución
El mínimo es 1000, que se alcanza para la distribución 12, 13, 15, 17, …, 59,61, 63 (los números consecutivos difieren en 2, excepto entre los dos primeros números, el 12 y el 13). Esta sucesión satisface los requisitos. Cada bolita de la primera caja puede "viajar" hasta la última. Una vez vaciada la primera caja, cada bolita de la segunda puede llevarse a la última, y así siguiendo, se vacían una a una todas las cajas y se colocan todas las bolitas en la última caja.
Como las bolitas no retroceden, si el objetivo es alcanzable todas las bolitas deben finalizar en la última caja de la derecha. Además, para que todas las cajas puedan intervenir en alguna operación permitida, las cantidades iniciales de bolitas en las cajas forman una sucesión creciente de números. Consideramos cualquier distribución que permita lograr el objetivo y una sucesión de operaciones permitidas con las que se llevan todas las bolitas a la última caja. Sea $12 \le a_1 < a_2 < ... < a_{27}$ la sucesión de las cantidades iniciales de bolitas en las cajas. Supongamos que hay cajas consecutivas a_i y a_{i+1} tales que $a_{i+1} = a_i + 1$; a un par de cajas con estas características lo llamamos par *especial*. Para un par especial, la primera operación en la que alguna de las cajas i o $i + 1$ está involucrada (porque se le agrega o se le quita una bolita) es la operación que consiste en pasar una bolita de la caja i a la caja $i + 1$, porque si no sería imposible continuar el proceso. (En particular, esto implica que no pueden ser simultáneamente especiales los pares i, $i + 1$ e $i + 1$, $i + 2$.) Entonces podemos efectuar primero todas las operaciones que involucran a los pares especiales, luego realizar las operaciones restantes. Hay una excepción: si las cajas 1 y 2 son un par especial y $a_1 = 12$, no realizamos por el momento la operación con esas cajas. Esto garantiza que cada caja contiene al menos 12 bolitas después de efectuar la operación a los demás pares especiales.
Fijemos nuestra atención en la sucesión $b_1, b_2, \ldots, b_{27}$ que se obtuvo al realizar las operaciones con los pares especiales. Las restantes operaciones hacen que todas las bolitas terminen en la última caja, y $b_1 \ge 12$; entonces esta distribución también es admisible. Además, $b_2 \ge b_1 + 1$ y $b_{i+1} \ge b_i + 2$ para $i = 2, 3, \ldots 26$. Más aun, como se supuso que había al menos una operación con pares especiales, tenemos que $b_{i+1} = b_i + 3 > b_i + 2$ para al menos un índice i. Esto se debe a que luego de aplicar la operación a un par especial i, $i + 1$, la diferencia $a_{i+1} - a_i$ se transforma en 3.
Entonces podemos decir que tenemos una distribución admisible con la misma cantidad total de bolitas que la original, en la que cada número b_i es al menos tan grande como el número correspondiente en la sucesión 12, 13, 15, 17, …, 59, 61, 63 del primer párrafo. Además, al menos un b_i es estrictamente mayor. En conclusión, si existen pares especiales entonces el número total de bolitas no es mínimo.
Entonces basta mirar las distribuciones tales que $12 \le a_1 \le a_2 - 1$ y $a_{i+1} \ge a_i + 2$ para $i = 2, 3, \ldots, 26$. Entre todas ellas, es claro que el mínimo se alcanza si $12 = a_1 = a_2 - 1$ y $a_{i+1} = a_i + 2$ para $2 \le i \le 26$. Esto conduce a la sucesión 12, 13, 15, 17, …, 59,61, 63, cuya suma es $12 + \frac{13+63}{2}26 = 1000$.

Mayo 2013 Primer Nivel

Problema 1

Hallar la cantidad de formas de escribir el número 2013 como suma de dos enteros mayores o iguales que cero de modo que al sumar no haya **ningún** acarreo.

ACLARACIÓN: En la suma $2008+5=2013$ hay acarreo de las unidades a las decenas.

Solución

En cada columna indicamos los posibles dígitos para suma sin acarreos.

2	0	1	3
0 2	00	0 1	0 3
1 1		1 0	1 2
2 0			2 1
			3 0

Son $\dfrac{3\cdot 2\cdot 4}{2}=12$ maneras.

Problema 2

Elisa suma los dígitos de su año de nacimiento y observa que el resultado coincide con los dos últimos dígitos del año en que nació su abuelo. Más aún, los dos últimos dígitos del año en que ella nació, son precisamente la edad actual de su abuelo. Hallar el año en el que nació Elisa y el año en el que nació su abuelo.

Solución

La edad del abuelo de Elisa no puede superar 99 años porque está expresada con un número de dos dígitos. Entonces podemos suponer que el año de nacimiento del abuelo empieza por 19 y el de Elisa por 19 o por 20. Pero si Elisa hubiera nacido en el año 20ab, con $ab\le 13$, el abuelo tendría a lo sumo 13 años, lo que no es posible.

Luego ambos años comienzan por 19. Sea 19ab el año en que nació Elisa. Entonces su abuelo debe haber nacido en el año $1900+1+9+a+b$ y la edad del abuelo es $2013-1900-1-9-a-b=103-a-b$.

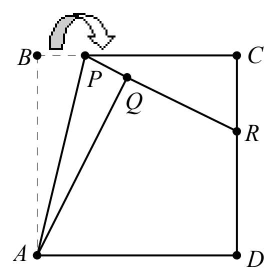
Entonces se tiene que $ab=103-a-b$, esto es, $10a+b=103-a-b$ ó $2b+11a=103$, con a, b enteros entre el 0 y el 9. Como $2b\le 18$ se tiene que $11a\ge 85$. Por tanto a vale 8 ó 9.

Para $a=8$ se obtiene $2b=15$, que no es posible.

Y para $a=9$ se obtiene $b=2$.

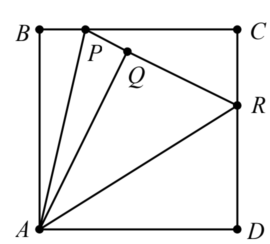
Se concluye que Elisa nace en 1992, tiene actualmente 21 años y su abuelo nace en 1921 y tiene actualmente 92 años.

Problema 3



Sea $ABCD$ un cuadrado de papel de lado 10 y P un punto en el lado BC. Al doblar el papel a lo largo de la recta AP, el punto B determina el punto Q, como se ve en la figura. La recta PQ corta al lado CD en R. Calcular el perímetro del triángulo PCR.

Solución



Los triángulos AQP y ABP son congruentes, de donde $AQ=AB=AD$ y $A\hat{Q}R=A\hat{Q}P=90^\circ$. Se tiene entonces que los triángulos rectángulos AQR y ADR también son congruentes, pues comparten la hipotenusa AR y $AQ=AD$, de donde $QR=RD$.

En conclusión,

$$\begin{aligned}\text{Perímetro}(PCR) &= CP+CR+RP=PC+CR+RQ+QP=\\ &=CP+CR+RD+PB=CP+PB+CR+RD=\\ &=10+10=20\,.\end{aligned}$$

Problema 4
Pablo escribió 5 números en una hoja y luego escribió los números 6,7,8,8,9,9,10,10,11 y 12 en otra hoja que le dio a Sofía, indicándole que esos números son las sumas posibles de dos de los números que él tiene escondidos. Decidir si con esta información Sofía puede determinar los cinco números que escribió Pablo.
Solución
Sean a,b,c,d y e los números que escribió Pablo en la primera hoja. Supongamos que $a<b<c<d<e$. Estos cinco números determinan diez sumas: $a+b$, $a+c$, $a+d$, $a+e$, $b+c$, $b+d$, $b+e$, $c+d$, $c+e$, $d+e$. La suma total de esas sumas es: $4(a+b+c+d+e) = 6+7+8+8+9+9+10+10+11+12 = 90$ de donde $a+b+c+d+e = 90/4=22{,}5$.
Además $a+b$ y $a+c$ son las sumas más pequeñas mientras que $c+e$ y $d+e$ son las mayores. Así que tenemos que $a+b=6$, $a+c=7$, $c+e=11$, $d+e=12$.
Se deduce que $c = 22{,}5 - 6 - 12 = 4{,}5$, $a = 7 - 4{,}5 = 2{,}5$, $b= 6 - 2{,}5 = 3{,}5$, $e = 11 - 4{,}5 = 6{,}5$ y finalmente $d = 12 - 6{,}5 = 5{,}5$.

Problema 5
En la pizarra está dibujado un cuadrado de 8×8 dividido en 64 cuadraditos de 1×1 mediante líneas paralelas a los lados.
Gustavo borra algunos segmentos de longitud 1 de modo que a cada cuadradito de 1×1 le borra 0, 1 ó 2 lados.
Gustavo afirma que borró 6 segmentos de longitud 1 del borde del cuadrado de 8×8 y que la cantidad de cuadraditos de 1×1 que tienen exactamente 1 lado borrado es igual a 5. Decidir si lo que dijo Gustavo puede ser cierto.
Solución 1
Sean s_2, s_3, s_4 las cantidades de cuadraditos de 1×1 a los que Gustavo les borró 2, 1 o 0 lados respectivamente. Se tiene entonces que $s_3 = 5$. Notemos que los cuadraditos de s_i tienen i lados no borrados, luego si hay x segmentos no borrados en el borde e y en el interior,

$$2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = x + 2y$$

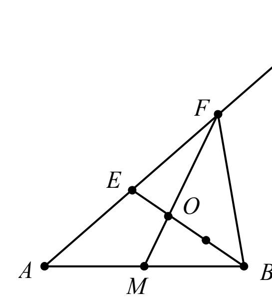
$$2s_2 + 3\cdot5 + 4s_4 = (32-6) + 2y\,,$$

lo que es absurdo, ya que el lado izquierdo es impar y el derecho, par.
Solución 2
Trazamos caminos en el tablero de acuerdo con las siguientes reglas.
El camino pasa de una casilla a otra solo si el lado que las separa ha sido borrado.
Se puede atravesar una sola vez cada lado borrado.
Un camino comienza fuera del tablero, entrando por un segmento borrado del borde, o comienza en un cuadradito con exactamente un lado borrado, pasa por cuadraditos de dos lados borrados y termina fuera del tablero luego de pasar por un segmento borrado del borde, o termina en un cuadradito con exactamente un lado borrado.
Estas normas, determinan la forma de los caminos (una vez que se llega a un cuadradito, hay una sola forma de salir de él). Al finalizar un camino, se comienza con otro y así, sucesivamente, hasta agotar todos los segmentos borrados del borde y todos los cuadraditos con exactamente un lado borrado.
Tendremos entonces, tres tipos de caminos:
Primer tipo: desde un segmento borrado del borde hasta un cuadradito con exactamente un lado borrado.
Segundo tipo: desde un segmento borrado del borde hasta otro segmento borrado del borde.
Tercer tipo: desde un cuadradito con exactamente un lado borrado hasta otro cuadradito con exactamente un lado borrado.
Llamamos x, y y z a la cantidad de caminos de cada tipo.
A cada camino del primer tipo le corresponde un segmento borrado del borde y a cada uno del segundo, dos segmentos borrados del borde, luego la cantidad de segmentos borrados del borde es $(x + 2y)$.
A cada camino del primer tipo le corresponde un cuadradito con exactamente un lado borrado y a cada uno del tercero, dos cuadraditos con exactamente un lado borrado, de modo que el número total de cuadraditos con exactamente un lado borrado es $(x + 2z)$.

Los números: $(x + 2y)$ y $(x + 2z)$ tienen la misma paridad, y por lo tanto es imposible lograr que $x + 2y = 6$ y $x + 2z = 5$.
Este razonamiento nos permite afirmar que Gustavo mintió.

Mayo 2013 Segundo Nivel
Problema 1
Sofía sumó los números de las páginas de un libro empezando por el 1 en la primera página y obtuvo 2013. Pablo vio como hizo la suma y se dio cuenta que Sofía se saltó una página. ¿Cuántas páginas tiene el libro y qué número de página se saltó?
Solución
Sumamos los números enteros positivos hasta que la suma sea, por primera vez, mayor que 2013. Usamos para simplificar cuentas que $1+2+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$. Así obtenemos que
$\frac{62\cdot 63}{2}=1953\leq 2013<\frac{63\cdot 64}{2}=2016$. Luego, la suma que debió obtener Sofía es 2016, y la página que se saltó es la $2016 - 2013 = 3$.

Problema 2
Se dispone de un regla sin números y de un *trisector* que marca en cualquier segmento los dos puntos que lo dividen en tres partes iguales. Construir el punto medio de un segmento dado utilizando exclusivamente estas dos herramientas.
Solución
Sea AB un segmento dado.
Elegimos C fuera de AB. Trisecamos AC y sean E y F los puntos de la trisección, con E más próximo a A. En el triángulo ABF, BE es mediana.
Trisecamos EB y sea O el punto más próximo a E, o sea, $EO=\frac{1}{3}EB$.
Entonces la recta FO es mediana del triángulo ABF, pues la medianas se cortan en relación 2:1. Luego FO corta a AB en su punto medio M.



Problema 3
Se marcan varios puntos distintos en el plano, y se trazan todos los segmentos determinados por esos puntos. Una recta r no pasa por ninguno de los puntos marcados y corta a exactamente 60 de los segmentos que hemos trazado. ¿Cuántos segmentos no están cortados por r? Dar todas las posibilidades.
Solución
Sean A y B dos de los puntos marcados. La recta r corta al segmento AB si y solo si A y B están a lados distintos de r. Sea a la cantidad de puntos marcados a uno de los lados de r y b la cantidad del otro lado (no hay puntos marcados en r). Entonces hay exactamente ab pares de puntos A, B con A y B en lados distintos de r, lo que implica que r corta exactamente ab de los segmentos trazados. Además, r no corta a ningún segmento determinado por dos puntos a un mismo lado de r. Entonces el número de segmentos que r no corta es $\frac{1}{2}a(a-1)+\frac{1}{2}b(b-1)$.
Dado que r corta exactamente a 60 segmentos, lo anterior nos lleva a $ab=60$. Luego (a, b) es un par de divisores complementarios de 60, dos con producto 60. Hay 6 de tales pares: {1, 60}, {2, 30}, {3, 20}, {4, 15}, {5, 12}, {6, 10}. Los respectivos valores de $\frac{1}{2}a(a-1)+\frac{1}{2}b(b-1)$ son 1770, 436, 193, 111, 76, 60.
Es claro que las 6 alternativas son posibles.

Problema 4
¿Es posible escribir 100 números impares en una fila de tal forma que la suma de cada 5 números adyacentes sea un cuadrado perfecto y que la suma de cada 9 números adyacentes también sea un cuadrado perfecto?
Solución
Primero probaremos el siguiente resultado:
Lema: Si n es un número impar entonces n^2-1 es múltiplo de 8.
Prueba: Como n es impar, entonces tiene la forma $n=2k-1$. Con esto tenemos que $n^2-1=4k(k-1)$.
Ahora, como k y $k-1$ son consecutivos, alguno de ellos es par, luego $k(k-1)$ es par. De esto notamos que n^2-1 es múltiplo de 8.
Vamos a demostrar que no es posible lo pedido. Supongamos que sea posible. Escojamos 45 números que estén en posiciones consecutivas en la fila (esto significa, que estén juntos). Designemos con S la suma de estos 45 números. Sean S_1 la suma de los cinco primeros, S_2 la suma de los cinco siguientes, y así sucesivamente hasta S_9 la suma de los cinco últimos. Notemos que cada S_i es un cuadrado perfecto, y como es la suma de cinco impares, entonces también es impar. Luego, por el lema, tenemos que S_i-1 es múltiplo de 8. Por otro lado, como $S=S_1+S_2+...+S_9$, entonces

$$S-9=(S_1-1)+(S_2-1)+...+(S_9-1) \text{ es un múltiplo de 8.} \qquad (1)$$

Sea R_1 la suma de los 9 primeros números (seguimos considerando los 45 números escogidos), R_2 la suma de los 9 siguientes, y así sucesivamente, R_5 la suma de los 9 últimos. Análogamente, como hicimos antes, tenemos que cada R_j es un cuadrado perfecto impar, luego

$$S-5=(R_1-1)+(R_2-1)+...+(R_5-1) \text{ es un múltiplo de 8.} \qquad (2)$$

De (1) y (2) tenemos que $(S-5)-(S-9)=4$ es un múltiplo de 8, lo cual no es cierto. Por lo tanto no es posible encontrar tales números.

Problema 5
Se tienen 600 tarjetas, 200 de ellas tienen escrito el número 5, 200 tienen escrito el número 2 y las otras 200 tienen escrito el número 1. Usando estas tarjetas se quieren formar grupos de tal forma que en cada grupo la suma de los números sea 9. ¿Cuál es la mayor cantidad de grupos que se pueden formar?
Solución
Comencemos notando que no puede haber dos 5 en un mismo grupo, y si un 5 es usado en un grupo entonces tenemos las siguientes posibilidades para formar el grupo: (5; 2; 2), (5; 2; 1; 1) o (5; 1; 1; 1; 1) donde no hemos considerado el orden de los elementos en cada grupo porque eso no importa.
Supongamos que las tarjetas que tienen el número 5 fueron usados para formar lo siguiente:

- a grupos de la forma (5; 2; 2).
- b grupos de la forma (5; 2; 1; 1).
- c grupos de la forma (5; 1; 1; 1; 1).

Entonces la cantidad de tarjetas con el número 5 que se usaron es $a+b+c$. Como hay 200 tarjetas con el número 2, entonces $2a+b\leq 200$. Análogamente, viendo la cantidad de 1, concluimos que $2b+4c\leq 200$. La primera desigualdad es $2a+b\leq 200$ y la segunda equivale a $b+2c\leq 100$. Sumando estas dos desigualdades obtenemos:

$$2(a+b+c)\leq 300 \iff a+b+c\leq 150.$$

Luego, se usó como máximo 150 tarjetas con el número 5, con lo cual la suma de todos los números de los grupos formados es como máximo:

$$150\times 5+200\times 2+200\times 1=1350;$$

y como cada grupo tiene suma 9, hay como máximo $1350:9=150$ grupos.
Un ejemplo con 150 grupos es el siguiente:

- 100 grupos (5; 2; 2)
- 50 grupos (5; 1; 1; 1; 1).

NIVEL Nº______

OLIMPIADA MATEMÁTICA ARGENTINA

AUTORIZACIÓN DE____

Apellidos y Nombres del alumno

Alumno del.....................................**Modalidad**................................**Nivel**.......................................

Año que cursa nivel en la Olimpíada

_________Por la presente...

Nombres y apellidos del padre, tutor o encargado

D.N.I., L.C., L.E., C.I. N°.. domiciliado en.......................................

Calle

N°................Piso.............Dto............localidad..C.P. N°...................

provincia ....Tel. N° (................)...........................Cel. N° (...............)........................

autorizo a mi hijo .... D.N.I....................................

Nombres y apellidos del alumno

Fec. Nac.…................................. e-mail alumno.………………………………………………….........
alumno de ....

Nombre del establecimiento

localidad .... provincia ....

a participar en las actividades correspondientes a .... que se llevará a cabo el día 10 de mayo de 2014 en ....
……………………………………………………………………………………………….....................
________ Me hago responsable de todos los traslados de mi hijo desde el domicilio hasta los puntos de concentración para las pruebas de la Olimpíada Matemática Argentina; asimismo de las consecuencias, de cualquier naturaleza, provenientes de la participación del menor para dicha competencia. Por ello, deslindo toda responsabilidad que pudiera atribuirse a la Olimpíada Matemática Argentina, a la Olimpíada Matemática Ñandú, al Centro Latinoamericano de Matemática e Informática, a la Unión Matemática Argentina y la Fundación Olimpíada Matemática Argentina.___
_________Asimismo declaro conocer y aceptar el Reglamento Vigente de la OLIMPÍADA MATEMÁTICA ARGENTINA y las disposiciones para su organización y funcionamiento.___________

....de 2014.

Lugar y fecha

....

Aclaración de firma Firma padre, tutor o encargado

Certifico que la firma es la que corresponde

....de 2014.

Lugar y fecha

....

Firma y sello con aclaración de firma y cargo de la autoridad del establecimiento Sello del establecimiento