Investigación y Docencia

por Néstor Aguilera

Apuntes sobre la Parábola: su medición según Arquímedes y otras propiedades

(Versión revisada de mayo de 2001)

Introducción

Muchas veces habrán oído que Arquímedes fue el precursor del cálculo matemático, afirmación basada en que, hacia el año 240 A.C., obtuvo la medición de cualquier segmento parabólico.

Aunque este resultado marca un hito fundamental en el desarrollo de las matemáticas, la afirmación de que Arquímedes fue "el inventor" del cálculo es un tanto temeraria. Según él mismo, este desarrollo suyo se apoya en lo hecho por "los antiguos griegos", refiriéndose muy posiblemente a los desarrollos que condujeron a los libros de Euclides, alrededor de 200 años A.C.. Recordemos, por ejemplo, que en estos libros se presenta el método de exhaución para la medición del círculo. Por supuesto, Arquímedes vivía en Sicilia, Italia, lugar en donde la cultura griega era bien conocida[1].

¿Cómo hizo Arquímedes para medir el segmento parabólico, si no disponía de coordenadas cartesianas, y por lo tanto tampoco de funciones "para integrar"? La respuesta es que él tenía un conocimiento profundo de las propiedades de la parábola y, claro, una inteligencia superior.

En estas notas nos proponemos estudiar algunas de las propiedades de la parábola, a partir de su definición, y llegar a la reconstrucción de la medición de un segmento parabólico según Arquímedes. Usaremos las herramientas de las que disponía Arquímedes, es decir no usaremos construcciones basadas en geometría analítica o integrales, sino que usaremos esencialmente la regla y el compás. Terminaremos con otros resultados interesantes, algunos muy sencillos, otros no tanto, y comparando con las herramientas más "nuevas" como geometría analítica y cálculo. En el transcurso iremos dejando preguntas y problemas para el lector inquieto, pero (¡atención remolones!) no son decisivos para la obtención de los resultados principales.

[1] En realidad, fue un soldado romano quien asesinó a Arquímedes cuando los romanos, luego de un largo sitio, tomaron Siracusa. Por otra parte, es posible que Arquímedes hubiera sido discípulo directo de Euclides.

Una manera muy interesante de trabajar con este material es usar software como Cabri-Géomètre, ya que permite mover los "objetos básicos" destacando las propiedades subyacentes en las figuras geométricas. No obstante, las figuras que aquí presentamos están hechas con el software Mathematica[2].

Pero empecemos por el principio. . .

1. La definición clásica de la parábola y su construcción

Una parábola es un objeto geométrico en el plano, definido a partir de un punto llamado *foco*, al que en este artículo normalmente indicaremos por F, y una recta llamada directriz, a la que indicaremos como d. Para definirla necesitamos las nociones de distancia entre dos puntos (en realidad poder comparar la distancia entre pares de puntos), y la distancia de un punto a una recta. Recordemos que la distancia de un punto a una recta es la menor distancia del punto a cualquier punto de la recta, y se obtiene tomando la proyección perpendicular del punto sobre la recta.

Ahora sí: dados el foco F y la directriz d, $F \notin d$, la parábola asociada es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de F y d.

En la Figura 1 vemos el gráfico de una parábola con foco F y directriz d, que de aquí en más indicaremos como (F, d). Vemos en esa figura a un punto P sobre la parábola y su proyección perpendicular, P', sobre d. Hemos sombreado con gris oscuro la región que llamaremos "interior" de la parábola, compuesta por los puntos que están más cerca de F que de d, y con gris claro su parte "exterior", o sea, los puntos que están más cerca de d que de F.

También hemos señalado en la Figura 1 el eje de la parábola, e, que es la recta por F y perpendicular a d, y que constituye un eje de simetría.

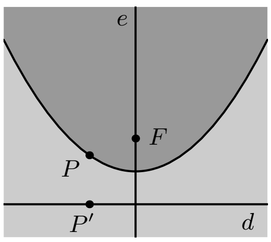


Figura 1

Una forma de construir un punto sobre la parábola es considerar que el punto a dibujar se encuentra a una distancia r de F y d. Entonces está en una circunferencia de centro F y radio r, y en una recta paralela a d a distancia r, por lo tanto en la intersección de esa circunferencia y recta. Necesitaremos que r no sea menor que la mitad de la distancia entre F y d para que esa intersección exista, y habrá en general dos puntos en la intersección, señalados por P y Q en la Figura 2.

[2]El autor agradece a la Olimpíada Matemática Argentina el apoyo brindado, y en particular el uso de las facilidades de computación para el desarrollo de este artículo.

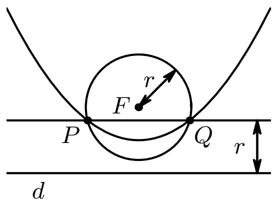


Figura 2

2. Tangentes a la parábola y otra construcción posible

Podemos hacer una construcción un tanto distinta: si P es un punto sobre la parábola (F, d) y P' es su proyección perpendicular sobre d, entonces la mediatriz del segmento[3] $\overline{FP'}$ pasa por P, pues la mediatriz es el conjunto de puntos que están a igual distancia de F y de P'. Pensándolo al revés, podemos asignar a cada punto P' sobre d un punto P sobre la parábola tomando la intersección de la perpendicular a d por P' y la mediatriz m del segmento $\overline{FP'}$ como se indica en la Figura 3.

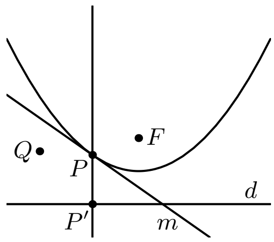


Figura 3

A partir de este gráfico parece que la mediatriz m es tangente a la parábola por P. Claro que para ver esto formalmente deberíamos tener una definición de tangente a una curva.

Aunque no es adecuada para cualquier curva, acá nos bastará con tener la idea intuitiva de tangente a una curva como "la recta que interseca la curva y la deja a un lado". Esta condición es satisfecha por m porque 1) $P \in m$ y 2) m divide al plano en dos semiplanos, uno de los cuales contiene a todos los puntos que están más cerca de P' que de F (como el punto Q en la Figura 3), y entonces todos estos puntos están en el exterior de la parábola, ya que la distancia de estos puntos a F es mayor que la distancia a P' que es a su vez mayor o igual que la distancia a d, por lo que ciertamente m "deja a la curva a un lado". Más concretamente, podríamos decir que el interior de la parábola está completamente contenido en uno de los semiplanos determinados por m, y que *salvo el mismo punto de tangencia, la tangente está completamente contenida en el exterior de la parábola.*

[3] Por simpleza, indicamos con $\overline{AB}$ tanto el segmento, la longitud del segmento o la recta determinada por los puntos A y B. Por otra parte no pondremos notación especial para triángulos o polígonos en general.

Problema 2.1. Otra forma de definir la tangente a una curva es como "la recta que interseca la curva en un solo punto". Ver que P es el único punto de m que está en la parábola. ✂

Miremos ahora la Figura 4, donde hemos denotado por M al punto medio del segmento $\overline{FP'}$ y por F' a la proyección de F sobre d. Por ser M el punto donde la mediatriz m corta al segmento, el ángulo $\widehat{PMF}$ es recto. Claro que M pertenece a la recta r paralela a d que pasa por el punto medio del segmento $\overline{FF'}$. El siguiente problema es una expresión de esta idea. A veces, en vez de trazar las rectas, se ponen hilos, (tal vez de distintos colores) con chinches, dando por resultado dibujos atractivos.

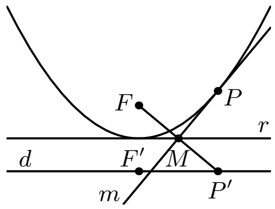


Figura 4

Problema 2.2. En una mesa se pone un tarugo y se fija una regla bien larga. Se apoya un cateto de una escuadra sobre el tarugo y el vértice recto sobre la regla. Se trazan las rectas dadas por el otro cateto de la escuadra para varias posiciones de la escuadra, resultando una serie de rectas envolventes a una curva. ¿Cuál es esa curva? (Una envolvente de una familia de rectas es un objeto tal que todo punto de ese objeto pertenece a alguna de las rectas de la familia, y esa recta a la que pertenece es precisamente la tangente al objeto por el punto). ✂

3. Propiedades de la tangente y la normal

En la Figura 5 agregamos el segmento $\overline{FP}$. Vemos que hay varios ángulos iguales. En efecto, agregando los puntos Q y T para destacar los ángulos, vemos que los ángulos $\widehat{FPM}$ y $\widehat{P'PM}$ son iguales, pues P está sobre la mediatriz m del segmento $\overline{FP'}$. También los ángulos $\widehat{P'PM}$ y $\widehat{TPQ}$ son iguales, pues son ángulos opuestos por el vértice, por lo que los ángulos $\widehat{FPM}$ y $\widehat{TPQ}$ son iguales. Esto nos da la propiedad de reflexión de la parábola: si arrojamos una pelota (o un rayo de luz) desde F hacia P, la pelota (o rayo) rebotará como si la parábola fuera la tangente m, y se dirigirá hacia Q, es decir, paralela al eje de la parábola. También podemos pensar al revés: si un rayo de luz o pelota viene paralelamente al eje de la parábola por su interior, entonces rebotará en dirección al foco. Como sabemos, esta propiedad de reflexión es usada para la construcción de linternas y antenas satelitales.

Problema 3.1. ¿Qué pasa si el rayo o pelota viene en dirección paralela al eje de la parábola pero desde el exterior? ¿Y si viene desde el exterior hacia el foco? ✂

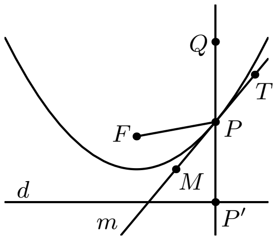
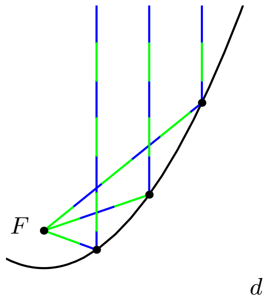


Figura 5

Problema 3.2. Los espejos de las linternas tienen la forma de una parábola rotadas sobre su eje y luego truncada. Cuando proyectamos el haz de luz sobre una pared, vemos que se “concentra” si nos acercamos a la pared y se “difunde” si nos alejamos. ¿Cómo puede ser, si los rayos deben reflejarse paralelamente al eje de la parábola, y por lo tanto el haz de luz debería ser un “cilindro”? ✂

Problema 3.3. Supongamos que dos móviles, A y B, en el interior de la parábola (F, d) se acercan hacia la directriz d en dirección paralela al eje de la parábola, y supongamos que ambos rebotarán al llegar a la parábola dirigiéndose hacia F, como hemos descrito. Ver que si ambos se mueven a la misma velocidad constante y están inicialmente a la misma distancia de d, llegan juntos a F.
Nota: En particular, una onda (por ejemplo de luz o electromagnética) que viene desde el “infinito” y se desplaza hacia la directriz y paralelamente, se concentra en F sin “desfasarse”, como hemos tratado de ilustrar en la figura al costado, donde los “tramos” de color azul y verde tienen todos la misma longitud. ✂



La *recta normal* en el punto P de la parábola, denotada por n en la Figura 6, es la recta por P perpendicular a la tangente a la parábola por P.

En esa figura también hemos agregado otros elementos: el punto S, intersección de n con el eje e; el punto T, proyección perpendicular de P sobre e; el punto Q, intersección de la tangente m y e; así como el punto F', proyección de F sobre d.

Vemos que el segmento $\overline{PS}$ es paralelo al segmento $\overline{P'F}$ (ambos son perpendiculares a m), el segmento $\overline{P'P}$ (que no hemos marcado) es paralelo al segmento $\overline{FS}$ (ambos son perpendiculares a d), y finalmente que el segmento $\overline{PT}$ es paralelo al segmento $\overline{P'F'}$ (ambos son perpendiculares a e), de lo que podemos obtener varios resultados:

Resultado 3.4: *Con las notaciones anteriores, la longitud del segmento $\overline{ST}$ es la “distancia característica” de la parábola, es decir, la longitud del segmento $\overline{FF'}$.*

Demostración: Basta observar que los triángulos $P'F'F$ y PTS son iguales. □

Resultado 3.5: *Con las notaciones anteriores, el punto medio del segmento $\overline{QS}$ es F.*

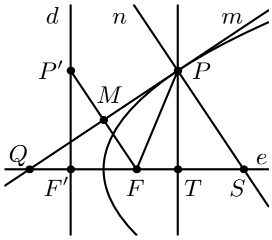


Figura 6

Demostración: M es el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, pues es punto medio del segmento $\overline{FP'}$ (m es su mediatriz), y siendo el segmento $\overline{P'P}$ paralelo al segmento $\overline{QF}$, los triángulos $P'PM$ y FQM son congruentes (por una reflexión respecto de M). Entonces el segmento $\overline{MF}$ es base media del triángulo PQS, pues es paralelo al segmento $\overline{PS}$, lo que implica el resultado. □

Problema 3.6. Demostrar que el cuadrilátero $QFPP'$ es un paralelogramo. En particular, los segmentos $\overline{P'Q}$ y $\overline{PF}$ tienen la misma longitud. ✂

4. Tangente desde un punto exterior

Repasemos: dado un punto P sobre la parábola (F, d), podemos trazar la tangente tomando la mediatriz m del segmento $\overline{FP'}$ donde P' es la proyección perpendicular de P sobre d.

Nos preguntamos ahora cómo trazar una tangente a la parábola que pase por cualquier punto dado que no esté sobre la parábola. Es claro que el punto dado debe estar en el exterior, pues la tangente nunca tiene puntos interiores.

Supongamos que S es el punto dado, y que ya hemos construido una recta tangente t que toca a la parábola en el punto P que tiene proyección P' sobre d, como en la Figura 7 *a*).

Entonces, dado que S está en la mediatriz del segmento $\overline{FP'}$, los segmentos $\overline{SF}$ y $\overline{SP'}$ tienen igual longitud, o en otras palabras, P' está en una circunferencia de centro S que pasa por F. En realidad, esta circunferencia corta a la recta d en dos puntos, llamados A' y B' en la Figura 7 *b*). A partir de estos puntos sobre d es posible construir los puntos A y B sobre la parábola, como en la construcción de la Figura 2. Es decir, cualquier punto exterior a la parábola pertenece exactamente a dos tangentes.

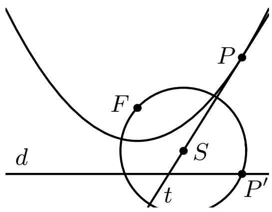


Figura 7 a

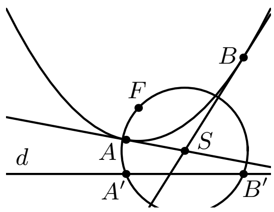


Figura 7 b

En realidad, también hemos demostrado:

Resultado 4.1: *Si A y B son dos puntos de la parábola, cuyas proyecciones sobre d son A' y B' (respectivamente) y las tangentes por A y B se cortan en S, entonces S es el circuncentro del triángulo $A'B'F$.*

Problema 4.2. Sabemos que la intersección de una circunferencia y una recta es o bien dos puntos, o uno, o ninguno. ¿Por qué afirmamos que si el punto S es exterior a la parábola, la circunferencia de centro S que pasa por F corta a d en dos puntos? ¿Cuáles son los puntos S para los cuales esa circunferencia corta a d en exactamente un punto? ¿Y en ninguno? ✂

Problema 4.3. Encontrar el lugar geométrico de los puntos S desde los cuales se ve la parábola a 90°.
Sugerencia: Si S es intersección de las mediatrices de los segmentos $\overline{A'F}$ y $\overline{B'F}$, el ángulo en S formado por las mediatrices ($\widehat{ASB}$) es suplemento del ángulo $\widehat{A'FB'}$. Además, un triángulo $A'FB'$ es rectángulo en F si y sólo si el segmento $\overline{A'B'}$ es diámetro de la circunferencia circunscripta. Recordar que para demostrar que un objeto es un lugar geométrico de puntos, hay que demostrar *dos* inclusiones. ✂

5. Tangente paralela a una recta dada

Acabamos de ver cómo encontrar una recta (la tangente) dado un punto sobre ella, encontrando la pendiente de esa recta (en el caso anterior había dos posibilidades).

Otra posibilidad es dar la pendiente y encontrar el punto: dada una recta ℓ (que no tiene por qué cortar a la parábola), encontrar una recta t paralela a ℓ y tangente a la parábola (F, d).

Supongamos que ya hemos encontrado t y el punto de tangencia $T \in t$, que tiene proyección T' sobre d, como en la Figura 8 *a*). Sabemos que t es la mediatriz del segmento $\overline{FT'}$ y por lo tanto la recta ℓ ha de ser perpendicular a este segmento, en otras palabras, dados (F, d) y ℓ podemos encontrar T' como la intersección de la perpendicular a ℓ que pasa por F. Como ya hemos visto, ahora podemos construir la mediatriz t y después T.

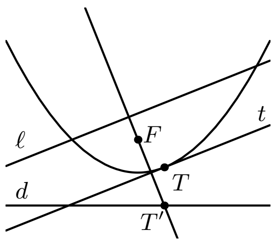


Figura 8 a

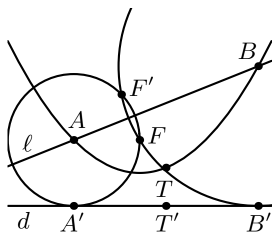


Figura 8 b

Problema 5.1. ¿Qué pasa si la recta ℓ es perpendicular a d? ✂

Si indicamos con A y B los puntos de intersección de la recta ℓ con la parábola, y con A' y B' las correspondientes proyecciones sobre d, como en la Figura 8 *b*), mirando con atención observamos que el punto T' parece ser justamente el punto medio del segmento $\overline{A'B'}$.

Que esto es así siempre es nuestro próximo resultado:

Resultado 5.2: *Con las notaciones anteriores, el punto T' es el punto medio del segmento $\overline{A'B'}$.*

Demostración: Si trazamos dos circunferencias con centros A y B (respectivamente), que pasan por F, ellas son tangentes a d. Si F' es la otra intersección de estas circunferencias (una es F), la potencia del punto T' respecto a la circunferencia con centro en A (ver por ejemplo Santaló [2]), es el producto de las longitudes de los segmentos $\overline{T'F}$ y $\overline{T'F'}$ e igual al cuadrado de la longitud del segmento $\overline{T'A'}$. Como esa potencia es igual a la potencia de T' respecto a la circunferencia con centro en B, obtenemos que los segmentos $\overline{T'A'}$ y $\overline{T'B'}$ tienen igual longitud. □

De aquí parece natural plantearse el siguiente:

Problema 5.3. Encontrar, con regla y compás, la intersección de una recta ℓ con la parábola (F, d) (o sea dados los gráficos de las rectas ℓ y d y el punto F, encontrar los puntos A y B de la Figura 8 *b*)).
Sugerencia: Encontrar el punto T', el punto R simétrico de F respecto a ℓ que es el otro punto de intersección de las circunferencias de la Figura 8 *b*), y la media geométrica de los segmentos $\overline{T'F}$ y $\overline{T'R}$ para determinar A' y B'. ✂

6. El Triángulo de Arquímedes

Consideremos ahora los puntos A y B sobre la parábola, que determinan la recta ℓ. En este caso las tangentes respectivas, que son las mediatrices de los segmentos determinados por F y las proyecciones correspondientes A' y B' se cortan en un punto S. El triángulo ABS, que mostramos sombreado con gris en la Figura 9, es particularmente interesante, y muchas veces se lo llama *triángulo de Arquímedes*.

Sabemos construir un punto T sobre la parábola tal que la tangente correspondiente es paralela a ℓ: T' es la intersección de la perpendicular r a ℓ por F, y la perpendicular a d por T', que ya sabemos es la mediatriz del segmento $\overline{A'B'}$, contiene al punto T. También ya sabemos que S está en la mediatriz del segmento $\overline{A'B'}$. Más aún: si M es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, entonces por ser los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{TT'}$ paralelos, M también estará en esta mediatriz. Resumimos estos resultados:

Resultado 6.1: *Con las notaciones anteriores, los puntos M, S, T y T' están en la mediatriz del segmento $\overline{A'B'}$.*

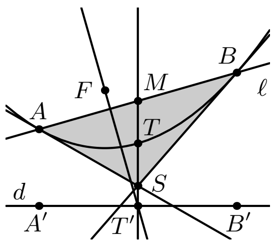


Figura 9

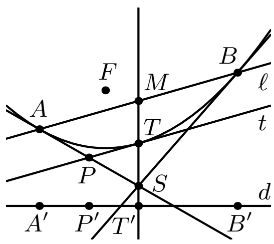


Figura 10

En la Figura 9, podemos ver que T es aproximadamente el punto medio del segmento $\overline{SM}$. El próximo resultado dice que esto es siempre así:

Resultado 6.2: *Con las notaciones anteriores, T es el punto medio del segmento $\overline{SM}$.*

Demostración: Nos valemos de la Figura 10. Allí hemos construido el punto P, intersección de las tangentes por A y por T (a la que llamamos t). También hemos construido el punto P', pie de la perpendicular a d por P. Como sabemos, t es paralela a ℓ, y P' es el punto medio del segmento $\overline{A'T'}$. Más aún, como los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{ST'}$ y $\overline{PP'}$ son paralelos, por Tales sabemos que P es el punto medio del segmento $\overline{AS}$ (aún en el caso extremo en que $S = T'$). Otra vez por Tales, ahora mirando al triángulo ASM, podemos ver que T es el punto medio del segmento $\overline{SM}$. □

También en el transcurso de la demostración hemos visto:

Resultado 6.3: *Con las notaciones anteriores el punto P, intersección de las tangentes por A y por T, es punto medio del segmento $\overline{AS}$.*

Puesto que hay tantos puntos medios dando vueltas, podemos relacionar las áreas de varios de los triángulos que aparecen, en particular nos interesa:

Resultado 6.4: *Con las mismas notaciones, si P y Q son las intersecciones de la tangente por T con las tangentes por A y B respectivamente, entonces*

a) $\text{área}(ABT) = \dfrac{1}{2}\,\text{área}(ABS)$.

b) $\text{área}(APT) + \text{área}(BQT) = \dfrac{1}{2}\,\text{área}(ABT) = \dfrac{1}{4}\,\text{área}(ABS)$.

Demostración: Ilustramos con la Figura 11. Siendo el segmento $\overline{PQ}$ paralelo al segmento $\overline{AB}$, y P el punto medio del segmento $\overline{AS}$, todo triángulo que tenga como "base" al segmento $\overline{AB}$ y tercer vértice en el segmento $\overline{PQ}$ tiene área igual a la mitad del área del triángulo ABS, en particular vale a).

Para b), observamos que

i) $\text{área}(ABT) = \text{área}(AMT) + \text{área}(BMT)$.

ii) El segmento AT es mediana del triángulo ASM, de modo que

$$\text{área}(AMT) = \text{área}(AST) = \frac{1}{2}\,\text{área}(AMS).$$

iii) El segmento $\overline{PT}$ es mediana del triángulo AST, de modo que

$$\text{área}(APT) = \frac{1}{2}\,\text{área}(AST).$$

iv) De *ii*) y *iii*) obtenemos

$$\text{área}(APT) = \frac{1}{4}\,\text{área}(AMS).$$

v) Análogamente, $\text{área}(BQT) = \dfrac{1}{4}\,\text{área}(BMS)$.

vi) De *i*), *iv*) y *v*) obtenemos b). □

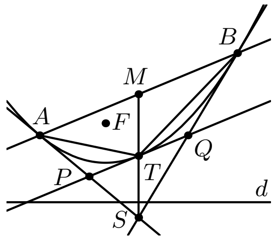


Figura 11

7. La medición del segmento parabólico según Arquímedes

Siguiendo con las mismas notaciones, dados los puntos A y B en la parábola (F, d), el *segmento parabólico entre A y B* es el conjunto de puntos en el interior de la parábola limitados por el segmento $\overline{AB}$, como se indica con gris oscuro en la Figura 12. En esa misma figura, hemos marcado con gris claro el triángulo de Arquímedes ABS, al que ya conocemos.

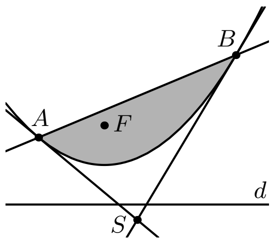


Figura 12

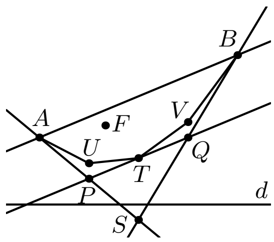


Figura 13

El resultado de Arquímedes es:

Resultado 7.1 (Teorema de Arquímedes): *El área del segmento parabólico entre A y B es exactamente las dos terceras partes el área del triángulo ABS.*

La idea de la demostración es aproximar lo mejor posible el área del segmento parabólico por triángulos que lo vayan encerrando. Por ejemplo, el lector podrá ver el siguiente

Problema 7.2. Demostrar que, con las notaciones de la Figura 11, el triángulo ABS es el triángulo de menor área que tiene como base al segmento $\overline{AB}$ y contiene al segmento parabólico entre A y B. De modo similar, el triángulo ABT es el que tiene mayor área entre los triángulos que tienen como base al segmento $\overline{AB}$ que están contenidos en el segmento parabólico entre A y B. ✂

Demostración del Teorema de Arquímedes (7.1): Nos ayudamos con la Figura 13, donde esta vez no incluimos la parábola para poder distinguir los puntos en la figura.

Si s es el área del segmento parabólico, por inclusiones es claro que

$$\text{área}(ABT) \leq s \leq 2\ \text{área}(ABT).$$

Si quitamos el triángulo ABT del segmento parabólico, nos quedan dos nuevos segmentos parabólicos: entre A y T, y entre T y B, y repetimos el argumento con estos nuevos segmentos parabólicos.

Para ello añadimos los puntos U y V, que son los puntos de la parábola para los que las tangentes son paralelas, respectivamente, a los segmentos $\overline{AT}$ y $\overline{BT}$. Obtenemos

$$\begin{aligned}&\text{área}(ABT) + \text{área}(AUT) + \text{área}(BVT) \le s \le \\ &\qquad\qquad \le \text{área}(ABT) + \text{área}(APT) + \text{área}(QBT),\end{aligned}$$

expresión que podemos simplificar, usando el resultado anterior, puesto que

$$\text{área}(AUT) + \text{área}(BVT) = \frac{1}{2}\,(\text{área}(APT) + \text{área}(QBT)) = \frac{1}{4}\,\text{área}(ABT),$$

y

$$\text{área}(APT) + \text{área}(QBT) = \frac{1}{2}\,\text{área}(ABT).$$

Entonces

$$(1 + \frac{1}{4})\,\text{área}(ABT) \le s \le (1 + \frac{1}{2})\,\text{área}(ABT).$$

Continuando con este proceso n veces, llegaremos a algo como

$$(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n})\,\text{área}(ABT) \le s \le (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2^n})\,\text{área}(ABT).$$

Ahora

$$1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} = \frac{1 - \dfrac{1}{4^{n+1}}}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{4}{3}\Big(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\Big)$$

y

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}\Big(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\Big) + \frac{1}{4^n}.$$

Es claro que a medida que n crece, el área buscada s queda determinada por el valor

$$s = \frac{4}{3}\,\text{área}(ABT) = \frac{2}{3}\,\text{área}(ABS). \qquad \square$$

8. Otras propiedades del triángulo de Arquímedes

Siguiendo con las notaciones anteriores, el triángulo de Arquímedes, ABS en la Figura 14, tiene otras propiedades interesantes. Por ejemplo, los ángulos $\widehat{FAS}$ y $\widehat{FSB}$ coinciden.

Veamos esto: por ser la recta por A y S mediatriz del segmento $\overline{FA'}$, el complementario del ángulo $\widehat{FAS}$ es el ángulo $\widehat{AFA'} = \widehat{AA'F}$. Por otra parte, como

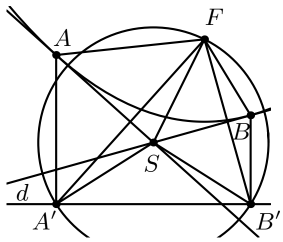


Figura 14

el segmento $\overline{AA'}$ es perpendicular a d, también el ángulo $\widehat{FA'B'}$ es complementario del ángulo $\widehat{AA'F}$, y por lo tanto los ángulos $\widehat{FAS}$ y $\widehat{FA'B'}$ son iguales pues tienen igual complemento.

Ya sabemos que S es el circuncentro del triángulo $A'B'F$, por lo que de la relación ángulo inscripto y central, $\widehat{FSB'} = 2\,\widehat{FA'B'}$. Siendo la recta por S y B mediatriz del segmento $\overline{FB'}$, resulta $\widehat{FSB} = \widehat{BSB'} = \widehat{FA'B'}$, por lo que $\widehat{FAS} = \widehat{FA'B'} = \widehat{FSB}$.

Problema 8.1. Ver que los triángulos FAS y FSB de la Figura 14 son semejantes. En particular, el segmento $\overline{FS}$ biseca al ángulo $\widehat{AFB}$. ✂

Claro que si C es otro punto de la parábola y T es el punto de intersección de las tangentes por A y C, tendremos $\widehat{FAT} = \widehat{FTC}$ (ver Figura 15). Si ahora R es el punto de intersección de las tangentes por B y C, tendremos

$$\widehat{FSR} = \widehat{FSB} = \widehat{FAS} = \widehat{FAT} = \widehat{FTC} = \widehat{FTR}.$$

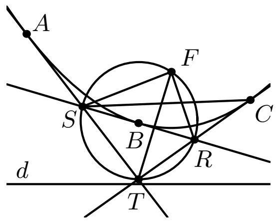


Figura 15

Entonces, el cuadrilátero $FSTR$ se puede inscribir en una circunferencia, como se indica en la Figura 15, es decir obtenemos:

Resultado 8.2: *La circunferencia circunscripta al triángulo STR, formado por la intersección de tres tangentes a la parábola, contiene al foco de la parábola.*

9. Más sobre rectas secantes a la parábola

Ya hemos visto cómo construir una tangente con pendiente dada, y hemos visto que la normal y la perpendicular al eje determinan sobre el eje la “distancia característica”. Tomemos ahora dos puntos sobre la parábola, la recta que pasa por ellos y la mediatriz del segmento que los une. Pensando que cuando ambos puntos coinciden la recta se convierte en tangente y la mediatriz en normal, es natural el siguiente resultado:

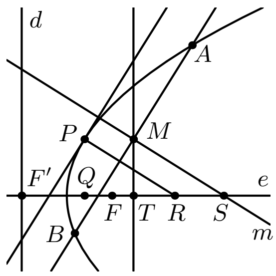


Figura 16

Resultado 9.1: *Sean A y B dos puntos sobre la parábola, m y M respectivamente mediatriz y punto medio del segmento $\overline{AB}$. Sea S la intersección de m con el eje e, y sea T la proyección de M sobre e. Entonces la distancia entre S y T es la distancia característica de la parábola.*

Demostración: Ilustramos con la Figura 16, tomando F' como la proyección de F en d. Sea P el punto de la parábola cuya tangente es paralela al segmento $\overline{AB}$, R la intersección de la normal por P con e, Q la proyección de P sobre e. Entonces, como sabemos, $\overline{QR} = \overline{FF'}$ (i.e. de longitud igual a la "distancia característica"). El triángulo MTS es igual al triángulo PQR, pues P y M están sobre una paralela a e, y el segmento $\overline{PR}$ es paralelo al segmento $\overline{MS}$ (son perpendiculares a la recta por A y B y a la tangente por P). Por lo tanto, los segmentos $\overline{TS}$, $\overline{QR}$ y $\overline{FF'}$ tienen igual longitud. $\square$

Ya sabemos que si dos rectas secantes son paralelas, los puntos medios de las cuerdas están sobre una misma perpendicular a la directriz. El resultado anterior nos dice qué pasa cuando los puntos medios de las cuerdas están sobre una misma perpendicular al eje:

Resultado 9.2: *Sean A, B, C y D cuatro puntos sobre la parábola, m y n mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, M y N sus puntos medios, respectivamente. Si M y N están sobre una misma perpendicular al eje e, entonces m y n cortan a e en un mismo punto (ver Figura 17).*

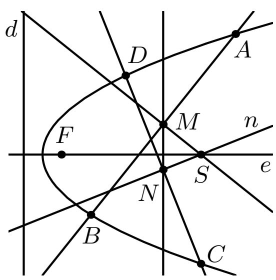


Figura 17

Demostración: Es inmediata a partir del resultado anterior. $\square$

El lector podrá preguntarse cómo hacer para dibujar la Figura 17. La respuesta está en el próximo problema y en que, por un problema anterior, ya sabemos construir la intersección de una recta y una parábola.

Problema 9.3. Sean A y B dos puntos sobre la parábola, m mediatriz del segmento $\overline{AB}$ y M su punto medio. Sea S la intersección de m con el eje e y sea N un punto sobre la perpendicular a e por M que está en el interior de la parábola. Entonces N es punto medio del segmento $\overline{CD}$, donde C y D están sobre la parábola y la mediatriz del segmento $\overline{CD}$ contiene al segmento $\overline{NS}$.
Sugerencia: Trazar la recta perpendicular al segmento $\overline{NS}$ por N. Esta recta corta a la parábola en C y D. Si Q es el punto medio del segmento $\overline{CD}$, ver que $Q = N$ usando el resultado anterior.

10. Un poco de geometría analítica y cálculo

Si bien estamos jugando a que no vamos a usar coordenadas ni cálculo, es interesante ver desde este punto de vista las construcciones que estamos realizando.

Sabemos que si disponemos de ejes cartesianos, y la directriz d es paralela al eje de las x's, entonces la parábola puede describirse con la ecuación $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, para constantes a, b y c adecuadas, $a \neq 0$.

Por ejemplo, si los puntos $A = (x_A, y_A)$ y $B = (x_B, y_B)$ están sobre la parábola, entonces el punto medio entre A y B, que hemos llamado M en la Figura 10, tiene por coordenadas $M = (x_M, y_M)$ donde

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad \text{y} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1}{2}\, a(x_A^2 + x_B^2) + \frac{1}{2}(x_A + x_B) + c.$$

Más aún, si usamos cálculo, sabemos que la recta tangente a la parábola en el punto (x, y) tiene pendiente dada por la derivada, $y' = f'(x) = 2ax + b$. Por ejemplo, las tangentes por los puntos A y B tienen ecuaciones:

$$t_A : y - y_A = (2ax_A + b)\,(x - x_A) \quad \text{y} \quad t_B : y - y_B = (2ax_B + b)\,(x - x_B),$$

y se cortan en el punto $S = (x_S, y_S)$. Para encontrar estas nuevas coordenadas podemos, por ejemplo, despejar primeramente y_S, obteniendo

$$(2ax_A)\,(x_S - x_A) + ax_A^2 + bx_A + c = (2ax_B)\,(x_S - x_B) + ax_B^2 + bx_B + c,$$

de donde resulta, con un poco de álgebra, que $x_S = (x_A + x_B)/2$, es decir, $x_S = x_M$, como ya vimos.

También el punto T de la Figura 10 es el previsto por el Teorema de Rolle: dados x_A y x_B, existe ξ entre x_A y x_B tal que

$$f'(\xi) = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A},$$

lo que aquí se traduce en que existe ξ tal que

$$f'(\xi) = 2a\xi + b = \frac{a(x_B^2 - x_A^2) + b(x_B - x_A)}{x_B - x_A} = a(x_B + x_A) + b.$$

Despejando, resulta $\xi = (x_A + x_B)/2$. Como ξ es la coordenada x de T, resulta que M, S y T tienen todos la misma coordenada x.

Problema 10.1. En base a las ecuaciones anteriores, demostrar que T es el punto medio de M y S. ✂

Problema 10.2. Sin usar cálculo, encontrar la pendiente de la recta tangente (es decir la derivada) en términos de los coeficientes a, b y c, usando que la tangente a la parábola en un punto es una mediatriz. ✂

11. Construcción de la parábola a partir de otros elementos

Sigamos con el uso de coordenadas, con la directriz d paralela al eje de las x's. Si conocemos tres puntos sobre la parábola, podemos encontrar su ecuación y determinarla completamente (en general, para un polinomio de grado n necesitamos $n+1$ puntos). Tendríamos tres ecuaciones que forman un sistema lineal (de Van der Monde) y tres incógnitas, a, b y c. Estaríamos tentados de decir que la parábola tiene "tres grados de libertad": los coeficientes a, b y c. Pero nos estaríamos olvidando que tenemos otro dato: d es paralela al eje de las x's, es decir tenemos además la pendiente de d.

Más bien debemos pensar que la parábola tiene "cuatro grados de libertad", pensando que un punto de la parábola determina un grado, así como la tangente en un punto, o la pendiente de d, o que d pasa por cierto punto, pero el foco determina dos grados[4], así como la directriz.

En particular, podemos reconstruir la parábola (encontrar su foco y directriz) si conocemos 4 de sus puntos, resultado debido a Newton (es interesante saber que el se preocupaba por este tipo de problemas) y que se puede ver, por ejemplo, en Dörrie [1].

En este sentido, la parábola es aún más sencilla que un cuadrilátero: con 4 puntos no alcanzamos a determinar el cuadrilátero que los contiene, salvo que sepamos que son los vértices o que tienen alguna otra particularidad.

También podemos relacionar con otras cónicas: para una circunferencia necesitamos 3 grados de libertad: el centro (equivalente al foco en la parábola: dos grados) y el radio (otro grado), pero también podemos obtener la circunferencia a partir de 3 puntos sobre ella. En general, para una cónica necesitamos 5 datos (o grados de libertad), resultado asociado a los nombres de Pascal, Brianchon y Desargues y a la geometría proyectiva. Así, dados 5 puntos sobre una cónica podemos determinarla completamente, pero para una parábola bastan 4 y para una circunferencia bastan 3.

Presentamos ahora algunos problemas basados en la idea de los "cuatro datos", dejando algunas indicaciones para el lector impaciente, aunque seguramente el lector inquieto pensará en otras alternativas.

Problema 11.1. Construir con regla y compás el foco dados la directriz y dos puntos sobre la parábola.
Nota: en general hay dos soluciones.
Sugerencia: trazar los pies y circunferencias. ✂

Problema 11.2. Construir con regla y compás la directriz dados el foco y dos puntos sobre la parábola.
Nota: hay dos soluciones.

[4] Todos los puntos son iguales... pero hay algunos más iguales que otros.

Sugerencia: ¿cómo se traza una tangente exterior a dos circunferencias? ✂

Problema 11.3. Construir con regla y compás la directriz dados el foco y dos rectas tangentes.
Nota: no se dan los puntos de tangencia.
Sugerencia: Encontrar simétricos de F respecto a las rectas dadas. ✂

Problema 11.4. Construir con regla y compás la directriz dados el foco, un punto sobre la parábola y su tangente. Repetir para el caso en que la tangente no pasa por el punto dado.
Nota: En el primer caso hay una solución, en el otro, dos.
Sugerencia: *a*) trazar el simétrico de F respecto de la tangente, *b*) ¿cómo se traza la tangente a una circunferencia que pasa por un punto? ✂

Problema 11.5. Construir con regla y compás la directriz dados el foco, el eje y un punto sobre la parábola.
Nota: Observar que en este caso el foco y el eje dan sólo "dos grados de libertad".
Sugerencia: Trazar una circunferencia con centro F y radio A (el punto dado sobre la parábola), cortando al eje en dos puntos. ✂

Problema 11.6. Construir con regla y compás la directriz y el foco dados dos puntos de la parábola y sus respectivas tangentes.
Sugerencia: Usar problemas anteriores y que F es punto medio de las intersecciones de la tangente y la normal por un punto de la parábola con el eje (trazar rectas de "puntos medios"). ✂

Problema 11.7. Construir con regla y compás la directriz y el foco dados dos puntos sobre la parábola y el eje.
Nota: Los puntos no deben ser simétricos uno del otro respecto del eje.
Sugerencia: Considerar el punto medio M entre A y B, los puntos de la parábola. Las intersecciones de la mediatriz por M y la perpendicular al eje por M determinan el "distancia característica" de la parábola. Con este parámetro y una perpendicular al eje por A se pueden construir la tangente y la normal por A, y se reduce a un problema anterior. ✂

Problema 11.8. Construir con regla y compás el foco y la directriz de la parábola, dadas cuatro rectas tangentes.
Nota: Observar que no se dan los puntos de tangencia, sólo las rectas.
Sugerencia: Usar que triángulos formados por la intersección de tangentes tienen circunferencias circunscriptas que pasan por F. ✂

Referencias

[1] H. Dörrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution*. Dover, 1965.

[2] L. A. Santaló: *La Geometría en la Enseñanza de los Profesores*. Editorial Red Olímpica, 1993.