Cadenas de Markov

por Néstor Aguilera[†]

Versión revisada, 7 de octubre de 2009[‡]

[†] Universidad Nacional del Litoral y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

[‡] Versión original: 12 de diciembre de 2002

Índice

Índice de figuras ii

1. Introducción 1

2. Ejemplos 2

3. Usando grafos dirigidos 5

4. Usando matrices 7

5. Clasificación de estados y cadenas 7

6. Un caso particular 9

7. Cadenas absorbentes: resultados teóricos 10

8. Dados y monedas 13
- 8.1. Repetir hasta obtener m consecutivos . . . 15
  - 8.1.1. Análisis directo . . . 15
  - 8.1.2. Con cadenas de Markov . . . 16
- 8.2. Repetir hasta suma prefijada . . . 17
- 8.3. Sumar números entre 0 y 1 hasta llegar a 1 . . . 18
- 8.4. El problema del cumpleaños . . . 19
  - 8.4.1. Análisis Directo . . . 19
  - 8.4.2. Como cadena de Markov . . . 20
- 8.5. Movimiento Browniano . . . 21

9. Cadenas regulares 23

10. Comportamiento Asintótico 27

Apéndice A: Algunas soluciones 28
- A.1. Problema 7.8 . . . 28
- A.2. Problema 8.10 . . . 29
- A.3. Problema 8.12 . . . 30

Apéndice B: Fórmulas relacionadas con el problema del cumpleaños 31

Apéndice C: Programas en Pascal 33

Bibliografía 35

Índice de figuras

3.1. Digrafo asociado al paseo por la peatonal. 5
3.2. Árbol de posibilidades. 6
3.3. Árbol de posibilidades, con probabilidades en los arcos. 6
5.1. Un digrafo no conexo 8
5.2. Conjunto ergódico y estados transientes 8
7.1. Una cadena absorbente simple. 12
10.1. Una cadena cíclica. 28

1. Introducción

Muchas veces nos encontramos con problemas como el del Certamen *El Número de Oro*[1] para profesores del año 2002:

1.1. Problema. Tres jugadores, A, B y C, arrojan alternativamente —en ese orden— una moneda equilibrada. Los jugadores A y B ganan el juego si en alguna de sus tiradas obtienen el mismo resultado que C en su tirada anterior, mientras que C gana si obtiene en alguna tirada el mismo resultado que A en su anterior intervención. El juego finaliza cuando algún jugador gana. Si A apuesta \$20, ¿cuánto deben apostar B y C para que las chances sean parejas? ✄

O, un ejercicio muy común de los cursos de programación como:

1.2. Problema. Hacer un programa (en Basic, Pascal, etc.) para simular tirar un dado hasta que salga un uno m veces consecutivas, y repetir esta simulación n veces para obtener una estimación del número de tiradas esperado. ✄

En estas notas, basadas en un curso dado en la Reunión de Educación Matemática de la UMA[2] de 2002, veremos cómo la teoría de cadenas de Markov puede dar respuesta a ésta y otras preguntas similares.

Desde el punto de vista del aprendizaje, es muy interesante intercalar experimentos numéricos para hacer conjeturas que luego se apoyan en los resultados teóricos, o al revés, hacer los experimentos numéricos para terminar de convencerse que los resultados teóricos se adecuan a la «realidad». Algunos experimentos pueden hacerse con tablas de números aleatorios, pero es más conveniente trabajar con una calculadora apropiada, o mejor una computadora con un lenguaje como Pascal o Basic, o un sistema similar a Mathematica o Matlab, como en el problema anterior.

El plan es el siguiente: primero veremos algunos ejemplos sencillos de cadenas de Markov, luego veremos cómo interpretar las cadenas en el lenguaje de digrafos (grafos dirigidos) y matrices. Después de hacer una clasificación sencilla, pasamos a mirar con algún detalle las cadenas *absorbentes*, y usamos los resultados obtenidos en problemas de tirar dados o monedas. Terminamos con una breve mención de cadenas *regulares*, viendo algunos resultados y aplicaciones. En los apéndices incluimos algunas soluciones a problemas planteados y algunos programas en Pascal (fácilmente traducibles a otros lenguajes) con sus resultados, para ir obteniendo ejemplos «concretos».

La forma de presentar la teoría en estos apuntes está tomada del libro de Roberts [Rob76], el que a su vez está basado en la presentación del libro de Kemeny y Laurel Snell [KLS76], en donde se tratan los temas con mayor profundidad (por ejemplo, se hace un análisis de la varianza que nosotros no tratamos). Para los que quieran profundizar aún más, recomendamos el volumen 1 del libro clásico de Feller [Fel57].

Para aprovechar estas notas, es conveniente estar familiarizado con los elementos de álgebra lineal y cálculo de límites, ¡y no asustarse cuando aparezcan grafos, o programas en Pascal!

(1) `http://www.oma.org.ar/nacional/oro.htm`
(2) `http://www.union-matematica.org.ar/`

2. Ejemplos

Empecemos con algunos ejemplos sencillos. El primero está tomado del libro de Kemeny y Snell [KLS76, pág.29]:

2.1. Ejemplo (El clima en la Tierra de Oz). Según el cuento, en la Tierra de Oz nunca hay dos días buenos en sucesión. Después de un día con buen tiempo, le sigue (con igual probabilidad) un día con lluvia o nieve. Del mismo modo, si nieva (o llueve), el día siguiente nevará (o lloverá) con probabilidad 1/2, pero si cambia el tiempo sólo la mitad de las veces será un lindo día. ✄

Para estudiar este problema primeramente encontramos las *probabilidades de transición*, es decir las probabilidades de que teniendo cierto clima un día, al día siguiente se tenga otro clima. Así, si indicamos con b a un día bueno, con ℓ a uno lluvioso y n si nieva, tendremos

$$\begin{aligned}
p_{bb} &= 0 && \text{de un buen día a un buen día,}\\
p_{b\ell} &= 1/2 && \text{de un buen día a un día lluvioso,}\\
p_{bn} &= 1/2 && \text{de un buen día a un día con nieve,}\\
p_{\ell\ell} &= 1/2 && \text{de un día lluvioso a un día lluvioso,}\\
p_{\ell b} &= 1/4 && \text{de un día lluvioso a un buen día,}\\
p_{\ell n} &= 1/4 && \text{de un día lluvioso a un día con nieve,}\\
p_{nn} &= 1/4 && \text{de un día con nieve a un buen día,}\\
p_{n\ell} &= 1/4 && \text{de un día con nieve a un día con lluvia,}\\
p_{nb} &= 1/2 && \text{de un día con nieve a un buen día.}
\end{aligned}$$

Es conveniente ordenar estos datos en una tabla o matriz,

	b	ℓ	n
b	0	1/2	1/2
ℓ	1/4	1/2	1/4
n	1/4	1/4	1/2

donde las filas indican el clima en el día, las columnas el clima en el día siguiente, y las entradas son las probabilidades de cambio o transición. No es sorprendente que la matriz se llame *matriz de transición* (o *transiciones*).

Observamos que en esta matriz no sólo los coeficientes son no-negativos, sino que al sumarlos por filas obtenemos 1, indicando que alguna de las posibilidades, en este caso b, ℓ o n, debe necesariamente suceder: una matriz con esta propiedad —no-negatividad y suma 1 por filas— también se llama *de probabilidad* o *estocástica*. En cambio, al sumar por columnas, a veces obtenemos menos de 1, a veces más, y habrá casos donde dará 1.

El ejemplo del clima en la Tierra de Oz es un ejemplo típico de *cadena de Markov*:

1. tenemos ciertos *estados*, en este caso b, ℓ y n,
2. en cada momento estamos en uno de estos estados,
3. en el próximo momento (los «momentos» considerados son discretos) volveremos a estar en ese u otro estado,
4. pasamos de un estado a otro con cierta probabilidad,

5. que sólo puede depender del estado inmediatamente anterior,
6. y esta probabilidad no cambia con el transcurso del tiempo.

La cadena de Markov es uno de los modelos más sencillos para tratar de predecir el comportamiento de un «sistema», en este caso el clima en Oz. Por ejemplo nos podemos preguntar: en 100 días, ¿cuántos serán de lluvia (en promedio)?; o, si hoy está nevando, ¿cuántos días (en promedio) habrá que esperar hasta tener un buen día?

Veamos otros ejemplos de cadenas de Markov.

2.2. Ejemplo (Paseando por la peatonal). La peatonal de mi pueblo tiene 6 cuadras de largo, que van de norte a sur. Estoy con ganas de deambular y pasar el tiempo, y como tengo una moneda, se me ocurre tirarla y caminar una cuadra hacia el norte si sale cara o una cuadra hacia el sur si sale ceca. Y continúo este juego hasta salir de la peatonal, ya sea hacia el norte o hacia el sur. ✄

En este caso, podemos pensar que los estados son $0, 1, \ldots, 5, 6$, donde 0 es la esquina sur donde empieza la peatonal, 6 la esquina norte, y las esquinas intermedias se numeran entre 1 y 5.

La matriz de transición puede escribirse entonces como

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\end{array}$$

En este caso tenemos que pensar que las filas y columnas corresponden a los estados 0, 1,. . . , 6. Sin embargo, tenemos la novedad de que al llegar al estado 0 (la esquina sur) o 6 (la esquina norte), el «juego» se termina, por lo que ponemos un 1 en la entrada correspondiente indicando que ya nos quedamos para siempre en esa posición.

La teoría de cadenas de Markov que veremos servirá para responder a preguntas como: si empiezo justo en la mitad de la peatonal (la esquina 3), en promedio (si hago el juego muchas veces) ¿cuántas cuadras caminaré hasta llegar a la esquina 0 o 6?, ¿cuántas veces pasaré por la esquina 1?

2.3. Problema. Supongamos que decido no terminar el juego, y en cambio seguir paseando por la peatonal, volviendo una cuadra para atrás cada vez que llego a la esquina norte o sur. ¿Cómo se modificaría la matriz anterior? ✄

No todos los *procesos estocásticos* —básicamente procesos que dependen del tiempo y que tienen probabilidades asociadas— son cadenas de Markov.

Por ejemplo:

2.4. Problema. Supongamos que en el ejemplo 2.1, las probabilidades dependen de la estación del año: en verano e invierno las probabilidades son las mencionadas, pero en primavera y otoño si nieva o llueve la probabilidad de que el día siguiente sea bueno es ahora $1/8$ (y la de continuar con el mismo clima sigue siendo $1/2$).

a) Ver que ahora no se forma una cadena de Markov con tres estados (b, n, ℓ): ¿qué falla?

b) ¿Podrían considerarse más estados, de modo de que sí sea una cadena de Markov? ✄

A veces se trata de una cadena de Markov «disfrazada»:

2.5. Problema. Consideramos dos estados, cara y ceca, y tiramos una moneda repetidas veces saliendo cara o ceca con probabilidad $1/2$ cada una.

a) Ver que se trata de una cadena de Markov definiendo estados apropiados, y construir la matriz de transición correspondiente.

b) ¿Y si las probabilidades de que salga cara es $1/3$ y de que salga ceca es $2/3$? ✄

2.6. Problema (Modelo de urnas de Polya).] Una urna contiene b bolas blancas y r bolas rojas, y se saca una al azar. Se la reemplaza y se agregan c bolas del mismo color que la elegida, y seguimos repitiendo el procedimiento (ahora hay $b + r + c$ bolas en la urna).

Si consideramos como estados a que salga una bola blanca o una roja, ¿se forma una cadena de Markov?, ¿por qué?

Nota: Este ejemplo, tomado de [Fel57, pág.120], puede considerarse como un modelo de dispersión de enfermedades contagiosas, donde cada ocurrencia de la enfermedad aumenta la probabilidad de que vuelva a ocurrir. ✄

2.7. Problema (Teoría de Mendel). En 1866 el monje agustino Gregor Mendel publicó sus estudios sobre cierta variedad de arvejas que tiene las vainas de color verde o amarillo. A veces, todo un grupo de estas plantas es puramente verde, o a veces todo un grupo es puramente amarillo. Cuando se cruzan plantas que son puramente verdes entre sí, las nuevas plantas siguen teniendo vainas verdes, y de modo similar para las puramente amarillas.

Mendel descubrió que cuando se cruzaban plantas de grupos «puros» distintos, las nuevas plantas siempre tenían vainas verdes. Pero si dos de estas nuevas plantas se cruzaban entre sí, aproximadamente 3 de cada 4 tenían vainas de color verde y la restante de color amarillo.

Estos experimentos llevaron a Mendel a construir la teoría de que un rasgo tal como el color de la vaina está determinado por dos «genes», cada uno de los cuales puede ser de carácter *dominante* o *recesivo*. En el caso de las arvejas, los genes que determinan el color verde de la vaina son dominantes, y los correspondientes al color amarillo son recesivos, y —según la teoría— cuando de dos genes hay uno dominante, el color queda determinado por éste, mientras que sólo puede tener color amarillo si ambos genes son recesivos.

Siempre de acuerdo a la teoría, cuando dos individuos se cruzan el resultado hereda un gen de cada uno de ellos, y esta elección de gen es aleatoria.

Suponiendo que la teoría sea válida, y que la probabilidad que la elección de gen de un progenitor sea $1/2$, determinar los estados y la matriz de transición correspondiente para formar una cadena de Markov que modela la descendencia de un individuo (en cada paso el descendiente da lugar a un nuevo individuo al cruzarse con otro).

Sugerencia. Pensar en 3 estados (por ejemplo, D si tiene ambos genes dominantes, H —híbrido— si tiene un gen dominante y otro recesivo, y R si ambos genes son

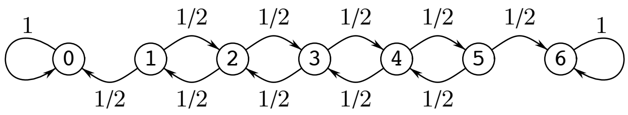

Figura 3.1: Digrafo asociado al paseo por la peatonal.

recesivos), y hacer que las entradas p_{ij} representen la probabilidad de que un individuo de tipo i sea cruzado con un individuo de tipo j. ✄

A. A. Markov (1856–1922) trazó los fundamentos de la teoría de cadenas de Markov finitas, pero por bastante tiempo las aplicaciones concretas se restringieron mayoritariamente al estudio de mezclar cartas y problemas lingüísticos. Posteriormente, A. Kolmogorof introdujo la teoría de cadenas con un número infinito de estados, y su libro de 1938 hizo más accesible la teoría y la posibilidad de una mayor cantidad de aplicaciones.

3. Usando grafos dirigidos

Una forma de entender mejor cadenas de Markov es usando *grafos dirigidos*, o *digrafos*, con *pesos*, de la forma (V, A, W) donde los nodos —los elementos de V— son los estados, un arco $a = (u, v)$ está en A si $p_{uv} > 0$, pudiendo darse el caso de *bucles* o *lazos* donde un arco empieza y termina en un mismo nodo, y se asigna a cada arco (u, v) el «peso» p_{uv}.

En el ejemplo 2.2 de la peatonal, tendríamos así $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, los arcos serían

$$\begin{aligned} A = \{&(0,0),(1,0),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),\\ &(3,4),(4,3),(4,5),(5,4),(5,6),(6,6)\}, \end{aligned}$$

que podemos representar gráficamente como en la figura 3.1, donde sobre cada arco hemos puesto la probabilidad de transición correspondiente (observar que no ponemos el arco si la probabilidad correspondiente es 0).

3.1. Problema. Hacer el digrafo correspondiente al clima en la Tierra de Oz (ejemplo 2.1). ✄

Pensar en digrafos ayuda a pensar en la estructura de la cadena de Markov. Por ejemplo, las probabilidades de transición nos dicen que, para el problema de la peatonal, si estoy en la esquina 3 en el próximo paso estoy en la esquina 2 con probabilidad 1/2, en la esquina 4 con probabilidad 1/2, y no puedo estar en ninguna otra esquina. Pero, empezando en la esquina 3, ¿cuál es la probabilidad de estar en la esquina 1 en dos pasos?, ¿en la esquina 2?, ¿en la esquina 3?

Nos ayudamos con un digrafo (o mejor dicho un árbol dirigido con raíz), como el de la figura 3.2, empezando desde el nodo 3, poniendo en distintos niveles (alturas) los lugares a los que puedo llegar según la cantidad de pasos (parecido al triángulo de Pascal).

En la figura 3.2 vemos que empezando desde 3, en un paso llego a 2 o 4, en dos pasos llego a 1, 3 o 5, y en tres pasos a 0, 2, 4 o 6. Ya sabemos colocar probabilidades para el primer paso (1/2 en cada rama). Para el segundo paso tenemos en cuenta que:

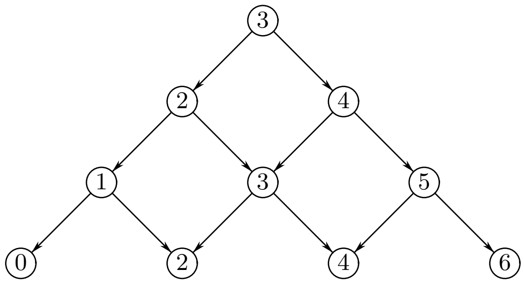

Figura 3.2: Árbol de posibilidades.

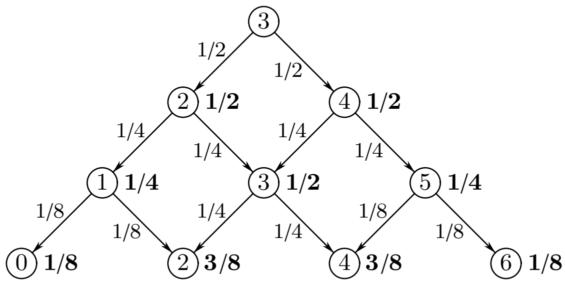

Figura 3.3: Árbol de posibilidades, con probabilidades en los arcos.

- Para llegar a 1 tengo que llegar primero a 2 (con probabilidad 1/2) y después llegar a 1 desde 2 (con probabilidad 1/2): en total llego con probabilidad 1/4.
- Para llegar a 3 pude haber pasado primero por 2 con probabilidad 1/4 para esos dos pasos (como antes), o haber pasado primero por 4, también con probabilidad 1/4. Como pude usar cualquiera de los dos caminos, sumo las probabilidades, obteniendo 1/2.

Siguiendo con este procedimiento, en cada arco de la figura ponemos la probabilidad de recorrerlo, como en la figura 3.3 (con letras más pequeñas y hacia la izquierda del arco), de modo que la suma de las probabilidades de los arcos en cada nivel debe dar 1.

Para calcular las probabilidades de llegar a un nodo en determinado nivel, sumamos las probabilidades de los arcos que llegan al nodo, que en la figura 3.3 están puestas con letras en negrita algo mayores y hacia la derecha de cada nodo. También la suma de las probabilidades sobre los nodos en cada nivel debe dar 1.

Así, para obtener la probabilidad de que empezando en 3 lleguemos a 4 en tres pasos, miramos a las probabilidades de los arcos que llegan al nodo 4 (ubicado en el tercer nivel) que son 1/8 y 1/4, las sumamos y obtenemos 3/8.

3.2. Problema. En el ejemplo 2.1 del clima en Oz, ¿cuál es la probabilidad de que si hoy es un día bueno, pasado mañana también lo sea? ✂

4. Usando matrices

Podemos repensar la idea de que estando en un estado i lleguemos en dos pasos al estado j: obviamente en el primer paso estaremos en algún estado intermedio k (que puede ser i o j) y después pasar de k a j. En cada camino multiplicamos las probabilidades, y después sumamos los caminos. Si indicamos con $p_{ij}^{(2)}$ a esta probabilidad, tendremos

$$p_{ij}^{(2)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}.$$

De esta forma fabricamos una nueva matriz, $P^{(2)}$, que reconocemos como el producto matricial de P consigo misma,

$$P^{(2)} = P \times P.$$

4.1. Problema. Ver que $P^{(2)}$ es una matriz de probabilidad. ✄

Si definimos análogamente las probabilidades de transición $p_{ij}^{(r)}$ para ir del estado i al estado j en exactamente r pasos, y formamos la matriz correspondiente, $P^{(r)}$, tenemos que

$$P^{(r)} = P^r = \underbrace{P \times P \times \ldots P}_{r \text{ veces}},$$

ya que, por ejemplo por inducción, para hacer r pasos tendremos que hacer $r-1$ pasos primero y luego otro más, i.e., $P^{(r)} = P^{(r-1)} \times P$, y si suponemos que $P^{(r-1)} = P^{r-1}$, llegamos a la ecuación anterior.

Nos va a resultar conveniente poner $P^{(0)} = P^0 = I$ —la matriz identidad— y $P^{(1)} = P$, con las correspondientes definiciones para $p^{(0)}$ y $p^{(1)}$. Así, tendremos (por definición),

$$p_{ij}^{(0)} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

4.2. Problema. Ver que P^r es una matriz de probabilidad para $r \in \mathbb{N}$. ✄

5. Clasificación de estados y cadenas

Los digrafos también nos ayudan a pensar en que sólo nos interesan cadenas de Markov en las que, olvidándose del sentido de los arcos y considerándolos como caminos de ida y vuelta, el grafo resultante sea conexo: todos los puntos se pueden conectar con caminos (no dirigidos). De otro modo consideraríamos cada «componente conexa» por separado, como ilustramos en la figura 5.1, donde trataríamos por separado a los nodos $1, 2, 3$ y $4, 5$.

Así que de ahora en más, sólo consideraremos cadenas «conexas».

Volviendo a considerar las flechas con dirección, vemos que algunos estados son *absorbentes*, es decir, una vez que llego a ellos nunca puedo salir, como las esquinas 0 y 6 en el paseo por la peatonal.

Otras veces no hay estados absorbentes, y puedo «pasear» por cada estado tantas veces como quiera, como en el ejemplo del clima en Oz. Decimos en este caso que la cadena es *ergódica*.

En fin, lo más común es que haya una mezcla, en las que algunos estados forman un *conjunto ergódico*, de modo que si llego a él no puedo salir —no hay flechas que

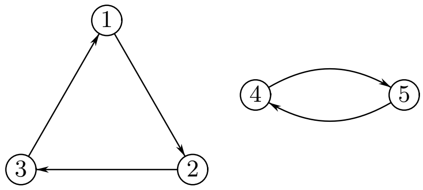

Figura 5.1: Un digrafo «no conexo». Los nodos 1, 2 y 3 forman una componente conexa, y los nodos 4 y 5 forman otra.

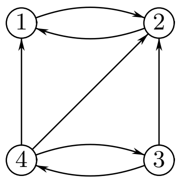

Figura 5.2: Los estados 1 y 2 forman un conjunto ergódico, 3 y 4 son estados transientes.

salgan— pero puedo seguir recorriendo indefinidamente todos los estados de este conjunto,[3] como el conjunto formado por los estados 1 y 2 en la figura 5.2.

Los estados que no están en ningún conjunto ergódico se llaman *transientes*, como los estados 3 y 4 en la figura 5.2.

Así como es conveniente considerar sólo componentes conexas, es conveniente considerar en una primera etapa sólo algunas cadenas particulares:

Cadenas absorbentes: donde hay solo estados transientes y absorbentes (los conjuntos ergódicos tienen un único estado).

Cadenas (ergódicas) regulares: en las que el total forma un conjunto ergódico y existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $p_{ij}^{(k)} > 0$ para cualquier par de estados i, j.[4]

Así, el ejemplo 2.2 de la peatonal es una cadena absorbente, pues los estados 0 y 6 son absorbentes y los restantes son transientes. Por otro lado, el ejemplo 2.1 del clima en Oz es una cadena regular, pues tomando $k = 2$ tenemos

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/8 & 3/8 \\ 3/16 & 7/16 & 3/8 \\ 3/16 & 3/8 & 7/16 \end{bmatrix},$$

que tiene sólo entradas positivas.

5.1. Problema. Clasificar las cadenas (absorbente, regular, o ninguna de las dos) de los problemas 2.3 y 2.5. ✄

(3) Así, un estado absorbente forma un conjunto ergódico.

(4) La condición $p_{ij}^{(k)} > 0$ para todo i, j implica que el conjunto de estados es ergódico.

6. Un caso particular

Antes de pasar a estudiar los resultados teóricos sobre cadenas absorbentes, será conveniente estudiar un caso particular, similar al problema 1.2, que nos ayudará a entender los argumentos teóricos.

6.1. Problema. Si en un experimento la probabilidad de obtener un resultado favorable es p, $0 < p < 1$, ¿cuántos experimentos sucesivos habrá que hacer (en promedio) hasta obtener un resultado favorable?[5] ✄

Para ejemplificar, si estamos tirando dados y el resultado favorable es que salga 1, tendremos $p = 1/6$; en cambio, si estamos tirando monedas y el resultado favorable es que salga cara, tendremos $p = 1/2$.

Como la solución al problema no es intuitiva (al menos para mí), es interesante hacer un programa para simular en la computadora. Por ejemplo, usando el programa C.1 (pág. 33), tomando $p = 0.16666$ (el caso de los dados), $m = 1$ y haciendo $n = 1000$ experimentos, hemos obtenido que el número de veces en promedio es 5.917 (los resultados varían cada vez que se corre el programa), lo cual hace sospechar que el resultado teórico debe ser 6 en este caso.

Para resolver el problema, usaremos dos técnicas que nos servirán para entender los resultados teóricos de las secciones siguientes.

Variante I : Llamando $q = 1 - p$ a la probabilidad de obtener un resultado desfavorable y como suponemos que los experimentos son independientes, la probabilidad de no haber obtenido un resultado favorable en n experimentos es

$$q_n = q^n,$$

por lo que la probabilidad de que salga *exactamente* en el paso n es el producto de las probabilidades de que no haya salido hasta $n - 1$ y salga en el paso n,

$$p_n = p\, q_{n-1} = p\, q^{n-1},$$

y la esperanza es entonces

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} n\, p_n = p \sum_{n=1}^{\infty} n\, q^{n-1}.$$

Para calcular la última suma podemos usar el siguiente truco: consideramos (para $|x| < 1$)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1-x),$$

que tiene como derivada a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = 1/(1-x)^2,$$

y por lo tanto

$$E = p\, f'(q) = p\, \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$ ✌

Podemos poner entonces:

---

[5] Suponemos que los experimentos son independientes.

6.2. Resultado. *Si en cada paso hay una probabilidad constante p de obtener un resultado favorable, el número esperado de pasos hasta obtener el primer caso favorable es $1/p$.*[(6)]

Por ejemplo, en promedio esperamos tirar 6 veces un dado hasta que aparezca el primer 1, y si tiramos monedas, esperamos tirar (en promedio) dos monedas hasta que aparezca la primer cara.

Veamos otra forma de resolver el problema:

Variante II: Si E la cantidad de pasos que espero hacer hasta llegar a un caso favorable, tengo probabilidad p de hacerlo en un solo paso, pero si fallo en ese primer paso, habré «gastado» un paso y estaré como al principio, por lo que tardaré $1 + E$ pasos.

Entonces

$$E = p + (1 - p)(1 + E) = 1 + (1 - p)E,$$

y despejando E, queda $E = 1/p$ como ya sabíamos. ✌

Más adelante veremos otras variantes (problema 8.1) y cómo usar los resultados de cadenas de Markov para su resolución.

7. Cadenas absorbentes: resultados teóricos

Recordando que en una cadena hay sólo dos tipos de estados (absorbentes y transientes), nos resultará conveniente llamar al conjunto de estados absorbentes $\mathscr{A}$ y al conjunto de estados transientes $\mathscr{T}$.

En una cadena absorbente y empezando en cualquier estado, sea transiente o absorbente, tenemos una probabilidad positiva de llegar en algún momento a un estado absorbente, ya que en otro caso se formaría un conjunto ergódico (que no es el total) con más de un punto porque hay un número finito de estados. Desde el punto de vista del digrafo asociado, esto se refleja en que desde todo estado transiente existe un camino (dirigido) hacia *algún* estado absorbente.

En otras palabras, para cada estado u existe un estado $v \in \mathscr{A}$ y un número de pasos r tales que la probabilidad de ir desde u hasta v en r pasos es positiva, o sea, $p_{uv}^{(r)} > 0$.

Como una vez que llegamos a un estado absorbente nos tenemos que quedar allí, podemos tomar un mismo r (el máximo de los anteriores) que sirva para todos los estados. Del mismo modo, tomando ahora el mínimo de las probabilidades, vemos que podemos encontrar $\alpha > 0$ tal que para todo estado u existe un estado absorbente $v \in \mathscr{T}$ tal que $p_{uv}^{(r)} \geq \alpha$.

Como estamos en un proceso de Markov, la probabilidad de que empezando desde cualquier estado *no* lleguemos a un estado absorbente en a lo más r pasos es menor o igual que $1 - \alpha$. Repitiendo el razonamiento, vemos que la probabilidad de no llegar en kr pasos ($k \in \mathbb{N}$) a un estado absorbente es menor o igual que $(1 - \alpha)^k$, pero como $1 - \alpha < 1$, esta probabilidad tiende a 0.

Podemos resumir este argumento en el siguiente:

7.1. Teorema. *En toda cadena de Markov absorbente, la probabilidad de absorción (que empezando en cualquier lugar se llegue a un estado absorbente) es* 1.

[(6)] Comparar con el análisis en el problema 9.5.

Eventualmente renumerando los estados, podemos escribir la matriz de transición asociada en *forma canónica*:

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\hspace{4em}}^{\text{absorbentes}} & \overbrace{\hspace{4em}}^{\text{transientes}} \end{array} \\
\begin{array}{r} \text{absorbentes}\,\{ \\ \text{transientes}\,\{ \end{array} & \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}
\end{array} \tag{7.2}
$$

En este caso, si hay n estados, de los cuales m son absorbentes y $n-m$ transientes, la submatriz I es la matriz identidad en $\mathbb{R}^{m\times m}$, la submatriz $0 \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$ tiene todos los coeficientes 0, y las submatrices R y Q están en $\mathbb{R}^{(n-m)\times m}$ y $\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$ respectivamente.

Puesto que comenzando desde un estado absorbente, la probabilidad de no llegar a un estado absorbente se acerca a 0 a medida que aumenta el número de pasos (por el teorema 7.1), y como las entradas de Q^k son las probabilidades de que empezando en un estado transiente después de k pasos lleguemos a otro estado transiente, tenemos:

7.3. Teorema. *En una cadena de Markov absorbente cuya matriz canónica tiene la forma de la ecuación* (7.2)*,*

a) $Q^r \to 0$ *(la matriz con todos* 0*'s) cuando* $r \to \infty$*,*

b) si I *es la matriz identidad en* $\mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}$*, entonces* $I-Q$ *es inversible y*

$$(I-Q)^{-1} = \sum_{r=0}^{\infty} Q^r.$$

La última parte del teorema anterior sigue las ideas de la demostración de que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

cuando x es un número real con $|x| < 1$, y no la hacemos, pero observamos desde ya la relación con la variante I de la pág. 9.

Claro que si tenemos un estado transiente $u \in \mathscr{T}$, en la forma canónica de la matriz P tiene asociado un índice (digamos i), pero en la matriz Q tiene asociado otro índice $(i-m)$. En lo que sigue, para no complicar las notaciones supondremos implícitamente que no tenemos esta ambigüedad y hacemos un corrimiento de índices cuando apropiado.

Poniendo

$$N = (I-Q)^{-1}, \tag{7.4}$$

a veces llamada *matriz fundamental* de la cadena absorbente, tenemos el siguiente:

7.5. Teorema. *En una cadena absorbente, si se empieza en el estado transiente* $u_i \in \mathscr{T}$*, el número esperado de veces en que la cadena está en el estado transiente* $u_j \in \mathscr{T}$ *es la entrada* ij *de la matriz fundamental* N*.*

Demostración: Pongamos

$$\delta(j,s) = \begin{cases} 1 & \text{si la cadena está en el estado } u_j \text{ en el paso } s, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

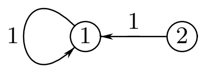

Figura 7.1: Una cadena absorbente simple.

y para cualquier x sea $E_i(x)$ el valor esperado de x si el proceso empieza en el estado u_i. Entonces si e_{ij} es la esperanza buscada,

$$e_{ij} = E_i\left(\sum_{s=0}^{\infty} \delta(j,s)\right) = \sum_{s=0}^{\infty} E_i(\delta(j,s)) = \sum_{s=0}^{\infty} \big((1-p_{ij}^{(s)})\,0 + p_{ij}^{(s)}\,1\big) = \sum_{s=0}^{\infty} p_{ij}^{(s)},$$

donde la suma empieza desde $s = 0$ pues no eliminamos la posibilidad $i = j$.

Recordando que $p_{ij}^{(s)}$ es la entrada ij-ésima de Q^s (después de un corrimiento de índices), vemos que e_{ij} es la entrada ij-ésima de $\sum_{s=0}^{\infty} Q^s$, que es N por el teorema 7.3. ✌

En el teorema no excluimos la condición $i = j$, lo cual trae algunos problemas de interpretación. Tomemos por ejemplo la cadena absorbente de la figura 7.1 donde hay dos estados. El estado 1 es absorbente, mientras que el estado 2 es transiente pero la probabilidad de pasar al estado 1 en un paso es 1. La matriz Q en este caso se reduce a $Q = [0]$, de modo que $N = (I - Q)^{-1} = [1]$. Es decir, *seguro* que empezando desde 2 en un paso llegamos al estado 1, así que esperamos llegar a 1 en un paso y permanecer 0 pasos en el estado 2. Esta aparente contradicción resulta de haber considerado el término $s = 0$ en la demostración del teorema, y como $p_{ii}^{(0)} = 1$, el paso 0 *siempre* se cuenta en el teorema.

Tomando las precauciones debidas, tenemos entonces el siguiente corolario que usaremos con frecuencia en las aplicaciones:

7.6. Corolario. *El número esperado de pasos hasta la absorción (sin contar el paso* 0*), dado que el proceso comienza en el estado no-absorbente u_i es la suma de las entradas de la fila i-ésima de N.*

Veamos un último resultado antes de pasar a las aplicaciones.

7.7. Teorema. *Consideremos una cadena absorbente, con matriz canónica en la forma de la ecuación* (7.2)*. Sea b_{ij} la probabilidad de que empezando en el estado transiente u_i se termine en el estado absorbente u_j, y formemos la matriz $B \in \mathbb{R}^{(n-m)\times m}$ con estos coeficientes.*

Entonces

$$B = NR,$$

donde R es como en la ecuación (7.2) *y N es la matriz fundamental de la ecuación* (7.4)*.*

Demostración: Buscamos una relación de recurrencia para los coeficientes b_{ij}. Si empezamos en el estado u_i, en el próximo paso podemos ir al estado absorbente u_j con probabilidad p_{ij}, o a otro estado absorbente u_k, $k \neq j$, con probabilidad p_{ik}, o ir a otro estado transiente u_ℓ con probabilidad $p_{i\ell}$. La probabilidad de que estando en estos estados, u_j, u_k o u_ℓ, terminemos en el estado absorbente u_j es, respectivamente, 1, 0 y $b_{\ell j}$, de modo que

$$b_{ij} = p_{ij} + \sum_{\ell \,:\, u_\ell \in \mathscr{T}} p_{i\ell}\, b_{\ell j}.$$

Como u_i es transiente y u_j absorbente, p_{ij} es la entrada correspondiente de la matriz R (con algún eventual desplazamiento de índices). De modo similar, $p_{i\ell}$ es la entrada $i\ell$ de la matriz Q, y $b_{\ell j}$ es la entrada de la matriz B. Podemos escribir entonces la ecuación anterior en forma matricial como

$$B = R + QB \qquad \text{o} \qquad (I - Q)B = R,$$

de donde sigue el resultado pues $I - Q$ es inversible con inversa N. ✌

Vale la pena observar que la técnica usada en la demostración es esencialmente la usada en la variante II de la pág. 10.

7.8. Problema. Juntando los teoremas 7.1 y 7.7, para todo estado transiente u_i debe ser

$$\sum_{j \in \mathscr{A}} b_{ij} = 1.$$

Sin usar estos resultados, verificar directamente a partir de las definiciones que las sumas de las filas de NR es siempre 1.[7] ✄

8. Problemas de dados y monedas

Pasemos ahora a estudiar problemas sobre los que seguramente habremos oído, y que pueden mirarse como cadenas de Markov absorbentes. Muchas veces se simulan en la computadora y son de la forma «repetir hasta que. . . »:

8.1. Problema (m consecutivos). ¿cuántas veces habrá que tirar un dado (en promedio) hasta que salga un 1?, ¿hasta que salgan m 1's consecutivos? ✄

8.2. Problema (Hasta que la suma supere). dado un número $m \in \mathbb{N}$, ¿cuántas veces habrá que tirar un dado (en promedio) hasta que la suma de los resultados que se obtienen sea mayor o igual a m? ✄

8.3. Problema. Una variante del anterior es sacar números aleatorios entre 0 y 1 (uniformemente distribuidos) hasta que la suma sea 1 o más: ¿cuántos números (en promedio) habrá que sacar? ✄

En vez de considerar consecutivos, podemos pensar en repetir el experimento hasta el segundo caso favorable:

8.4. Problema (Problema del cumpleaños). Supongamos que todos los años tienen 365 días, y que es igualmente probable nacer en cualquier día del año.

Si van entrando personas a una sala, ¿cuántas (en promedio) entrarán hasta que haya dos con el mismo día de cumpleaños? ✄

8.5. Problema. Otro caso interesante es el de movimiento browniano o paseo al azar en una dimensión,[8] como el paseo en la peatonal que hemos puesto en el ejemplo 2.2: ¿cuántos pasos daremos (en promedio) hasta terminar? ✄

En fin, podemos agregar el ya mencionado problema 1.1, y un problema aparecido recientemente en la Revista de Educación Matemática [REM02], entre los *Problemas para resolver*:

[7] Una posibilidad se da en el apéndice A.1

[8] En estas notas miramos a una dimensión, pero el estudio se hace para cualquier número de dimensiones.

8.6. Problema.

a) Dos jugadores, A y B, juegan el siguiente juego: tiran una moneda hasta que salgan dos caras seguidas, en cuyo caso A gana, o bien hasta que salga una cara seguida de una cruz, en cuyo caso gana B. Probar que ambos tienen iguales oportunidades de ganar.

b) Ahora deciden jugar el mismo juego, pero de la siguiente forma: A tira una moneda hasta que salgan dos caras seguidas, y anota cuántas tiradas necesitó. Luego, B tira una moneda hasta que salga una cara seguida de una cruz, y anota cuántas tiradas necesitó. Comparan los dos números, y el que tiene el número más bajo gana. Probar que en esta versión, B tiene ventaja sobre A.

c) Explicar la aparente contradicción entre la parte *a*) y la *b*).

Un nuevo jugador, C, entra en el juego. Él ganará si sale una cruz seguida de una cara.

d) Observar que si juegan la versión del juego en *b*), el jugador C tiene las mismas posibilidades que B, y por lo tanto tiene ventaja sobre A.

e) Suponer en cambio que juegan la versión *a*). Si C y B juegan solos, probar que ambos tienen las mismas oportunidades de ganar. En cambio si C y A juegan solos, probar que C tiene muchas más oportunidades de ganar que A.

f) Explicar la aparente contradicción entre los puntos *e*) y *a*).

g) Si A, B y C juegan los tres juntos la versión de *a*), probar que A y B cada uno ganará un juego de cada 4 y C uno de cada 2. ✄

La mayoría de estos problemas son suficientemente sencillos como para resolverlos sin apelar a la teoría de cadenas de Markov, como ya hemos visto en la sección 6, pero por el momento nos interesa pensar estos procesos como cadenas de Markov.

Repasando lo que vimos en las secciones anteriores, miremos a las matrices de transición para estos problemas. Para ello suponemos que cuando tiramos un dado una tirada resulta favorable si sale 6 (o lo que sea) con probabilidad p, y es desfavorable con probabilidad $q = 1 - p$.

En el problema 8.1 de obtener m consecutivos, consideramos un contador que inicialmente está en 0 y se incrementa en 1 cuando hay un resultado favorable y vuelve a 0 cuando el resultado es desfavorable. Los estados son los valores posibles del contador, $0, 1, \dots, m$, y las probabilidades de transición son:

$$\begin{aligned} p_{k,k+1} &= p && \text{si } 0 \le k < m, \\ p_{k,0} &= q && \text{para } k = 0, 1, \dots, m-1, \\ p_{m,m} &= 1, && \\ p_{i,j} &= 0 && \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

En el problema 8.2 donde continuamos hasta que la suma supere un valor prefijado m, consideramos la suma s que inicialmente está en 0 y se va incrementando a medida que se tiran los dados. Los estados son los valores que puede tomar s, $0, 1, \dots, m$, donde en el estado m ponemos la condición $s \ge m$.

Las probabilidades de transición son (en el caso de los dados):

$$\begin{aligned} p_{k,k+i} &= p && \text{para } i = 1, 2, \dots, 6,\ k = 0, 1, \dots, \text{ si } k + i < m, \\ p_{k,m} &= (k - m + 7)p && \text{para } k = m - 6, m - 5, \dots, m - 1, \\ p_{m,m} &= 1, \\ p_{i,j} &= 0 && \text{en cualquier otro caso.} \end{aligned}$$

Finalmente, en el problema 8.3 donde los números obtenidos en cada paso están entre 0 y 1, consideramos una división en n del intervalo $(0, 1]$, suponemos que los «dados» a salir son $1/n, 2/n, \dots, 1$ con probabilidad $p = 1/n$ cada uno, y numeramos los estados $0, 1, \dots, n-1, n$, correspondientes a que la suma sea $0, 1/n, 2/n, \dots, 1 - 1/n$ o mayor o igual a 1. O sea, es una variante del caso anterior, con $m = n$, y donde

$$p_{k,j} = \begin{cases} p = 1/n & \text{para } 0 \le k < j \le n, \\ 1 & \text{para } k = j = n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En el apéndice C bosquejamos algunos programas en Pascal para los problemas 8.1 (en C.1), 8.2 (en C.2), 8.3 (en C.3), 8.4 (en C.4) y 8.5 (en C.5). Aunque el lector no sepa programar, recomendamos echar ahora una mirada para la estrecha relación entre los «algoritmos» y los planteos que acabamos de hacer.

8.1. El problema de repetir hasta obtener m consecutivos

8.1.1. Análisis directo

En el problema 8.1, en cada paso tenemos una probabilidad constante p de tener un resultado favorable (por ejemplo, cara o un 6), una probabilidad $q = 1 - p$ de obtener un resultado negativo, y queremos obtener m casos favorables consecutivos.

Ya hemos visto (resultado 6.2) el caso $m = 1$, obteniendo que, por ejemplo en el caso de los dados, en promedio esperamos tirar 6 veces un dado hasta que aparezca el primer 1.

Pasando al caso $m = 2$, podemos tratar de repetir el razonamiento de la variante II (pág. 10). Llamando a a un resultado favorable y b a uno negativo, en el primer paso no puedo terminar, pero obtengo a con probabilidad p o b con probabilidad $q = 1 - p$. Suponiendo que saque a y luego otra vez a, habré llegado en dos pasos, pero si en la segunda tirada saco b tengo que empezar de nuevo, habiendo «gastado» dos pasos. Si la primera vez saco b, entonces hay que empezar de nuevo, habiendo «gastado» un paso. En total tenemos

$$E = p^2\, 2 + pq\,(2 + E) + q\,(1 + E).$$

Despejando E, obtenemos

$$\boxed{E = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}.} \tag{8.7}$$

No es difícil intuir cuál será el caso general: tendremos una probabilidad p^m de obtener resultados favorables en las primeras m tiradas, o podría suceder que obtuve resultados favorables en las primeras $m-1$ pero desfavorable en la siguiente de modo que tengo que volver a empezar y espero tardar ahora $m+E$, o podría ser que las $m-2$ primeras fueron favorables y falló la tirada $m-1$ y entonces tengo que volver a empezar esperando tardar $m-1+E$, o...

Podemos poner entonces

$$\begin{aligned} E &= p^m m + p^{m-1} q\,(m+E) + p^{m-2} q\,(m-1+E) + \cdots + q\,(1+E) = \\ &= m\,p^m + q\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)\,p^i + qE\sum_{i=0}^{m-1} p^i. \end{aligned}$$

Para continuar debemos evaluar las sumas «internas». Es sencillo calcular la segunda,

$$\sum_{i=0}^{m-1} p^i = \frac{1-p^m}{1-p} = \frac{1-p^m}{q}.$$

Para la primera podemos usar el truco de la función f y su derivada que vimos en la Variante I (pág. 9), obteniendo

$$\sum_{i=0}^{m-1}(i+1)\,p^i = \frac{mp^{m+1}-(m+1)p^m+1}{q^2},$$

de modo que llegamos a

$$E = m\,p^m + \frac{mp^{m+1}-(m+1)\,p^m+1}{q} + (1-p^m)\,E.$$

Despejando E llegamos al resultado general:

8.8. Resultado. *Si en cada paso hay una probabilidad constante p de obtener un resultado favorable, el número esperado de pasos hasta obtener m resultados favorables consecutivos es*

$$E = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^m} = \frac{(1/p)^m - 1}{q}.$$

8.1.2. Con cadenas de Markov

Tratemos ahora de mirar el problema desde el punto de vista de cadenas de Markov, y usar los resultados que obtuvimos. Recordando que tomamos como estados a $0, 1, \ldots, m$, en el problema 8.1 la matriz Q es

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-2 \\ m-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & m-2 & m-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} q & p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ q & 0 & 0 & \ldots & 0 & p \\ q & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array},$$

y la matriz $I-Q$ es

$$\begin{bmatrix} p & -p & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -q & 1 & -p & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -q & 0 & 0 & \ldots & 1 & -p \\ -q & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos encontrar la primer fila de la matriz N correspondiente —que es lo que necesitamos según el corolario 7.6— resolviendo el sistema

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}) \cdot (I - Q) = (1, 0, \dots, 0),$$

que tiene por solución

$$a_i = \frac{1}{p^{m-i}} \qquad \text{para } i = 0, 1, \dots, m-1. \tag{8.9}$$

8.10. Problema. Verificar que efectivamente se obtiene la solución.[9]

No es difícil ver ahora que volvemos a obtener el resultado 8.8:

$$E = a_0 + a_1 + \dots + a_{m-2} + a_{m-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots + \frac{1}{p^m}.$$

8.2. El problema de repetir hasta superar una suma prefijada

En el problema 8.2, por ejemplo para los dados, la matriz Q es

$$
\begin{array}{cc}
 & \qquad \overbrace{\hphantom{p \quad p \quad \dots \quad p}}^{\text{seis } p} \\
\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ m-2 \\ m-1 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & p & p & \dots & p & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & p & \dots & p & p & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & & & \dots & & & 0 & p \\
0 & & & \dots & & & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

donde las filas tienen seis p consecutivos (excepto en las últimas) que se van corriendo hacia la derecha a medida que descendemos.

La matriz $I - Q$ es

$$
\begin{bmatrix}
1 & -p & -p & \dots & -p & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & -p & \dots & -p & -p & \dots & 0 \\
\vdots & & & & & & & \\
0 & & & \dots & & & 1 & -p \\
0 & & & \dots & & & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

pero la matriz N o su primer fila, no tiene una forma explícita sencilla en general.[10]

Un caso particular sencillo es $m = 7$. En este caso toda la parte triangular superior de Q tiene p's, la primer fila de $N = (I - Q)^{-1}$ es

$$(1, p, p\,(1+p), p\,(1+p)^2, \dots, p\,(1+p)^5),$$

y la esperanza es

$$1 + p\big((1+p) + (1+p)^2 + \dots + (1+p)^5\big) =$$
$$= 1 + p\,\frac{(1+p)^6 - 1}{p} = (1+p)^6 = (1 + 1/6)^6.$$

(9) Una solución posible está en el apéndice A.2

(10) Pero resolver el sistema numéricamente es sencillo por ser $I - Q$ triangular.

Es decir, en promedio habrá que hacer aproximadamente 2.52163 tiradas hasta sumar 6 o más.

Si en vez de un dado con 6 valores tomamos un «dado» con n caras, y luego hacemos crecer n, llegamos al problema 8.3 que pasamos a considerar.

8.3. Sumar números entre 0 y 1 hasta llegar a 1

Recordando lo ya dicho sobre el problema 8.3 (pág. 15), hacemos una discretización dividiendo el intervalo $(0,1]$ en n partes iguales y ponemos $p = 1/n$. Entonces la matriz Q tiene la forma

$$\begin{array}{c} {\scriptstyle 0} \\ {\scriptstyle 1} \\ \vdots \\ {\scriptstyle n-2} \\ {\scriptstyle n-1} \end{array} \begin{bmatrix} 0 & p & p & \dots & p & p \\ 0 & 0 & p & \dots & p & p \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & & 0 & p \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{bmatrix},$$

la matriz $I - Q$ tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -p & -p & \dots & -p & -p \\ 0 & 1 & -p & \dots & -p & -p \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & & 1 & -p \\ 0 & & \dots & & & 1 \end{bmatrix},$$

y la matriz N tiene la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & p & p(1+p) & p(1+p)^2 & \dots & p(1+p)^{n-2} \\ 0 & 1 & p & p(1+p) & \dots & p(1+p)^{n-3} \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & p \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8.11}$$

8.12. Problema. Verificar que efectivamente $N(I - Q) = I$.[11]

Entonces, la esperanza buscada es la suma de la primer fila de N (corolario 7.6):

$$1 + p\sum_{i=0}^{n-2}(1+p)^i = 1 + p\,\frac{(1+p)^{n-1} - 1}{(1+p) - 1} = (1+p)^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

El lector recordará que estamos frente a uno de los «límites notables»: cuando $n \to \infty$, i.e., en el caso continuo, la esperanza es $e \approx 2.718$.

8.13. Resultado. *Si vamos sacando aleatoriamente (y uniformemente) números entre* 0 *y* 1 *hasta que su suma supere* 1*, en promedio habrá que sacar e números.*

8.14. Problema. Con una tabla de números aleatorios, o con una computadora, hacer experimentos numéricos para ver esta forma de aproximar e.[12]

(11) Algunas soluciones posibles se muestran en el apéndice A.3

(12) Ver el programa C.3.

8.4. El problema del cumpleaños

8.4.1. Análisis Directo

Recordemos que en este problema estamos suponiendo que todos los años tienen 365 días, y que es igualmente probable nacer en cualquier día del año. Podemos pensar que tenemos un dado con 365 caras, y es razonable pensar que el problema admite un análisis directo como los que hicimos en las secciones anteriores, sin apelar a la potencia de la teoría de cadenas de Markov.

Nuestra primera preocupación para estudiar el problema es calcular la probabilidad de que haya n personas, todas con distinto día de cumpleaños.

Considerando casos favorables sobre casos posibles, si hay $n-1$ personas, todas con distinto día de cumpleaños, y entra la persona n-ésima, la probabilidad de que ésta no tenga el mismo día de cumpleaños que alguna de las ya presentes es

$$\frac{365-(n-1)}{365}.$$

Por lo tanto, la probabilidad de que entre n personas no haya dos con el mismo cumpleaños es

$$\begin{aligned}
q_n &= \frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\cdots\frac{365-(n-2)}{365}\,\frac{365-(n-1)}{365} = \\
&= \frac{1}{365^{n-1}}\prod_{k=366-n}^{364} k = \frac{1}{365^{n}}\prod_{k=366-n}^{365} k = \\
&= \frac{1}{365^{n+1}}\prod_{k=366-n}^{366} k.
\end{aligned}$$

Observar que por el principio del palomar, $q_n = 0$ para $n = 366$, lo que se refleja en la última forma (pero no mucho en otras).

Del mismo modo, la probabilidad de que recién al entrar la n-ésima haya dos con el mismo cumpleaños es

$$p_n = \frac{n-1}{365}\,q_{n-1},$$

con $p_{367} = 0$ pero $p_{366} > 0$, siendo $p_1 = 0$.

Por lo tanto la esperanza es

$$\begin{aligned}
E &= \sum_{n=1}^{366} n\,p_n = \sum_{n=2}^{366} n(n-1)\frac{1}{365^n}\Big(\prod_{k=367-n}^{365} k\Big) = \\
&= \sum_{i=1}^{365} \frac{i(i+1)\cdots 365}{365^{367-i}}(367-i)(366-i) = \\
&= \frac{365!}{365^{366}}\sum_{i=1}^{365}\frac{365^{i-1}}{(i-1)!}(367-i)(366-i) = \\
&= \frac{365!}{365^{366}}\sum_{i=0}^{364}\frac{365^{i}}{i!}(367-i)(366-i).
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Haciendo los cálculos —tal vez con un buen software— se puede ver que

$$E \approx 24.6166,$$

es decir, en promedio debemos esperar que entren un poco menos de 25 personas hasta tener dos con el mismo cumpleaños. Dado el tamaño de las clases en nuestras escuelas, es fácil realizar la siguiente actividad:

8.16. Problema. Considerando la mayor cantidad de grados posibles en la escuela, hacer una estadística sobre la cantidad de alumnos por aula y si en cada una de ellas hay dos o más alumnos con el mismo día de cumpleaños. ✄

Volviendo a la esperanza, también tenemos el milagro de que

$$\sum_{n=1}^{366} p_n = \sum_{i=1}^{365} \frac{i\,(i+1)\cdots 365}{365^{367-i}}\,(366-i) = 1,$$

y en general, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n!}{n^{n+1}} \sum_{i=0}^{n-1} (n-i)\,\frac{n^i}{i!} = 1. \tag{8.17}$$

En el apéndice B tratamos éstas y otras fórmulas relacionadas.

8.4.2. Como cadena de Markov

Pasando a cadenas de Markov, la primer pregunta es qué estados considerar. Como las probabilidades de transición dependen de la cantidad de días de cumpleaños ya aparecidos, después de pensar un poco vemos que podríamos considerar 366 estados transientes, representando la cantidad de días de cumpleaños ya aparecidos (de 0 a 365) y un estado absorbente que por comodidad llamamos *final*, al que llegamos cuando hay dos personas con el mismo cumpleaños.

Usando la notación p^* —para no confundir con las del análisis hecho en la sección anterior— en este caso las probabilidades de transición son:

$$\begin{aligned}
p^*_{i,i+1} &= \frac{365-i}{365}, && \text{para } i = 0,1,\dots,364,\\
p^*_{i,\mathit{final}} &= 1 - p^*_{i,i+1} = \frac{i}{365} && \text{para } i = 0,1,\dots,365,\\
p^*_{\mathit{final},\mathit{final}} &= 1,\\
p^*_{i,j} &= 0 && \text{en otro caso.}
\end{aligned}$$

La matriz Q es de la forma

$$\begin{array}{c} 0\\ 1\\ 2\\ \vdots\\ 364\\ 365 \end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 364/365 & 0 & \dots & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 363/365 & \dots & 0 & 0\\
\vdots & & & & & & \\
0 & & & \dots & & 0 & 1/365\\
0 & & & \dots & & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

y la matriz $I-Q$ es de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -364/365 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -363/365 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & & \dots & & 1 & -1/365 \\ 0 & 0 & & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si $(a_0, a_1, \dots, a_{365})$ es la primer fila de la matriz N, debe ser

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -364/365 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -363/365 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & \dots & -1/365 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{364} \\ a_{365} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de modo que $a_0 = 1$ y

$$a_i = \frac{366-i}{365}\, a_{i-1} \qquad \text{para } i = 1, \cdots, 365,$$

o, en forma explícita,

$$a_i = \frac{(366-1)\cdots(366-i)}{365^i} \qquad \text{para } i = 1, 2, \cdots, 365.$$

Por lo tanto, la esperanza es

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^{365} \frac{(366-1)\cdots(366-i)}{365^i} &= 1 + \sum_{k=1}^{365} \frac{k(k+1)\cdots 365}{365^{366-k}} = \\ &= \frac{365!}{365^{365}} \sum_{k=0}^{365} \frac{365^k}{k!}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

Otra vez milagrosamente, esta esperanza coincide con la encontrada en (8.15) mediante el análisis directo. En el apéndice B estudiamos estas fórmulas, mientras que en el problema 9.5 vemos cómo interpretar el problema del cumpleaños como cadena regular, haciendo una comparación con los resultados recientemente obtenidos.

8.5. Movimiento Browniano en una dimensión

En el problema de paseo al azar comienza a manifestarse la potencia de la teoría de cadenas de Markov. Aunque ciertamente podemos pensar que el problema está relacionado con monedas (o dados), el tipo de preguntas que nos hacemos es algo diferente.

Supongamos que estamos en el eje x y la posición inicial es $x = 0$, y vamos hacia derecha con probabilidad p y hacia la izquierda con probabilidad $q = 1 - p$, nuestra posición después de k pasos será $\sum_{k=1}^{n} a_k$, donde $a_k = \pm 1$ dependiendo de si fuimos hacia la derecha o hacia la izquierda, de modo que vemos la relación con el problema de la suma que vimos en la sección 8.2. Sin embargo ahora tenemos dos estados absorbentes.

Para fijar ideas, pensemos que sólo hacemos n movimientos (pasos) y tenemos «barreras absorbentes» en $-n-1$ y en $n+1$. Entonces podemos poner

$$P = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & & & \dots & & q & 0 & p \\ 0 & & & \dots & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \scriptstyle -n-1 \\ \scriptstyle -n \\ \scriptstyle -n+1 \\ \scriptstyle -n+2 \\ \vdots \\ \scriptstyle n \\ \scriptstyle n+1 \end{array}$$

Nos preguntamos: después de n pasos, ¿dónde esperamos estar?

La respuesta es

$$E = \sum_{j=-\infty}^{\infty} j\, p_{0j}^{(n)},$$

donde $p_{ij}^{(n)}$ son las entradas de la matriz P^n.

En el caso sencillo $p = q = 1/2$, la matriz es simétrica en el sentido que $p_{i,j} = p_{-i,-j}$, y esta propiedad se conserva para las potencias,

$$p_{-i,-j}^{(n+1)} = \sum_{\ell} p_{-i,\ell}\, p_{\ell,-j}^{(n)} = \sum_{\ell} p_{i,-\ell}\, p_{-\ell,j}^{(n)} = \sum_{\ell} p_{i,\ell}\, p_{\ell,j}^{(n)} = p_{i,j}^{(n+1)}.$$

En particular, $p_{0j}^{(n)} = p_{0,-j}^{(n)}$, de modo que:

8.19. Resultado. *Si $p = q = 1/2$ y empezando en 0, cualquiera sea n después de n pasos esperamos estar en $x = 0$, o sea*

$$E = 0.$$

Este resultado también puede verse de forma intuitiva: hay tanta probabilidad de hacer un camino $(x_0 = 0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ como de hacer el camino $(x_0 = 0, -x_1, \dots, -x_n)$, y el promedio de estos caminos es 0.

En el caso $p = 1/2$, la matriz $I - Q$ es

$$\begin{array}{c} \scriptstyle -n \\ \scriptstyle -n+1 \\ \scriptstyle -n+2 \\ \vdots \\ \scriptstyle n-1 \\ \scriptstyle n \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & \dots & & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & & \dots & & 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \tag{8.20}$$

y es interesante ver que la primer fila $(i = -n)$ de N es de la forma

$$b\,(2n+1, 2n, 2n-1, \dots, 3, 2, 1),$$

donde $b = 1/(n+1)$ (por la simetría, la última fila es $b(1,2,3,\dots))$, y la fila del medio ($i=0$) de N es

$$(1,2,3,\dots,n,n+1,n,\dots,3,2,1).$$

Esto puede verse usando que

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}(u-v)+u-\frac{1}{2}(u+v)&=0 &&\text{para cualquier } u \text{ y } v,\\
c\left(-\frac{1}{2}2+1\right)&=0 &&\text{cuando } i=-n \text{ o } i=0 \text{ y cualquier } c,\\
b\left((2n+1)-\frac{1}{2}(2n)\right)&=1 &&\text{cuando } i=-n,\\
-\frac{1}{2}(a-1)+a-\frac{1}{2}(a-1)&=1 &&\text{cuando } i=0 \text{ y para cualquier } a.
\end{aligned}$$

8.21. Resultado. *Si $p = 1/2$, para un n dado y empezando desde* 0*,*

a) *la esperanza es* 0*,*

b) *usando el teorema 7.5, el número de veces que visito a un j dado, antes de llegar a $-n-1$ o $n+1$, es $= n+1-|j|$,*

c) *espero hacer*

$$2(1+2+\dots+n)+n+1 = n(n+1)+n+1 = (n+1)^2$$

pasos entre $-n$ y n hasta llegar a algún extremo ($n+1$ o $-n-1$).

Este resultado implica que para el ejemplo 2.2 de la peatonal con 6 cuadras, si empezamos en la esquina 3 entonces podemos ir $n = 2$ cuadras hacia cada lado sin salir, y esperamos hacer $(n+1)^2 = 9$ cuadras antes de terminar el paseo (al llegar a la esquina 0 o la 6).

Observamos finalmente que la matriz de la ecuación (8.20) puede resultar familiar para quienes hayan visto cálculo numérico, pues se trata de la matriz que resulta al discretizar la ecuación diferencial

$$-u'' = f,$$

en intervalos de igual longitud.

El movimiento browniano, en efecto, está relacionado con los procesos de difusión en los que aparecen las ecuaciones armónicas y la ecuación del calor en más dimensiones. La matriz N es entonces una discretización de la función de Green (asociada al problema de Dirichlet): una función armónica (lineal en una dimensión) excepto en el «polo», como muestran las ecuaciones explícitas para las filas primera y del medio que pusimos.

También es posible estudiar variantes del movimiento browniano que son cadenas regulares, como veremos en el problema 9.3 en la próxima sección.

9. Cadenas regulares

Pasemos ahora a ver algunos resultados de otras cadenas «simples» como son las cadenas ergódicas regulares. Recordemos que estas cadenas están caracterizadas porque existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $P^k = P^{(k)}$ tiene todas sus entradas positivas.

El primer resultado fundamental es que en el límite cuando $n \to \infty$, P^n converge a una matriz, y que esta matriz límite tiene todas sus filas constantes:

9.1. Teorema. *Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de transición de una cadena de Markov regular, entonces existe una matriz $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y un vector $w \in \mathbb{R}^n$ tales que*

a) *las entradas de w son positivas y $\sum_i w_i = 1$,*
b) *las filas de W son todas iguales a w,*
c) *w es la única solución de $wP = w$ con $\sum_i w_i = 1$,*[13]
d) $\lim_{s\to\infty} P^s = W$,
e) $WP = PW = W$.

Observemos que siempre el vector $v = (1, 1, \dots, 1)$ es un autovector para cualquier matriz de probabilidad, pues si $x = Pv$,

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, 1 = 1,$$

de modo que $Pv = v$, y la novedad del teorema es considerar un autovector (con autovalor 1) a izquierda, o lo que es lo mismo, un autovector (usual) de la transpuesta de P, P^{T}.

Daremos una idea de la demostración del teorema más adelante; en cambio, tratemos ahora de ver el teorema en acción.

Recordando el ejemplo 2.1, la matriz de transición es P

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Si el vector w tiene coordenadas (w_1, w_2, w_3), debe satisfacer las ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc} & & \frac{1}{4}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3 & = & w_1 \\ \frac{1}{2}w_1 & + & \frac{1}{2}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3 & = & w_2 \\ \frac{1}{2}w_1 & + & \frac{1}{4}w_2 & + & \frac{1}{2}w_3 & = & w_3 \end{array}$$

o, en forma homogénea,

$$\begin{array}{ccccccc} -w_1 & + & \frac{1}{4}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3 & = & 0 \\ \frac{1}{2}w_1 & - & \frac{1}{2}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3 & = & 0 \\ \frac{1}{2}w_1 & + & \frac{1}{4}w_2 & - & \frac{1}{2}w_3 & = & 0 \end{array}$$

Estas ecuaciones no son independientes, pues w es un autovector de P^{T}, de modo que no hay solución única. En nuestro ejemplo, la primer fila es la suma de las otras dos cambiadas de signo. Sin embargo, el teorema nos asegura que agregando la condición $\sum_i w_i = 1$, obtendremos solución única.

Eliminando la tercer ecuación (o cualquier otra) y agregando la condición de suma 1 llegamos a

$$\begin{array}{ccccccc} -w_1 & + & \frac{1}{4}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3 & = & 0 \\ \frac{1}{2}w_1 & - & \frac{1}{2}w_2 & + & \frac{1}{4}w_3 & = & 0 \\ w_1 & + & w_2 & + & w_3 & = & 1 \end{array}$$

[13] O sea w es un autovector a izquierda de P con autovalor 1, y la multiplicidad de este autovalor es 1.

que tiene por solución a $(1/5, 2/5, 2/5)$.

Unas pocas iteraciones (usando software o calculadora adecuados), muestran que en este caso la convergencia de P^k a W es rápida:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.375 & 0.375 \\ 0.1875 & 0.4375 & 0.375 \\ 0.1875 & 0.375 & 0.4375 \end{bmatrix},$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.1875 & 0.40625 & 0.40625 \\ 0.203125 & 0.40625 & 0.390625 \\ 0.203125 & 0.390625 & 0.40625 \end{bmatrix},$$

$$P^6 = \begin{bmatrix} 0.200195 & 0.399902 & 0.399902 \\ 0.199951 & 0.400146 & 0.399902 \\ 0.199951 & 0.399902 & 0.400146 \end{bmatrix}.$$

Así, vemos que en el caso del clima de Oz, «a la larga» habrá 1 de cada 5 días de tiempo bueno, 2 de cada 5 serán lluviosos y en 2 de cada 5 nevará.

El teorema 9.1 nos dice que en las cadenas regulares siempre tendremos comportamientos similares. El proceso después de un número grande de iteraciones se asemeja a un «dado» con n caras, en el que cada estado (cara del «dado») tiene probabilidad w_i de aparecer. De «yapa», el teorema nos da una forma de calcular el vector w sin necesidad de hacer iteraciones (aunque la convergencia es bastante rápida en todo caso).

9.2. Problema. En el pueblo hay dos supermercados, Mejor Valor y LucSil, cuyos clientes son bastante leales, pero cada semana 10 % de los clientes de Mejor Valor cambian por LucSil, y 20 % de los clientes de LucSil cambian por Mejor Valor. Una compañía de marketing elige al azar un residente local y le pregunta (al mismo residente) cada semana en que super compró.

a) Ver que se trata de una cadena de Markov y encontrar la matriz de transición.

b) Ver que la cadena es ergódica regular y encontrar el vector w mencionado en el teorema 9.1.

c) Si en el pueblo están sólo estos dos supermercados, de acá a unos años ¿qué cantidad de clientes tendrá aproximadamente cada supermercado (en términos de porcentaje de la población)? ✄

9.3. Problema. Consideremos la siguiente variante del paseo por la peatonal (ejemplo 2.2) pero ahora con 4 cuadras[14] donde usamos las siguientes reglas:

regla 1: *Tiro una moneda. Si sale cara me quedo en la esquina por 2 minutos y vuelvo a usar la regla 1, si sale ceca voy a la regla 2.*

regla 2: *Si estoy en la esquina norte camino una cuadra hacia el sur, si estoy en la esquina sur camino una cuadra hacia el norte, en otro caso tiro de nuevo la moneda y voy una cuadra hacia el sur si es cara o una hacia el norte si es ceca. Luego vuelvo a la regla 1.*

a) Ver que se forma una cadena de Markov y encontrar la matriz de transición P.

b) Encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que P^k tenga todas sus entradas positivas (y que por lo tanto se trata de una cadena ergódica regular).

[14] Para hacer más fáciles las cuentas nos vamos a otro pueblo.

c) Pensar cuál podría ser un valor «razonable» para el vector w (sin calcularlo).

d) Encontrar el vector w del teorema 9.1. ¿Concuerda con lo pensado en el inciso anterior? ✄

Otro resultado de interés para cadenas regulares es el siguiente:

9.4. Teorema. *En una cadena regular, con las notaciones del teorema 9.1, el número de pasos esperado para retornar al estado u_i (habiendo empezado en u_i) es*

$$e_i = 1/w_i.$$

Remitiendo al lector interesado al libro de Kemeny y Laurel Snell [KLS76, Sec. 4.4] para una demostración de este resultado, apliquémoslo al problema del cumpleaños:

9.5. Problema (El problema del cumpleaños como cadena regular). Supongamos que tenemos una cola «muy larga» de personas,(15) y a medida que van pasando vamos anotando el día del cumpleaños. Si en algún momento anotamos una fecha, ¿cuántas personas esperamos que pasarán hasta volver a repetir esa fecha? ✄

En este caso podemos considerar como estados a $\{1, 2, \dots, 365\}$, siendo la probabilidad de estar en cualquiera de ellos la misma. Consecuentemente, todas las entradas de la matriz de transiciones P tienen el valor $p = 1/365$, y la matriz W del teorema 9.1 coincide con P. De modo que si acaba de pasar una persona con determinado día de cumpleaños, en promedio pasarán $1/p = 365$ personas antes de volver a repetir ese día. Es interesante comparar este resultado con el resultado 6.2 donde se obtiene el mismo valor.

Dejamos que el lector aplique el teorema 9.4 en casos más sustanciosos:

9.6. Problema.

a) Teniendo en cuenta el problema 9.2, si un cliente esta semana compra en Mejor Valor, ¿dentro de cuántas semanas esperamos que volverá a hacerlo?

b) Con referencia ahora al problema 9.3, si estoy en la esquina 2, ¿cuántas veces espero tirar la moneda hasta regresar a la misma esquina? ✄

Concluimos esta sección comentando brevemente la demostración del teorema 9.1, para lo cual necesitamos previamente el siguiente lema:

9.7. Lema. *Si $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz de transición de una cadena ergódica regular y $x \in \mathbb{R}^n$, entonces para algún $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{s\to\infty} P^s x = \alpha(1, 1, \dots, 1).$$

Más aún, si las coordenadas de x son no-negativas y alguna es positiva, entonces $\alpha > 0$.

La idea de la demostración del lema es que si la coordenada i de Px es

$$y_i = (Px)_i = p_{i1}x_1 + p_{i2}x_2 + \dots + p_{in}x_n,$$

como los coeficientes p_{ij} son no-negativos y suman 1, y_i es un «promedio» de las coordenadas de x, y

$$\min_j x_j \le y_i \le \max_j x_j.$$

(15) ¡y son personas pacientes!

Si las entradas de P son estrictamente positivas, es posible ver un poco más:

$$(\max_i y_i - \min_i y_i) < \varepsilon\,(\max_j x_j - \min_j x_j),$$

para alguna constante apropiada ε, $0 < \varepsilon < 1$. Después de s pasos, siempre suponiendo que las entradas de P son positivas, llegamos a

$$\max_i (P^s x)_i - \min_i (P^s x)_i < \varepsilon^s\,(\max_i x_i - \min_i x_i),$$

de donde se deduce el resultado para este caso especial. Puede suceder que algunas de las entradas de P sean nulas, y allí es donde se usa la hipótesis de regularidad de la cadena.[16]

Demostración del teorema 9.1: Tomando $x = e_i$, el vector i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, en el lema, $P^s e_i$ converge a un vector de la forma $\alpha_i\,(1, 1, \dots, 1)$, y por lo tanto P^s converge a una matriz cuya i-ésima columna tiene siempre el coeficiente α_i: la entrada w_i, que será positiva.

Es claro que como $P^s \to W$, entonces

$$WP = \Big(\lim_{s\to\infty} P^s\Big)P = \lim_{s\to\infty} P^s P = W,$$

y de modo similar se ve que $PW = W$. En particular, de $WP = W$, tomando una fila de W (que es w), queda $wP = w$.

También dado que las suma de cada fila de P^s es 1 (recordar el problema 4.2), W también es una matriz de probabilidad, y w hereda la propiedad de que la suma de sus coordenadas es 1.

Finalmente, si w' es otro vector tal que la suma de sus coordenadas es 1 y $w'P = w'$, tenemos

$$w' = w'P = (w')P = (w'P)P = w'(P^2) = (w'P)(P^2) = w'P^3 = \cdots,$$

de donde $w'W = w'$. Pero como las columnas de W son constantes, la coordenada j de w' debe ser

$$w'_j = (w'W)_j = \sum_i w'_i W_{ij} = w_j \sum_i w'_i = w_j,$$

pues suponemos que las coordenadas de w' suman 1. ✌

10. El comportamiento asintótico de cadenas de Markov

Terminamos haciendo un breve comentario sobre las matrices correspondientes a cadenas absorbentes y regulares. En ambos casos vimos que P^s tiende a un límite cuando $s \to \infty$.

En el caso de las cadenas regulares, si (esquemáticamente) ponemos

$$P = \begin{bmatrix} I & 0 \\ R & Q \end{bmatrix},$$

[16] Esta última parte de la demostración es «técnica» y no aporta mucho a la idea.

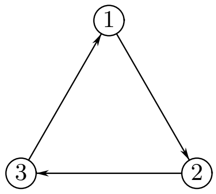

Figura 10.1: Una cadena cíclica.

vimos (teorema 7.7) que

$$P^s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} I & 0 \\ NR & 0 \end{bmatrix},$$

mientras que en el caso de cadenas regulares acabamos de ver que

$$P^s \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} W.$$

De modo que en ambos casos el comportamiento «a la larga» o, más formalmente, asintótico del proceso es como si hubiera una única matriz que lo describe.

Podemos quedarnos con la idea de que esto sucederá para cualquier cadena de Markov, pero el ejemplo de la figura 10.1 muestra que pueden haber comportamientos cíclicos.

En este caso la matriz correspondiente es

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y entonces $P^4 = P$ y se repite cíclicamente cada 3 iteraciones.

Puede demostrarse que esencialmente este es el único comportamiento posible. Para hacer este estudio primero se piensa en una cadena auxiliar, donde los conjuntos ergódicos se «colapsan» a estados absorbentes, quedando una cadena absorbente, y luego se hace el estudio, ya como cadena ergódica, de cada uno de los conjuntos ergódicos originales. Para un estudio más detallado ver, por ejemplo, el libro de Kemeny y Snell [KLS76].

Apéndice A. Algunas soluciones

A.1. Problema 7.8

Queremos verificar que, con las notaciones de la sección 7, la suma de las filas de NR es 1.

Recordemos que $N = (I - Q)^{-1} \in \mathbb{R}^{(m-n)\times(m-n)}$ y que $R \in \mathbb{R}^{(m-n)\times m}$, por lo que $NR \in \mathbb{R}^{(m-n)\times m}$. Llamando n_{ij} a las entradas de N y r_{ij} a las entradas de R, debemos tomar un estado transiente u_i y evaluar la suma

$$s = \sum_{j,k} n_{ik} r_{kj}, \tag{A.1}$$

donde la suma es sobre todos los índices k correspondientes a estados transientes y todos los índices j correspondientes a estados absorbentes.

Como la matriz P original es de probabilidad, sabemos que para todo índice ℓ, debe ser

$$\sum_{h=1}^{n} p_{\ell h} = 1,$$

de modo que podemos reagrupar los términos en la ecuación (A.1) para obtener

$$s = \sum_k n_{ik} \sum_j r_{kj} = \sum_k n_{ik} \left(1 - \sum_\ell p_{k\ell}\right),$$

donde ahora los índices ℓ corresponden a estados transientes, es decir $p_{k\ell} = q_{k\ell}$ —la entrada $k\ell$ de Q— por lo que

$$s = \sum_k n_{ik} \left(1 - \sum_\ell q_{k\ell}\right) = \left(\sum_k n_{ik}\right) - \left(\sum_{k,\ell} n_{ik} q_{k\ell}\right). \tag{A.2}$$

Como N y $I - Q$ son inversas, tomando $\delta_{i\ell}$ como 1 si $i = \ell$ y 0 si $i \neq \ell$, si i y ℓ son índices correspondientes a estados transientes debe ser

$$\delta_{i\ell} = \sum_k n_{ik} (\delta_{k\ell} - q_{k\ell}),$$

es decir,

$$\sum_k n_{ik} q_{k\ell} = -\delta_{i\ell} + \sum_k n_{ik}\, \delta_{k\ell} = -\delta_{i\ell} + n_{i\ell}.$$

Reemplazando en la ecuación (A.2), queda

$$\begin{aligned} s &= \left(\sum_k n_{ik}\right) - \sum_\ell \left(\sum_k n_{ik} q_{k\ell}\right) = \\ &= \left(\sum_k n_{ik}\right) - \sum_\ell (-\delta_{i\ell} + n_{i\ell}) = \left(\sum_k n_{ik}\right) + 1 - \left(\sum_\ell n_{i\ell}\right) = 1. \end{aligned}$$

✌

A.2. Problema 8.10

Aquí queremos verificar que si a_i está dado por la ecuación

$$a_i = \frac{1}{p^{m-i}} \qquad \text{para } i = 0, 1, \dots, m-1,$$

entonces

$$(a_0, a_1, \dots, a_{m-2}, a_{m-1}) \cdot (I - Q) = (1, 0, \dots, 0).$$

Para la primer columna ($j=0$),

$$
\begin{aligned}
p\,(1/p)^m - q\sum_{i=1}^{m-1}(1/p)^{m-i} &= \frac{1}{p^{m-1}} - \frac{q}{p}\sum_{i=0}^{m-2}(1/p)^i = \\
&= \frac{1}{p^{m-1}} - \frac{q}{p}\,\frac{(1/p)^{m-1}-1}{1/p-1} = 1.
\end{aligned}
$$

Para las otras columnas ($j=1,\dots,m-1$),

$$
\frac{1}{p^{m-(j-1)}}\,(-p) + \frac{1}{p^{m-j}} = 0.
$$

✌

A.3. Problema 8.12

Nos preguntamos si la matriz

$$
\begin{bmatrix}
1 & p & p\,(1+p) & p\,(1+p)^2 & \dots & p\,(1+p)^{n-2} \\
0 & 1 & p & p\,(1+p) & \dots & p\,(1+p)^{n-3} \\
\vdots & & & & & \\
0 & & \dots & 0 & 1 & p \\
0 & & \dots & & 0 & 1
\end{bmatrix},
$$

es la inversa de la matriz $I-Q$ dada por

$$
\begin{bmatrix}
1 & -p & -p & \dots & -p & -p \\
0 & 1 & -p & \dots & -p & -p \\
\vdots & & & & & \\
0 & & \dots & & 1 & -p \\
0 & & \dots & & & 1
\end{bmatrix}.
$$

Al considerar la entrada (i,j) del producto de N con $I-Q$, donde $i,j=0,\dots,n-1$, tenemos que hacer el producto interno entre los vectores

$$
(0,\dots,0,\overset{i}{1},p,p\,(1+p),\dots,p\,(1+p)^{n-2-i})
$$

y

$$
(-p,-p,\dots,-p,\overset{j}{1},0,\dots,0),
$$

de modo que la entrada es 0 si $i>j$, 1 si $i=j$, y

$$
\begin{aligned}
-p + \sum_{k=i+1}^{j-1} p\,(1+p)^{k-i-1}(-p) + p\,(1+p)^{j-i-1} &= \\
= -p - p^2\sum_{k=0}^{j-i-2}(1+p)^k + p\,(1+p)^{j-i-1} &= \\
= -p - p^2\,\frac{(1+p)^{j-i-1}-1}{(1+p)-1} + p\,(1+p)^{j-i-1} &= \\
= -p - p\big((1+p)^{j-i-1}-1\big) + p\,(1+p)^{j-i-1} &= 0,
\end{aligned}
$$

si $i < j$ (cuando $j = i + 1$, la suma del medio no existe).

Otra forma de verlo es resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ -p & & \dots & -p & 1 & 0 \\ -p & & \dots & & -p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde $(a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1})$ es la primer fila de N (correspondiente a $i = 0$).

Como la matriz de este sistema es triangular, podemos ver que

$$a_0 = 1, \qquad \text{y} \qquad a_k = p\, s_{k-1} \quad \text{para } k = 1, \dots, n-1,$$

donde $s_k = \sum_{j=0}^{k} a_j$. En realidad es más fácil determinar primero s_k pues $s_0 = 1$ y

$$s_k = s_{k-1} + p\, s_{k-1} = (1+p) s_{k-1} \qquad \text{para } k = 1, \dots, m-1,$$

i.e., $s_k = (1+p)^k$, por lo que para $k \geq 1$,

$$a_k = s_k - s_{k-1} = (1+p)(1+p)^{k-1} - (1+p)^{k-1} = p\,(1+p)^{k-1},$$

que es el resultado que teníamos. ✌

Apéndice B. Fórmulas relacionadas con el problema del cumpleaños

Tratamos ahora de encontrar fórmulas para describir varias de las ecuaciones que aparecieron en la sección 8.4 al estudiar el problema de dos con el mismo cumpleaños.

Para n entero no-negativo y $x \in \mathbb{R}$, definimos la función φ como[17]

$$\varphi(n, x) = e^x \int_x^\infty t^n e^{-t}\, dt.$$

Observemos que

$$\varphi(0, x) = 1 \tag{B.1}$$

y

$$\begin{aligned} \varphi(n, x) = e^x \int_x^\infty t^n e^{-t}\, dt &= e^x \Big(-t^n e^{-t} \Big|_x^\infty + n \int_x^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt \Big) = \\ &= x^n + n\, \varphi(n-1, x). \end{aligned} \tag{B.2}$$

Siguiendo de la misma forma, usando las ecuaciones (B.2) y (B.1),

$$\begin{aligned} \varphi(n, x) &= x^n + n\, \varphi(n-1, x) = \\ &= x^n + n x^{n-1} + n(n-1)\, \varphi(n-2, x) = \dots = \\ &= n! \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned} \tag{B.3}$$

[17] $\varphi(n, x)$ está relacionada con la función Γ incompleta, $\varphi(n, x) = e^x \Gamma(n+1, x)$.

Así, $\varphi(n,x)$ puede considerarse como una notación para el último término: lo importante es la relación de recurrencia (B.2) junto con la condición inicial (B.1).

Para $x, y \in \mathbb{R}$, usando (B.3) y (B.2),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(y-k)\frac{x^k}{k!} &= y\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n}k\frac{x^k}{k!} = y\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} - x\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!} = \\
&= y\,\frac{\varphi(n,x)}{n!} - x\,\frac{\varphi(n-1,x)}{(n-1)!} = \\
&= y\,\frac{\varphi(n,x)}{n!} - x\,\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\varphi(n,x)-x^n}{n} = \\
&= \frac{y-x}{n!}\,\varphi(n,x) + \frac{x^{n+1}}{n!}.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

En el caso particular $x = y = n$ queda

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{n^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{n^k}{k!} = \frac{n^{n+1}}{n!},$$

de donde se obtiene la ecuación (8.17) en la que se suman las probabilidades en el caso del cumpleaños:

$$\frac{n!}{n^{n+1}}\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{n^i}{i!} = 1.$$

Recordando ahora la ecuación (8.15), la reescribimos en términos de φ:

$$E = \frac{n!}{n^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(n-k)(n+1-k)\frac{n^k}{k!} = \frac{n!}{n^{n+1}}\,\frac{n\varphi(n,n)}{n!} = \frac{\varphi(n,n)}{n^n},$$

Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, usando (B.4) y (B.2) tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(y-k)(z-k)\frac{x^k}{k!} &= y\sum_{k=0}^{n}(z-k)\frac{x^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n}k(z-k)\frac{x^k}{k!} = \\
&= y\sum_{k=0}^{n}(z-k)\frac{x^k}{k!} - x\sum_{k=0}^{n-1}(z-1-k)\frac{x^k}{k!} = \\
&= y\big((z-x)\frac{\varphi(n,x)}{n!} + \frac{x^{n+1}}{n!}\big) - \\
&\qquad - x\big((z-1-x)\frac{\varphi(n-1,x)}{(n-1)!} + \frac{x^n}{(n-1)!}\big) = \\
&= (y-n)\frac{x^{n+1}}{n!} + y(z-x)\frac{\varphi(n,x)}{n!} - \\
&\qquad - x(z-1-x)\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\varphi(n,x)-x^n}{n} = \\
&= (y+z-1-x-n)\frac{x^{n+1}}{n!} + ((y-x)(z-x)+x)\frac{\varphi(n,x)}{n!}.
\end{aligned}$$

Poniendo $y = x = n$ y $z = n+1$, obtenemos la ecuación (8.15).

Para la esperanza en (8.18), donde $n = 365$, podemos usar (B.3) con $x = n$, obteniendo el mismo resultado: $\varphi(n, n)/n^n$. ✌

Es interesante mirar estas fórmulas en casos más familiares como tirar dados o monedas. Por ejemplo, la esperanza de tirar monedas hasta que se repita alguna es

$$E = \frac{\varphi(2,2)}{2^2} = \frac{5}{2} = 2.5,$$

mientras que la esperanza de tirar dados hasta que alguno se repita es

$$E = \frac{\varphi(6,6)}{6^6} = \frac{1223}{324} \approx 3.77469.$$

Observación. El uso de φ es sólo una conveniencia. La forma con exponenciales e integrales es más que nada una curiosidad para lo que hacemos ($x \in \mathbb{N}$). Por ejemplo, las esperanzas que consideramos son números racionales (como puede verse en la ecuación (B.3)). ✌

Apéndice C. Programas en Pascal

En este apéndice bosquejamos algunos programas, usando el lenguaje Pascal, para hacer simulaciones numéricas de algunos problemas que hemos mencionado. Sólo indicamos la parte principal, dejando detalles de interacción con el usuario para el lector interesado.

Como en todos ellos usamos números aleatorios, pero en Pascal no están definidos, suponemos una función `aleatorio` que da un número aleatorio (uniformemente distribuido) en $(0, 1]$, con la variante `aleatorio(`m`)` que da un número entero entre 1 y m. En Turbo Pascal `aleatorio` es la sentencia `random` y debe aplicarse previamente la sentencia `randomize`.

La implementación de los programas es una parte importante del aprendizaje, y esperamos que el lector extienda estos programas para los otros problemas que hemos mencionado, por ejemplo el problema del *Número de Oro* (problema 1.1) o el problema de la REM (problema 8.6).

En todos los programas la variable entera n es la cantidad de veces que se realiza la simulación, la variable real *veces* es el número de veces que se ha realizado la experiencia («tirado el dado»). Al terminar, *veces*$/n$ indica el promedio de «tiros» realizado hasta obtener m consecutivos. Ponemos *veces* de tipo real pues podría ser muy grande (dependiendo del problema).

Al hacer las primeras pruebas, es conveniente tomar n chico, $n = 1$ o 10, y una vez que se sabe que el programa funciona, tomar n más grande, 1000 o tal vez 10000.

C.1. (Programa para el problema 8.1 de m consecutivos). Aquí tenemos

p, **real:** la probabilidad de suceso favorable, $0 \le p \le 1$.

m, **entero:** el número consecutivo de veces que debe aparecer el resultado favorable.

contador, **entero:** cuenta cúantos favorables consecutivos se han obtenido.

```
veces := 0;
for i := 1 to n do begin
   contador := 0;
   repeat
      veces := veces + 1;
      if (aleatorio < p) then contador := contador + 1
      else contador := 0
   until (contador = m)
   end;
```

C.2. (Programa para el problema 8.2 de sumar hasta una cifra dada). Acá suponemos que sacamos números enteros entre 1 y k ($k = 6$ para dados).

m, **entero:** el objetivo al cual debe llegar la suma.

suma, **real:** la suma de los números obtenidos. La tomamos como real pues puede ser muy grande.

```
veces := 0;
for i := 1 to n do begin
   suma := 0;
   repeat veces := veces + 1; suma := suma + aleatorio(k)
   until (suma >= m)
   end;
```

C.3. (Programa para el problema 8.3 de sumar hasta 1). Es una variante del anterior, donde ahora $m = 1$, y los números aleatorios están entre 0 y 1:

```
veces := 0;
for i := 1 to n do begin
   suma := 0;
   repeat veces := veces + 1; suma := suma + aleatorio
   until (suma >= 1)
   end;
```

C.4. (Programa para el problema 8.4 del cumpleaños). Aquí usamos:

m, **entero:** la cantidad de posibilidades, en el problema del cumpleaños tomaríamos $m = 365$.

a, **arreglo «booleano»:** inicialmente en `false`, cambia a `true` cuando ha llegado alguien con esa «fecha de cumpleaños».

seguir, **«booleana»:** si dejamos que sigan entrando personas al cine.

```
veces := 0;
for i := 1 to n do begin
   for j := 1 to m do a[j] := false;
   seguir := true;
   repeat
      veces := veces + 1;
      j := aleatorio(m);
      if (a[j]) then seguir := false else a[j] := true
   until (not seguir)
   end;
```

C.5. (Programa para el problema 8.5 del paseo). En este caso ponemos:

inic, **entero:** la posición (esquina) inicial.

pos, **entero:** la posición (esquina) en la que estamos.

```
veces := 0;
for i := 1 to n do begin
   pos := inic;
   repeat
      veces := veces + 1;
      if (aleatorio > .5) then pos := pos - 1
      else pos := pos + 1
   until ((pos = 0) or (pos = m))
   end;
```

Bibliografía

[Fel57] W. Feller: *An Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1, 3.ª ed. J. Wiley & Sons, 1957. (*págs. 1 y 4*)

[KLS76] J. G. Kemeny, J. Laurie Snell: *Finite Markov Chains*, Springer-Verlag, 1976. (*págs. 1, 2, 26 y 28*)

[REM02] D. Penazzi: *Problemas para resolver*, en Revista de Educación Matemática, UMA, vol. 17, n.º 2, pág.46, 2002. http://www.union-matematica.org.ar/publicaciones/index.html (*pág. 13*)

[Rob76] F. S. Roberts: *Discrete mathematical models. With applications to social, biological, and environmental problems*. Prentice-Hall, 1976. (*pág. 1*)