

Investigación y Docencia

por Néstor Aguilera

El baricentro y la división en dos partes de igual área

1. El baricentro y posibles concepciones falsas

Quizás el lector se haya preguntado alguna vez ¿por qué en la escuela se habla sólo de baricentro de un triángulo y no de un cuadrilátero o pentágono?

Una de las razones es que el concepto de baricentro o centro de gravedad de una figura plana involucra la idea de *momento* (de primer orden), a su vez relacionada con la idea física de *palanca*, que se introduce mucho después que el baricentro de un triángulo en la escuela.

Sin embargo, es usual motivar la definición de baricentro del triángulo dando un argumento como: si suspendemos al triángulo por uno de sus vértices (pinchando un alfiler, por ejemplo), la “posición de equilibrio” del triángulo es tal que la vertical que pasa por el vértice elegido debe contener al baricentro y *por lo tanto, esta vertical debe separar al área del triángulo en dos partes iguales*, de donde se deduce que la vertical contiene a la mediana por el vértice.

Hemos enfatizado en letras cursivas una deducción que no es nada sencilla. El triángulo tiene la propiedad que la mediana está contenida en la recta por el baricentro y el vértice correspondiente, pero, como veremos más adelante, *hay rectas que dividen al triángulo en dos partes de igual área que no contienen al baricentro*.

Para peor, y aún cuando no hayamos hecho la “motivación física” que comentamos, esta idea incorrecta de que el baricentro está definido por la división en partes de igual área se ve reforzada por el uso que le damos en geometría elemental al baricentro del triángulo: prácticamente lo único que usamos es esta propiedad, y difícilmente se consideran propiedades “físicas” del baricentro del triángulo.

De más está decir que luego pueden haber dificultades para la comprensión de las propiedades del “verdadero” baricentro de otras figuras planas, aunque el “verdadero” baricentro del triángulo coincide con la intersección de sus medianas. Por supuesto, podemos pensar en darle otro nombre en geometría elemental, algo como “medianacentro”, pero después de un momento de reflexión parece que es más conveniente llamar a las cosas por su nombre, so pena de traer otras dificultades en el aprendizaje.

Para resumir,

Es erróneo decir que el baricentro está caracterizado por las rectas que dividen la figura en dos partes de igual área.

Nuestro propósito en estas notas es ver algunas propiedades de la bisección y el baricentro de figuras planas, de modo de comprender en qué forma los dos conceptos difieren. Comenzaremos dando una descripción intuitiva de qué se puede decir desde la teoría sobre la división de figuras planas en dos partes de igual área mediante rectas, y veremos concretamente cómo son estas rectas en el caso del triángulo. Continuaremos con algunas propiedades del baricentro de figuras en general, que nos permitirán encontrar geoméricamente el baricentro de polígonos como un cuadrilátero o un pentágono, construcción que puede realizarse con prácticamente cualquier software de geometría dinámica como Cabri-Géomètre. Hemos dejado para el final el estudio de envolventes de familias de rectas, que requiere el uso de derivadas, y una presentación del baricentro desde el punto de vista “físico”.

2. El menú que empieza con panqueques, sigue con huevos fritos y termina con sandwichs, con tortas entre medio.

Empezamos dando una idea intuitiva de cómo dividir una figura plana en dos partes de igual área mediante una recta, aunque debemos estar advertidos que para hacer una descripción rigurosa deberíamos contar con una definición adecuada de “área” y de “continuidad” de funciones, y sus propiedades, lo que escapa a nuestro objetivo. Los inquietos pueden ver una descripción detallada de esta Sección en el excelente libro de Chinn y Steenrod [CS].

Con este recaudo, consideremos una región¹ \mathcal{P} del plano “acotada”, es decir, que no se extiende indefinidamente en ninguna dirección. Podemos pensar que se trata de un “panqueque” muy chato, o la región encerrada por una poligonal (ver Figura 1). Supongamos además que \mathcal{P} tiene área positiva (medida en alguna unidad adecuada) a .



Figura 1: la región \mathcal{P} .

Nuestro interés es cortar este “panqueque” en dos mitades de igual área mediante un corte recto de cuchillo.

¹Para los entendidos: en principio una región es un abierto conexo, pero acá no nos preocupamos por esos “detalles”.

Con este fin, consideremos ahora una recta ℓ que, para fijar ideas, por el momento suponemos vertical (habiendo fijado un sistema de coordenadas cartesianas). ℓ divide al plano en dos semiplanos, y por lo tanto también divide a \mathcal{P} en dos partes, alguna de las cuales podría ser incluso vacía. Llamemos \mathcal{P}^- a la parte de \mathcal{P} que queda a la izquierda de ℓ pero no la toca, y \mathcal{P}^+ a la parte restante, es decir la parte que queda a la derecha incluyendo la parte de \mathcal{P} contenida en ℓ .

Movamos ahora la recta ℓ paralelamente, como se indica en la Figura 2, donde la región \mathcal{P}^- está sombreada y la región \mathcal{P}^+ dejada en blanco, para las distintas posiciones de ℓ . Si ℓ está muy a la izquierda, tendremos que el área de \mathcal{P}^- , que llamaremos a^- , es nula (pues $\mathcal{P}^- = \emptyset$), mientras que el área de \mathcal{P}^+ , que llamaremos a^+ , coincide con el área a de \mathcal{P} (pues, más aún, $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P}$). Por otra parte, si ℓ está bastante a la derecha, tendremos la situación inversa: $a^- = a$ y $a^+ = 0$.

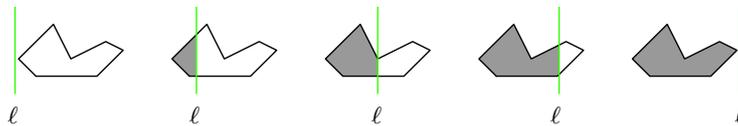


Figura 2: moviendo la recta ℓ .

No es difícil creer que el valor a^- varía “continuamente” al variar ℓ , es decir si la posición de ℓ varía poco, el valor de a^- cambia poco (o nada), que moviendo ℓ de izquierda a derecha, los valores de a^- irán recorriendo todos los valores desde 0 (el mínimo posible) a a (el máximo), y que entonces, en alguna posición intermedia de ℓ debe ser $a^- = a/2$.

El argumento es válido para cualquier inclinación de la recta, mientras la desplazemos paralelamente, con lo que podemos enunciar este resultado (no muy bien demostrado) como

Lema 2.1 (del panqueque): Dada una región \mathcal{P} y una recta ℓ , existe una recta paralela a ℓ que divide a \mathcal{P} en dos partes de igual área. \gg

Por supuesto, podría haber varias posiciones intermedias, dependiendo de la forma de \mathcal{P} y la posición de ℓ , como se muestra en la Figura 3, donde \mathcal{P} se constituye de dos círculos unidos por un segmento.



Figura 3: distintas posiciones de ℓ , pero igual área de \mathcal{P}^- .

El lema no es muy útil para cortar panqueques, porque nos dice que podemos cortarlo en dos pero no cómo. Algunas figuras son sencillas de cortar, como el círculo para el que cualquier diámetro (y sólo si es diámetro) lo corta en dos partes de igual área. Dejamos al lector el siguiente

Problema 2.2. Dado un cuadrado, encontrar todas las rectas que lo cortan en dos partes de igual área. \gg

Las cosas se complican un poco si queremos cortar con una misma recta simultáneamente a dos figuras planas, de modo que ambas queden divididas en partes de igual área, como por ejemplo, si queremos hacer un corte recto con un cuchillo a un huevo frito (plano!), separando en dos partes de igual área tanto clara como yema, o si queremos usar el mismo corte para dos panqueques.

La idea es que podremos hacer esto aprovechando el “grado de libertad” que tenemos—podemos elegir cualquier inclinación para la recta—al cortar una única figura.

Dejamos que el lector pruebe con ejemplos sencillos:

Problema 2.3 (*el huevo frito perfecto*). Dados dos círculos concéntricos en el plano, encontrar todas las rectas que los dividen a ambos en dos partes de igual área. \times

Problema 2.4. Dados dos círculos en el plano, encontrar una recta que divida a ambos en dos partes de igual área (la recta resulta única si los círculos no son concéntricos). \times

Problema 2.5 (*tomado de [CS]*). Dos tortas, una de forma cuadrada y la otra de forma circular, están sobre la misma bandeja. Indicar la manera de dividir las en dos partes iguales con un solo corte de cuchillo. \times

Es posible ver que este resultado es general, es decir, siempre podemos dividir en partes de igual área a cualquier par de regiones del plano mediante un único corte recto:

Lema 2.6 (*del huevo frito*): Dada dos regiones del plano, existe una recta que divide a cada una de ellas en dos partes de igual área. \times

No tendremos tiempo de desarrollar este resultado aquí, pero referimos al lector al ya mencionado libro de Chinn y Steenrod [CS] para una demostración. También en este libro podemos encontrar el resultado para tres dimensiones:

Lema 2.7 (*del sandwich de jamón y queso*): Dada tres regiones en el espacio, existe un plano que divide a cada una de ellas en dos partes de igual volumen². \times

Por otra parte, y volviendo al plano, en general no podríamos cortar tres panqueques con un solo corte:

Problema 2.8. Encontrar tres círculos en el plano de modo que ninguna recta divida a los tres en partes respectivas de igual área. \times

Hay muchas variantes de estos problemas de “cortes”. Por ejemplo, si queremos hacer dos cortes para obtener cuatro partes de igual área, para el círculo podríamos tomar dos diámetros perpendiculares. Dejamos al lector el caso del cuadrado:

Problema 2.9 (*tomado de [CS]*). ¿De cuántas maneras se puede dividir una torta cuadrada en cuatro partes iguales por medio de dos cortes perpendiculares? \times

²Las tres regiones son: el jamón, el queso y el pan, y el sandwich puede tener una o dos tapas, pero suponemos que no usamos manteca.

3. Cortando triángulos

La Sección anterior no nos dice mucho sobre cómo cortar con una recta a un triángulo en dos partes de igual área, pero sabemos que podemos hacerlo en cualquier inclinación que deseemos.

Estudiaremos ahora con más detalle estas rectas, usando para ello diversas nociones, desde área de conjuntos planos, hasta envolvente a una familia de curvas, pasando por ecuaciones de rectas, mezclando geometría analítica y sintética.

Por otra parte, esta Sección puede considerarse como lectura previa al artículo de Beyer y Swartz [BS], en el que se extienden a más dimensiones muchas de las propiedades que mencionaremos.

Recordando uno de los principios fundamentales en la resolución de problemas, “plantear un problema similar más fácil de resolver”, empecemos considerando el caso en que la recta contiene a uno de los vértices.

Este caso es bien conocido: en el triángulo ABC ³, la única recta que pasa por el vértice A y que divide al triángulo en dos partes de igual área es la que contiene a la mediana. También sabemos que las tres medianas del triángulo se cortan en un único punto G (el famoso baricentro), como se muestra en la Figura 4, y más aún, si las medianas son AA' , BB' y CC' , los seis triángulos AGB' , $B'GC$, CGA' , $A'GB$, BGC' y $C'GA$ tienen igual área.

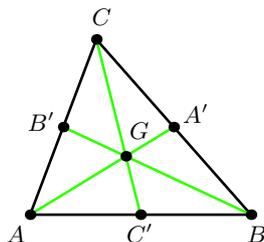


Figura 4: un triángulo ABC , sus medianas y el baricentro.

En fin, también es conocido que el baricentro G divide a las medianas en tercios, o en “fórmula”:

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = 2.$$

Esta “fórmula” nos permite calcular el baricentro analíticamente. En efecto, pensando (esperamos que sin confundir al lector) a los puntos A , B , C y G como vectores en el plano, tenemos

$$A' = \frac{1}{2}(B + C),$$

pues A' es el punto medio de BC , y

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}A', \quad (3.1)$$

³No ponemos notación especial para triángulos, segmentos, rectas, etc. Así, AB puede estar refiriéndose a la recta por A y B , o al segmento, o a la distancia entre A y B , etc.

pues G está más cerca de A' que de A en la proporción 1 a 2. Juntando estas dos últimas ecuaciones, tenemos

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3} \frac{1}{2}(B + C) = \frac{1}{3}(A + B + C).$$

Pero pasemos al caso en que la recta no contiene ningún vértice, como en la Figura 5, donde la recta corta al borde del triángulo en los puntos P sobre AB y Q sobre AC .

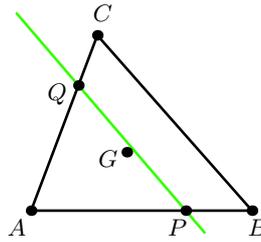


Figura 5: la recta PQ divide al triángulo ABC en dos partes de igual área.

Un primer problema es: dado P sobre AB , encontrar Q sabiendo que debe estar sobre AC . Si podemos hacer esto, entonces podemos encontrar la recta.

Para encontrar Q bajo las condiciones dadas, observamos que como debe ser

$$\text{área}(APQ) = \frac{1}{2} \text{área}(ABC), \quad (3.2)$$

usando que el área de un triángulo UVW puede calcularse como

$$\text{área}(UVW) = \frac{1}{2} \cdot UV \cdot UW \cdot \text{sen } \hat{U},$$

reemplazando en (3.2) y simplificando, llegamos a que queremos

$$AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC. \quad (3.3)$$

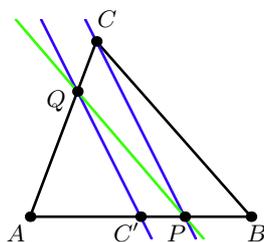
Si queremos encontrar Q geoméricamente, podemos reescribir la ecuación anterior como

$$AP \cdot AQ = AC' \cdot AC, \quad (3.4)$$

donde C' es el punto medio del segmento AB , quedando la igualdad de dos “productos de segmentos”.

Euclides tenía métodos para resolver geoméricamente ecuaciones como la anterior, donde tres de los segmentos son conocidos y el cuarto incógnita. Sin embargo, nosotros vamos a resolverla usando semejanza de triángulos, método debido aparentemente a Descartes. Con este fin observamos que, siendo \hat{A} común, la ecuación (3.4) es equivalente a la semejanza de los triángulos APC y $AC'Q$, y por lo tanto podemos construir Q como intersección de la paralela a PC que pasa por C' con el segmento AC ⁴, como se indica en la Figura 6.

⁴Recordar que estamos suponiendo que Q está sobre el segmento AC .

Figura 6: construcción geométrica de Q conociendo P .

Para encontrar Q analíticamente (siempre en la configuración de la Figura 5), podemos escribir

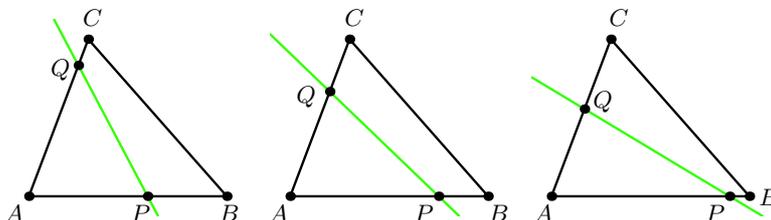
$$P = A + s(B - A) \quad \text{y} \quad Q = A + t(C - A), \quad (3.5)$$

donde s es conocido pero t es incógnita. En este caso, después de simplificar podemos reescribir (3.3) (si $s \neq 0$) como

$$t = \frac{1}{2s}, \quad (3.6)$$

que es bien sencilla de resolver.

Pero no siempre la recta cortará a los lados AB y AC . Para estudiar un poco este problema, miremos a las distintas posiciones de P sobre AB y Q sobre AC como se indica en la Figura 7.

Figura 7: distintas posiciones de PQ .

Vemos que a medida que P se va acercando a B , Q se va acercando hacia el punto medio de AC . Es decir, para tener P sobre AB y Q sobre AC , pasamos de la posición extrema donde PQ es la mediana por C a la otra posición extrema donde PQ es la mediana por B .

Las rectas que cortan al triángulo en dos partes de igual área quedan entonces “clasificadas” de acuerdo a los lados que intersecan. Por ejemplo, podemos asociar las rectas que hemos dibujado en la Figura 7 con el vértice A . De modo similar, podemos asociar rectas con los vértices B o C , lo que hemos hecho en la Figura 8, donde hemos dibujado las rectas asociadas al vértice A en verde claro, las asociadas al vértice B en rosa, las asociadas al vértice C en celeste, y las medianas en negro (que podrían asociarse a dos vértices).

Podemos observar que estas rectas *nunca* contienen al baricentro, salvo que contengan a las medianas. Pero el lector ya está preparado para resolver este problema (*Sugerencia*: en las ecuaciones (3.5) y (3.6) debe ser $0 \leq s, t \leq 1/2$):

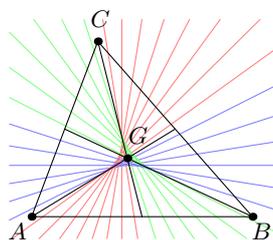


Figura 8: rectas que bisechan, coloreadas según los vértices asociados.

Problema 3.1. Si la recta ℓ corta en dos partes de igual área al triángulo ABC y contiene al baricentro, entonces contiene a uno de los vértices. \times

También podemos observar que están todas las pendientes posibles, en consonancia con el Lema del panqueque (2.1).

Haciendo un “zoom” en la Figura 8, y tomando sólo las rectas asociadas a A , podemos observar en la Figura 9 nuevamente que el baricentro no está en ninguna de estas rectas. También podemos observar en esta figura que se delinea una curva, la envolvente⁵, que está remarcada en la Figura 10.

Esta curva envolvente es parte de una hipérbola, pero posponemos este estudio a Sección 5 ya que necesitamos derivadas y aquí hacemos sólo una introducción elemental.

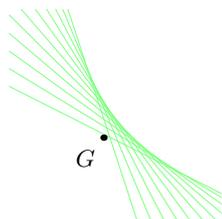


Figura 9: “zoom” de rectas asociadas a A , cerca del baricentro.

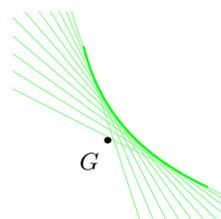


Figura 10: la envolvente de las rectas asociadas a A .

Para terminar esta Sección, mostramos en la Figura 11 un “zoom” cerca del baricentro, con las envolventes correspondientes a las rectas asociadas a A , B y C , y en la que podemos apreciar que las tres hipérbolas son tangentes a las medianas y entre sí.

4. Encontrando el baricentro de polígonos

Como mencionamos en la introducción, el concepto de baricentro no es sencillo y vamos a posponer su estudio hasta la Sección 6, donde en lugares necesitaremos herramientas avanzadas. Acá nos contentaremos con “creer” algunas de las propiedades del baricentro de figuras planas.

⁵Recordemos que la envolvente de una familia de curvas es otra curva tangente a cada una de las curvas en la familia.

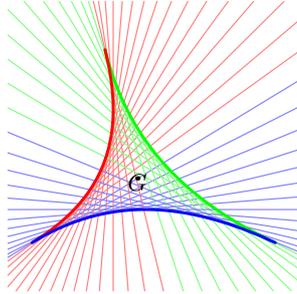


Figura 11: las envolventes son parte de hipérbolas tangentes.

La primera pareciera una verdad de perogrullo, que por ahora tomaremos como “axioma”: *el baricentro de un triángulo es el punto en la intersección de sus medianas.*

Por supuesto que suena como decir que “el baricentro es el baricentro” pero, como explicamos en la introducción, lo que queremos decir aquí es que el baricentro del triángulo y la intersección de las medianas son dos conceptos distintos que “por casualidad” coinciden, y sólo por no usar otros nombres es que en geometría elemental *definimos* al baricentro como la intersección de las medianas.

La otra propiedad, que también veremos desarrollada en la Sección 6, es:

Propiedad 4.1: Si la figura plana F , de área m y baricentro P , es la unión de las figuras (disjuntas) F' y F'' , que tienen respectivamente áreas m' y m'' y centros de gravedad ubicados en P' y P'' , entonces

$$m = m' + m'',$$

es decir, $\text{área}(F) = \text{área}(F') + \text{área}(F'')$, y

$$P = \frac{m'}{m} P' + \frac{m''}{m} P''. \tag{4.1}$$

En particular, P está en el segmento que une P' y P'' . >

Verifiquemos esta propiedad tomando como F al triángulo ABC como se muestra en la Figura 12, considerándolo como unión del triángulo ARC (la figura F'), y el triángulo RBC (la figura F''), donde R está sobre el lado AB .

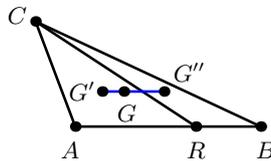


Figura 12: G es combinación convexa de G' y G'' .

Si G , G' y G'' son los respectivos baricentros, de acuerdo a la ecuación (3.1),

$$G' = \frac{1}{3}(A + R + C), \quad G'' = \frac{1}{3}(B + R + C) \quad \text{y} \quad G = \frac{1}{3}(A + B + C),$$

mientras que si h es la altura común de los tres triángulos, tenemos además

$$\text{área}(ARC) = m' = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AR, \quad \text{área}(RBC) = m'' = \frac{1}{2} \cdot h \cdot RB,$$

y

$$\text{área}(ABC) = m = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AB.$$

Es claro que a partir de las últimas ecuaciones tenemos $m = m' + m''$. Por otra parte, como R está en el segmento AB , podemos poner

$$R = t(B - A) + A \tag{4.2}$$

para algún t con $0 \leq t \leq 1$. Entonces resulta

$$AR = t AB \quad \text{y} \quad RB = (1 - t) AB.$$

Por lo que

$$\begin{aligned} m'G' + m''G'' &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} h (AR(A + R + C) + RB(R + B + C)) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{1}{2} h \left(((AR + RB)C) + (AR(A + R) + RB(R + B)) \right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por supuesto que $AR + RB = AB$, y además

$$\begin{aligned} AR(A + R) + RB(R + B) &= t \cdot AB \cdot (A + R) + (1 - t) \cdot AB \cdot (R + B) = \\ &= t \cdot AB \cdot A + AB \cdot R + AB \cdot (1 - t) \cdot B = \\ &= AB (tA + t(B - A) + A + (1 - t) \cdot B) = \\ &= AB \cdot (A + B). \end{aligned}$$

De modo que la ecuación (4.3) puede reescribirse como

$$m'G' + m''G'' = \frac{1}{3} \frac{1}{2} h AB (A + B + C),$$

es decir,

$$m'G' + m''G'' = \left(\frac{1}{2} h AB\right) \left(\frac{1}{3} (A + B + C)\right) = mG,$$

con lo que verificamos que se cumple la ecuación (4.1).

4.1. El baricentro de un cuadrilátero

En general, la Propiedad 4.1 no se puede usar directamente porque no es sencillo obtener geoméricamente el valor de las áreas: éstas deberían ser productos de segmentos y habrá que fijar un segmento como unidad de longitud (idea debida a Descartes). Pero podemos aprovechar esta Propiedad si podemos descomponer una figura como unión de figuras de baricentros conocidos en al menos dos formas distintas.

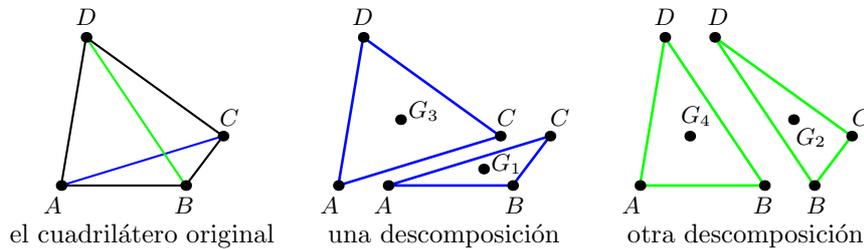


Figura 13: descomposición de $ABCD$ en triángulos, de dos formas distintas.

Por ejemplo, consideremos un cuadrilátero (convexo) $ABCD$ como en la Figura 13. Tomando pares opuestos de vértices, podemos descomponerlo como

$$\begin{aligned} (\text{cuadrilátero } ABCD) &= (\text{triángulo } ABC) \cup (\text{triángulo } CDA) = \\ &= (\text{triángulo } BCD) \cup (\text{triángulo } DAB). \end{aligned}$$

Indicando con G al baricentro del cuadrilátero $ABCD$, y por G_1 , G_2 , G_3 y G_4 los baricentros de, respectivamente, los triángulos ABC , BCD , CDA y DAC , la descomposición anterior y la Propiedad 4.1⁶ nos dicen que G está en los segmentos G_1G_3 y G_2G_4 , y por lo tanto en su intersección. De este modo podemos construir G como se muestra en la Figura 14, donde los segmentos entre los baricentros de los triángulos “interiores” están pintados en rojo.

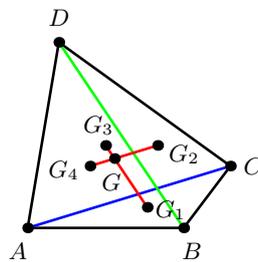


Figura 14: construcción del baricentro G de $ABCD$.

Prestando atención, podemos observar que los segmentos indicados en rojo son paralelos a las diagonales del cuadrilátero, y dejamos al lector que demuestre esta propiedad y un poquito más:

Problema 4.2. Con las notaciones anteriores, demostrar que

- Los segmentos G_1G_3 y BD son paralelos (y por lo tanto, también es $G_2G_4 \parallel AC$).
- La longitud del segmento G_1G_3 es un tercio de la de BD (y de modo similar, $BD = 3G_2G_4$). >ε

⁶ $ABCD$ debe ser convexo para poder escribirlo como unión disjunta de los triángulos propuestos.

4.2. El baricentro de un pentágono

Ahora que sabemos cómo construir geoméricamente el baricentro de un cuadrilátero, podemos seguir usando la Propiedad 4.1 con otros polígonos planos (convexos), pues un pentágono se puede descomponer en un triángulo y un cuadrilátero (de muchas formas) y entonces podemos encontrar el baricentro de cualquier pentágono, un hexágono se puede descomponer como unión de un triángulo y un pentágono, etc. No importa cómo hagamos la descomposición, por ejemplo poniendo a un hexágono como unión de un triángulo y un cuadrilátero por un lado y de dos cuadriláteros por otro, siempre podemos encontrar el mismo baricentro como intersección de los segmentos adecuados.

Vamos a ilustrar esta propiedad encontrando el baricentro del pentágono $ABCDE$ que se muestra en la Figura 15, en la que se presentan dos formas distintas para calcular el baricentro. En la primera, descomponemos de dos formas: el triángulo ABC y el cuadrilátero $ACDE$, y el triángulo ADE y el cuadrilátero $ABCD$; mientras que en la segunda, lo hacemos en el triángulo BCD y el cuadrilátero $ABDE$, y el triángulo CDE y el cuadrilátero $ABCE$.

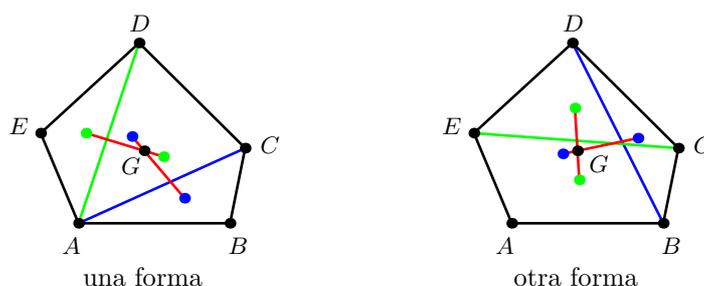


Figura 15: encontrando el baricentro de $ABCDE$ de dos formas distintas.

En ambos casos hemos señalado con distintos colores los segmentos que definen las descomposiciones, coloreando de igual forma los baricentros correspondientes. Como en el caso del cuadrilátero, los segmentos que definen al baricentro están marcados en rojo.

Estas construcciones son particularmente instructivas si se usa un software de geometría dinámica que permita el uso de “macros”, como Cabri-Géomètre. A partir de la construcción, mediante una “macro”, del baricentro de un triángulo, podemos definir “macros” para construir los baricentros de cuadriláteros, pentágonos, etc., de modo que la “macro” para el cuadrilátero use la del triángulo, la del pentágono use la del cuadrilátero y el triángulo, y así sucesivamente.

5. Encontrando la envolvente

Nos gustaría hacer ahora una presentación sencilla de cómo encontrar la envolvente a una familia de curvas en el plano. Si bien es posible hacerlo en casos particulares sin recurrir al cálculo diferencial, estos métodos son muy “artesanales”, dependiendo en extremo del caso considerado.

Por otra parte, el cálculo diferencial ofrece técnicas muy generales, pero para no marear demasiado al lector, vamos a presentar aquí el caso en que las curvas de la familia son rectas.

Ahora, ¡a arremangarse!

Una recta en el plano puede escribirse en forma paramétrica como

$$(x, y) = tM + N, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $M = (m_1, m_2)$ y $N = (n_1, n_2)$ son dos vectores, y $M \neq (0, 0)$ da la dirección o inclinación de la recta.

Cuando tenemos una familia de rectas que dependen del parámetro real s , cada una de las rectas se podrá escribir con valores de M y N que dependen de s , es decir se podrá describir como $(x, y) = R(t, s)$, donde

$$R(t, s) = tM(s) + N(s). \quad (5.1)$$

Para poder aplicar cálculo diferencial, supondremos que $M(s)$ y $N(s)$ son funciones (a valores en el plano) que varían en forma diferenciable con s .

Una envolvente de esta familia de rectas es una curva que es tangente a cada una de las rectas de la familia. Es natural describir esa curva mediante el mismo parámetro s , de modo que el punto en la curva correspondiente a s está en la recta correspondiente al mismo s . En otras palabras, si llamamos $E(s)$ al punto en la curva, podemos encontrar una función $\tau(s)$ ⁷ de modo que

$$E(s) = \tau(s)M(s) + N(s). \quad (5.2)$$

Como la recta correspondiente a s es tangente a la envolvente en $E(s)$, debe ser que las pendientes de esta recta y la de la tangente coinciden, es decir, existe una constante κ , con $\kappa \neq 0$ y que puede depender de s , tal que

$$\frac{dE}{ds} = \kappa(s)M(s). \quad (5.3)$$

Usando (5.2) y la regla de la cadena para evaluar $\frac{dE}{ds}$ en el miembro izquierdo de (5.3), encontramos que

$$\tau \frac{dM}{ds} + \frac{d\tau}{ds}M + \frac{dN}{ds} = \kappa M.$$

Como estamos trabajando en dos dimensiones, esta última ecuación es en realidad un sistema de dos ecuaciones.

Para explicitarla, ponemos $M = (m_1, m_2)$ y $N = (n_1, n_2)$:

$$\begin{aligned} \tau \frac{dm_1}{ds} + \frac{d\tau}{ds}m_1 + \frac{dn_1}{ds} &= \kappa m_1, \\ \tau \frac{dm_2}{ds} + \frac{d\tau}{ds}m_2 + \frac{dn_2}{ds} &= \kappa m_2. \end{aligned}$$

Eliminando κ entre estas ecuaciones nos lleva a poder despejar τ directamente (sin necesidad de averiguar el valor de $\frac{d\tau}{ds}$), obteniendo

$$\tau(s) = \frac{\frac{dn_2}{ds}m_1 - \frac{dn_1}{ds}m_2}{\frac{dm_1}{ds}m_2 - \frac{dm_2}{ds}m_1}. \quad (5.4)$$

Esta ecuación es bien general, pero a veces puede quedar complicada, dependiendo de las ecuaciones que describen la familia de rectas. Nosotros vamos a aplicarla a dos casos particulares, que pasamos a detallar.

⁷Suponemos que tanto E como τ resultan diferenciables.

5.1. La hipérbola en la bisección del triángulo

En el caso de la familia de rectas que estudiamos en la Sección 3, tomando los puntos donde la recta corta a los lados que contienen al vértice A , ponemos

$$P = \lambda(B - A) + A \quad \text{y} \quad Q = \mu(C - A) + A,$$

donde λ y μ son positivos.

Usando que el área del triángulo PAQ es la mitad del área del triángulo BAC , obtenemos que λ y μ están relacionados por

$$\lambda\mu = 1/2, \tag{5.5}$$

como hemos visto en la ecuación (3.6).

Mirando a la recta que pasa por P y Q , obtenemos su ecuación paramétrica

$$(x, y) = t(Q - P) + P,$$

por lo que usando (5.5), obtenemos que la familia de rectas que nos interesa se describe con el parámetro λ mediante

$$R(t, \lambda) = t\left(\frac{1}{2\lambda}(C - A) + \lambda(A - B)\right) + \lambda(B - A) + A.$$

Recordando que λ juega el papel de s en (5.4), en nuestro caso tenemos

$$M = \frac{1}{2\lambda}(C - A) + \lambda(A - B) \quad \text{y} \quad N = \lambda(B - A) + A,$$

de donde

$$\frac{dM}{d\lambda} = \frac{1}{2\lambda^2}(A - C) + (A - B) \quad \text{y} \quad \frac{dN}{d\lambda} = B - A.$$

Reemplazando en la ecuación (5.4), y simplificando queda, por algún milagro,

$$\tau(\lambda) = 1/2,$$

por lo que la ecuación de la envolvente, en términos del parámetro λ es

$$(x, y) = E(\lambda) = R(\tau(\lambda), \lambda) = \frac{1}{4\lambda}(C - A) + \frac{1}{2}\lambda(B - A) + A, \tag{5.6}$$

donde, recordemos, A , B y C son los vértices del triángulo, la ecuación describe las rectas asociadas a A y, consecuentemente, debe ser $1/2 \leq \lambda \leq 1$ ⁸.

Si bien podemos sospechar a partir de la forma paramétrica que se trata de una hipérbola, nos gustaría tener una ecuación de la forma $y = f(x)$ o similar, o sea, despejar λ del sistema de ecuaciones (5.6).

En general, las ecuaciones resultantes son bastante horribles, pero podemos poner algunos valores particulares de A , B y C para que las cuentas den “lindas”. Por ejemplo, si consideramos el triángulo rectángulo donde $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$ y $C = (0, 4)$, la ecuación (5.6) se escribe como

$$x = \lambda, \quad y = 1/\lambda,$$

y podemos eliminar λ quedando la ecuación de la envolvente como la hipérbola “clásica”:

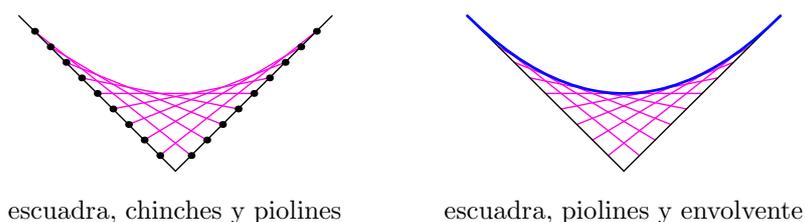
$$y = 1/x.$$

⁸Secreto: (5.6) es la forma que usamos para dibujar las envolventes en la Figuras 9, 10 y 11.

5.2. Una parábola

El lector posiblemente recuerde el siguiente problema “folklórico”:

Problema 5.1. En una escuadra se ponen chinchas sobre cada cateto espaciadas uniformemente. Se unen con un piolín las chinchas de un cateto con las del otro cateto, de modo que la suma de las distancias de las chinchas unidas al ángulo recto permanezca constante. Los piolines van delineando una curva (la envolvente) (ver Figura 16): ¿qué tipo de curva es? \times



escuadra, chinchas y piolines

escuadra, piolines y envolvente

Figura 16: la envolvente es una parábola.

La respuesta es que en este caso la envolvente es parte de una parábola, propiedad que veremos ahora analíticamente usando los resultados del principio de esta Sección.

Vamos a poner valores particulares a la “escuadra” para simplificar los cálculos y obtener algo bien reconocible, considerándola como que el vértice de ángulo recto está ubicado en $A = (0, 0)$, y los catetos siguen las direcciones $(1, 1)$ y $(-1, 1)$. Las rectas de nuestra familia están definidas ahora por puntos P y Q en distintos catetos, de modo que, para alguna constante $\gamma > 0$,

$$PA + QA = \gamma.$$

Poniendo $P = \lambda(1, 1)$ y $Q = \mu(-1, 1)$, la relación anterior puede escribirse como

$$\lambda + \mu = \sqrt{2}\gamma.$$

Aunque podríamos continuar sin dar valores a γ , tomemos el valor particular $\gamma = 1/\sqrt{2}$, a fin de simplificar las cuentas. Entonces la ecuación de la recta por P y Q ,

$$(x, y) = t(Q - P) + P,$$

se escribe como

$$x = -t + \lambda \quad \text{y} \quad y = (1 - 2\lambda)t + \lambda,$$

los valores de $M = (m_1, m_2)$ y $N = (n_1, n_2)$ en la ecuación (5.1) son

$$M = (-1, 1 - 2\lambda) \quad \text{y} \quad N = (\lambda, \lambda),$$

y las derivadas respectivas son

$$\frac{dM}{d\lambda} = (0, -2) \quad \text{y} \quad \frac{dN}{d\lambda} = (1, 1).$$

Reemplazando estos valores en (5.4), obtenemos

$$\tau(\lambda) = 1 - \lambda,$$

y la ecuación de la envolvente en forma paramétrica es

$$x = -1 + 2\lambda \quad \text{y} \quad y = 1 - 2\lambda + 2\lambda^2.$$

Eliminando λ , obtenemos la ecuación de la envolvente como

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2},$$

que reconocemos como la de una parábola.

Recordemos que la envolvente, dibujada en azul en la Figura 16, es sólo una parte de la parábola. En nuestro caso, los catetos de la “escuadra” son tangentes a la parábola, como puede verse sencillamente tomando derivadas ($y(\pm 1) = 1$ y $\frac{dy}{dx}(\pm 1) = \pm 2$). La envolvente es la parte de la parábola encerrada entre estas dos tangentes.

No hay nada de extraordinario en que la escuadra esté a 90° , como el lector podrá comprobar:

Problema 5.2. Adaptar los pasos anteriores para el caso en que el ángulo del vértice sea arbitrario (entre 0° y 180°), comprobando que también se trata de (parte de) una parábola. \gg

De este modo, podemos poner chinchas equiespaciadas en los lados de cualquier polígono y unir adecuadamente las de lados consecutivos, para obtener distintas partes de parábolas. La Figura 17, en la que por claridad no hemos remarcado las envolventes, muestra una posibilidad con un triángulo. Podemos observar que las constantes “ γ ” son distintas para cada vértice. También podemos observar que no siempre tiene sentido encontrar la ecuación de la parábola correspondiente en la forma $y = f(x)$, y es más conveniente trabajar con la forma paramétrica.

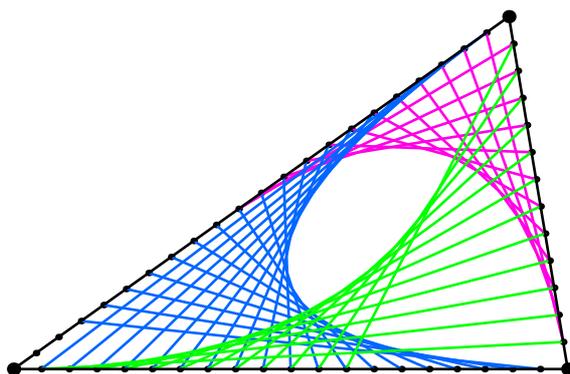


Figura 17: varias parábolas en el triángulo.

Debemos destacar que desde el punto de vista geométrico, considerando a la parábola como definida por un foco (punto) y directriz (recta), en el caso

del ángulo a 90° el vértice es la intersección de la directriz y el eje (la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco), mientras que en el caso general, el vértice sólo está sobre el eje.

6. Definiendo el baricentro

Cuando empujamos una mesa rectangular apoyándonos en una esquina como esquematizado en la Figura 18.a), difícilmente consigamos que la mesa se traslade paralelamente, sino que inducimos un movimiento de rotación⁹. Para evitarlo, normalmente empujamos desde el centro (Figura 18.b)) o repartiendo nuestras fuerzas simétricamente respecto del punto medio del borde (Figura 18.c)).

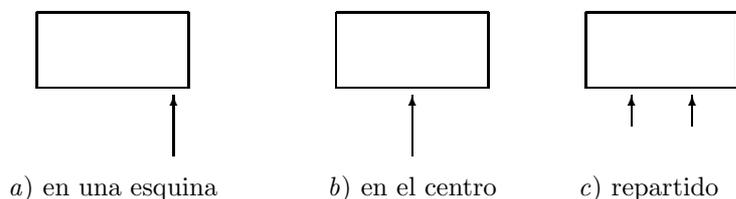


Figura 18: empujando una mesa.

Por supuesto que no es nuestra intención desarrollar ahora un curso de física¹⁰, pero observamos que la “fuerza resultante” no se obtiene mediante la suma de “vectores libres”, usando por ejemplo la ley del paralelogramo, sino que es importante saber exactamente dónde se aplica, o al menos saber un punto sobre la recta que define el punto de aplicación y la fuerza. En el caso de la mesa, la fuerza resultante tiene que estar aplicada de forma tal que pase por el centro de la mesa.

En la Figura 19 esquematizamos el caso en que varias personas empujan nuestra pobre mesa, poniendo las longitudes de las flechas proporcionales a las magnitudes de las fuerzas. Ahora no es claro a simple vista si habrá o no rotación de la mesa.

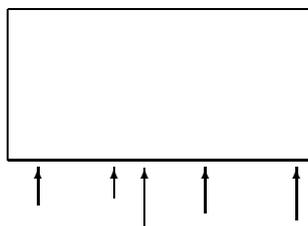


Figura 19: muchos empujando la mesa.

Para calcular la fuerza resultante, debemos tener en cuenta no sólo la magnitud sino también de alguna manera la distancia al centro del borde para cada

⁹o no la movemos, si es muy pesada.

¹⁰¡ni sabría como hacerlo!

una de las fuerzas que intervienen. En todo caso, queremos que la fuerza “resultante” quede aplicada sobre el centro de la mesa.

Es así que surge la idea de *momento*, en el cual tenemos en cuenta el producto de la magnitud por la distancia, a diferencia de cuando calculamos la fuerza como suma de “vectores libres”.

Trataremos de ilustrar cómo obtener esta “resultante” en un ejemplo más sencillo, cambiando la mesa empujada por una barra (de *muy* poco peso) sostenida por su punto medio y de la cual penden diversos pesos¹¹, como se indica en la Figura 20. La situación es similar al caso de la mesa: para que la barra no se incline, las fuerzas tienen que estar distribuidas adecuadamente.

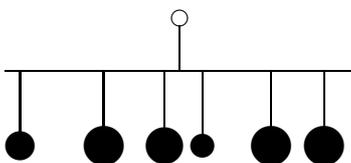


Figura 20: una barra con varios pesos adosados.

Si ponemos el centro de coordenadas en el centro de la barra, y la i -ésima pesa, $1 \leq i \leq n$, está ubicada en la posición con abscisa x_i (x_i puede ser menor que 0) y tiene peso m_i ¹², la física nos dice que la condición para que la barra no se incline está dada por

$$\sum_{i=1}^n x_i m_i = 0,$$

mientras que el peso total, independiente de las posiciones, es

$$m = \sum_{i=1}^n m_i.$$

Si ahora queremos suspender la barra desde la posición $(x_0, 0)$ de modo que no se incline, la distribución de los pesos debe satisfacer

$$\sum_{i=1}^n (x_i - x_0) m_i = 0,$$

o,

$$\sum_{i=1}^n x_i m_i = \sum_{i=1}^n x_0 m_i = m x_0,$$

ya que el peso, $m = \sum_{i=1}^n m_i$ no varía. Puesto de otra forma, para que la barra no se incline, debe estar suspendida desde un punto con abscisa

$$x_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i m_i,$$

¹¹suponemos que actúa la gravedad en la dirección “-y”.

¹²equiparando de alguna manera peso con masa.

que es un promedio “pesado” de las coordenadas x_i , ya que $\sum_{i=1}^n (m_i/m) = 1$.

No nos ha importado la ordenada del punto de suspensión, puesto que suponemos que las únicas fuerzas actuantes son debido a la gravedad, es decir, actúan en una única dirección.

En general, en cambio, debemos tenerla en cuenta. El caso típico es un sistema de masas, idealmente “puntuales” y rígidamente unidas, cada una con masa m_i y ubicada en la posición (x_i, y_i) , como se ilustra en la Figura 21.

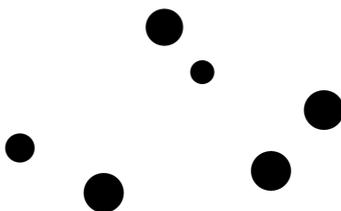


Figura 21: un sistema de masas puntuales.

El *centro de gravedad* del sistema es un punto (x_0, y_0) de modo que el sistema no gire al ser sometido a cualquier atracción (no sólo en la dirección $-y$). Para encontrarlo, descomponiendo las fuerzas en las direcciones x y y , vemos que debemos pedir

$$x_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n x_i m_i \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n y_i m_i,$$

donde, como antes, $m = \sum_{i=1}^n m_i$.

Una de las razones de la potencia de las matemáticas es que distintos fenómenos tienen el mismo modelo matemático. Por ejemplo, el modelo físico de la barra con pesos es básicamente el mismo que usamos al estudiar probabilidades. En ese caso, si obtenemos el valor x_i con probabilidad p_i , pedimos

$$1 = \sum_{i=1}^n p_i,$$

y definimos la media o esperanza como

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

Podemos equiparar la suma de probabilidades a que el sistema tenga masa total 1, por ejemplo usando unidades adecuadas, y la media es idéntica al valor x_0 si, como suponemos, $m = 1$.

El centro de gravedad y la esperanza son ejemplos de *momentos de primer orden*, pero se definen momentos de cualquier orden. El de segundo orden, en nuestro caso $\sum_i x_i^2 p_i$, está relacionado con la varianza en probabilidades y con el *momento de inercia* en física.

Para obtener el centro de gravedad de una figura plana F , tenemos que suponer que hay “muchísimas” masas que la constituyen, pero ahora todas con

el mismo peso (pues suponemos el área como invariante por traslaciones). La masa se convierte entonces en la integral doble que define el área de F ,

$$m = \iint_F dx dy, \quad (6.1)$$

y el centro de gravedad (x_0, y_0) satisface

$$x_0 = \frac{1}{m} \iint_F x dx dy \quad \text{y} \quad y_0 = \frac{1}{m} \iint_F y dx dy. \quad (6.2)$$

Estas ecuaciones han sido motivadas por la física, pero *son las definiciones matemáticas del área (6.1) y del baricentro (6.2) de la figura F .*

No es difícil ver que si aplicamos un movimiento rígido (traslación, rotación o simetría) a la figura F , el área no cambia pero el centro de gravedad se mueve de la misma forma, ya que el determinante de la matriz Jacobiana de estas transformaciones lineales es 1.

También es sencilla la Propiedad 4.1, puesto que si F es la unión disjunta de F' y F'' , tendremos

$$m = \iint_F dx dy = \iint_{F'} dx dy + \iint_{F''} dx dy = m' + m'',$$

mientras que, siendo $P = (x_0, y_0)$, $P' = (x'_0, y'_0)$ y $P'' = (x''_0, y''_0)$ los respectivos centros de gravedad,

$$\begin{aligned} mP &= \left(\iint_F x dx dy, \iint_F y dx dy \right) = \\ &= \left(\iint_{F'} x dx dy + \iint_{F''} x dx dy, \iint_{F'} y dx dy + \iint_{F''} y dx dy \right) = \\ &= \left(\iint_{F'} x dx dy, \iint_{F'} y dx dy \right) + \left(\iint_{F''} x dx dy, \iint_{F''} y dx dy \right) = \\ &= m'(x'_0, y'_0) + m''(x''_0, y''_0) = m'P + m''P'', \end{aligned}$$

que es la ecuación (4.1).

Terminamos estas notas demostrando el “axioma” de la Sección 4, con el que establecíamos que el baricentro del triángulo es donde se cortan las medianas. Desde el punto de vista analítico, debemos ver que si A , B y C son los vértices del triángulo, entonces el baricentro es $\frac{1}{3}(A + B + C)$.

Por la discusión que acabamos de hacer, y tal vez después de traslaciones o rotaciones, podemos suponer que el triángulo tiene vértices $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ con $b > 0$, y $C = (c_1, c_2)$, donde $c_2 > 0$ y $0 < c_1 < b$ (eventualmente el ángulo recto u obtuso está en C).

Para calcular el baricentro (x_0, y_0) , consideramos que el borde del triángulo está definido por dos rectas y el eje x . La primera recta, de ecuación $y = \alpha x$ es la que une A con C , y la segunda, de ecuación $y = \alpha'(x - b)$ es la que une C con B , por lo que

$$\alpha = \frac{c_2}{c_1} \quad \text{y} \quad \alpha' = \frac{c_2}{c_1 - b}. \quad (6.3)$$

Vamos a necesitar el área del triángulo, que podemos poner como

$$m = bc_2/2. \quad (6.4)$$

Para calcular x_0 , teniendo en cuenta que $0 < c_1 < b$, observamos que

$$\begin{aligned} mx_0 &= \int_0^{c_1} x \left(\int_0^{\alpha x} dy \right) dx + \int_{c_1}^b x \left(\int_0^{\alpha'(x-b)} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{c_1} x(\alpha x) dx + \int_{c_1}^b x\alpha'(x-b) dx = \\ &= \frac{1}{3}\alpha c_1^3 + \frac{1}{3}\alpha'(b^3 - c_1^3) - \frac{1}{2}\alpha'b(b^2 - c_1^2). \end{aligned}$$

Recordando que $b^3 - c_1^3 = (b - c_1)(b^2 + bc_1 + c_1^2)$, $b^2 - c_1^2 = (b - c_1)(b + c_1)$ y las ecuaciones (6.3), podemos escribir

$$\begin{aligned} mx_0 &= \frac{1}{3}c_2c_1^2 - \frac{1}{3}c_2(b^2 + bc_1 + c_1^2) + \frac{1}{2}c_2b(b + c_1) = \\ &= \frac{1}{6}c_2b(b + c_1). \end{aligned}$$

Considerando ahora el valor de m en (6.4), llegamos a

$$x_0 = \frac{1}{3}(b + c_1). \quad (6.5)$$

Realizando un procedimiento análogo para calcular y_0 , tenemos (omitiendo algunos detalles)

$$\begin{aligned} my_0 &= \int_0^{c_1} \left(\int_0^{\alpha x} y dy \right) dx + \int_{c_1}^b \left(\int_0^{\alpha'(x-b)} y dy \right) dx = \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 \int_0^{c_1} x^2 dx + \frac{1}{2}(\alpha')^2 \int_{c_1}^b (x-b)^2 dx = \\ &= \frac{1}{6}\alpha^2 c_1^3 + \frac{1}{6}(\alpha')^2 (b - c_1)^3 = \\ &= \frac{1}{6}(c_2^2 c_1 + c_2^2 (b - c_1)) = \\ &= \frac{1}{6}c_2^2 b. \end{aligned}$$

Entonces, recordando (6.4),

$$y_0 = \frac{1}{3}c_2.$$

Este valor, junto con el hallado para x_0 en (6.5), implican que $(x_0, y_0) = \frac{1}{3}(A + B + C)$, con lo que hemos demostrado el “axioma”.

Referencias

- [BS] W. A. BEYER y B. SWARTZ: “Bisectors of Triangles and Tetrahedra”, *American Mathematical Monthly*, vol. 100, no. 7 (1993), págs. 626–640.
- [CS] W. G. CHINN y N. E. STEENROD: *First Concepts of Topology*, Random House (1966). Versión en castellano: *Primeros Conceptos de Topología*, Alhambra (1975).