

Investigación y Docencia

por Néstor Aguilera

El seno, el ocho y el caracol

Introducción

El seno y otras funciones trigonométricas aparecen en muchos modelos matemáticos, lo que afortunadamente se refleja en cómo se introducen en la enseñanza. Primero las estudiamos a partir de la semejanza de triángulos y vemos cómo “resolver” triángulos; luego las estudiamos mirando a un punto que se mueve sobre la circunferencia unitaria; y más adelante, ya con herramientas de cálculo, en las soluciones de ecuaciones diferenciales al estudiar fenómenos periódicos como las vibraciones.

Hay una diferencia marcada entre las dos primeras etapas. En la primera, cuando se estudian semejanzas de triángulos, el concepto de función no es muy explícito y los ángulos que intervienen se expresan en grados. A partir de la segunda etapa en cambio, el concepto de función es bien explícito y los argumentos pasan a expresarse en radianes que más tarde en realidad se piensan como números reales y no como ángulos. Esta equivalencia entre grados, radianes y reales, nos obliga a una “traducción” entre estos conceptos, como si tuviéramos que pensar en dos idiomas diferentes a la vez. Más aún, es muy posible que para ciertas tareas “funcionemos en modo grados” y para otras “en modo radianes”.

Claro que desde el punto de vista del aprendizaje estas “traducciones” son difíciles de encarar, y aún la gente grande (como yo) a veces tiene problemas con esta traducción.

En estas notas vamos a situarnos en el nivel donde recién se comienzan a estudiar las funciones trigonométricas expresadas en radianes o reales (pero haciendo uso indistinto de grados o radianes), para explorar algunas propiedades del seno.

Nuestra exploración comienza con un modelo concreto del gráfico del seno, viendo algunas propiedades conocidas y otras que no lo son tanto. Continuamos en la Sección 2 tratando de dar una expresión matemática para escribir el número “8”, encontrando la lemniscata de Gerono, y a partir de la cual construimos una vistosa guarda para un vaso. Muchas de estas exploraciones se basan en enrollar un rectángulo alrededor de un cilindro, y al hacer un estudio detallado de este proceso en la Sección 3, encontramos otra curva clásica: la del “caracol” o cocleóide.

Si bien el nivel de las notas es elemental, he incluido algunos pocos problemas (que están señalados) donde el conocimiento de cálculo permite avanzar más.

1. Manos a la obra

Es usual hacer el primer gráfico del seno entre 0 y 2π , pero aquí lo hacemos entre $-\pi$ y π , como en la Figura 1, para ilustrar algunas de sus propiedades.

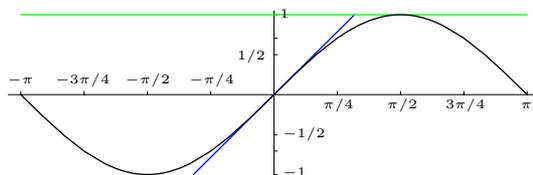


Figura 1: el gráfico del seno entre $-\pi$ y π

En las abscisas están marcados algunos puntos importantes, pero faltan otros como $\pi/3$ o $\pi/6$, que no hemos incluido para no “ensuciar” nuestro gráfico, y suponiendo que el lector ya los conoce.

Hemos remarcado además las tangentes en 0 y $\pi/2$. La primera, en azul, nos dice que

$$\text{sen}(x) \approx x \quad \text{para } x \text{ próximo a } 0,$$

mientras la segunda tangente, en verde, nos dice que

$$\text{sen}(x) \approx 1 \quad \text{para } x \text{ próximo a } \pi/2.$$

A partir de este gráfico y como preludeo al resto del artículo, en esta sección haremos varios experimentos prácticos. Para hacerlos necesitaremos tener el gráfico en un papel, o mejor cartulina, en forma de rectángulo, y una tijera o cortaplumas. Como es importante que el gráfico esté bien dibujado, en la Figura 21 al final de este artículo he incluido uno suficientemente grande que se podrá recortar para hacer el experimento (... pero no he incluido tijeras o cortaplumas).

Ayudados por el esquema de la Figura 2, preparamos ahora nuestro material de laboratorio recortando el rectángulo a lo largo de la curva del seno, quedando dos regiones (indicadas con distintas tonalidades en la figura) que separamos.

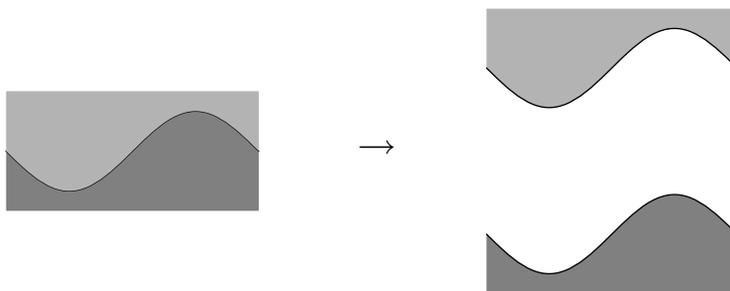


Figura 2: recortando el gráfico del seno

Nuestro primer experimento será sencillo: vamos a rotar una de las partes 180° , como se indica en la Figura 3 *a*) y *b*), dejándolas paralelas como en *c*).

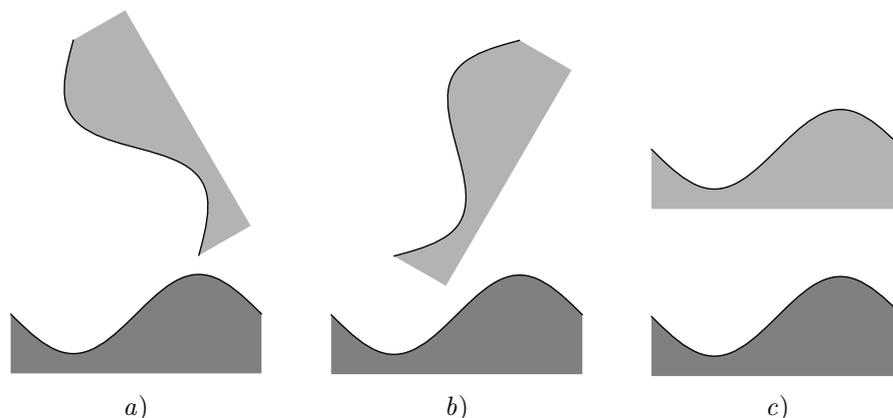


Figura 3: rotando una parte

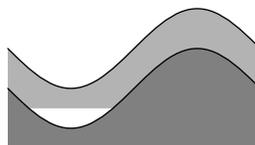


Figura 4: las partes son iguales

Si ahora superponemos las dos partes, como indicamos en la Figura 4, podemos ver que ambas regiones son exactamente iguales.

La primer pregunta es, claro,

Pensar antes de seguir: *¿Por qué las dos partes son iguales?* >

Como el lector habrá concluido, que las dos partes sean iguales está relacionado con que el seno es una función *impar*, es decir, $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$. Decir que una función es impar es lo mismo que decir que su gráfico es simétrico respecto del origen, y a su vez, simetría respecto del origen es lo mismo que hacer una rotación de 180° . Este proceso es el que se puede ver recorriendo en orden inverso los gráficos de la Figura 4, Figura 3 c), b), a), y finalmente la Figura 2.

En definitiva, en nuestro primer experimento hemos hecho una comprobación práctica de que el seno es impar en $(-\pi, \pi)$, y el procedimiento podría hacerse con cualquier otro gráfico para determinar si una función es impar o no (sobre un intervalo simétrico respecto al origen).

Para pensar: *¿Cómo haríamos para ver que una función es par (la función f definida sobre un intervalo simétrico respecto del origen es par si $f(x) = f(-x)$ para todo x en el intervalo)?* >

Una vez concluido nuestro primer experimento, sabiendo que las dos partes son iguales, podemos poner una de ellas a uno u otro lado de la restante, como indicamos en la Figura 5 (en la figura mostramos como si tuvieramos una tercera parte). En cualquier caso vemos que las partes se “pegan” perfectamente, debido a la periodicidad.

Sin embargo, esta no es una “demostración” de la periodicidad en el mismo sentido del primer experimento, pues la función puede continuarse suavemente



Figura 5: periodicidad del seno

de muchas maneras distintas. En particular, necesitaríamos el valor de la función para todo x .

Problema 1.1: Si la función f , definida sobre todo \mathbb{R} es impar y tiene período 2π , entonces:

- Su gráfico es simétrico respecto de cualquier punto de la forma $(k\pi, 0)$ con k entero.
- En particular, $f(\pi) = 0$.
- ¿Es el gráfico necesariamente simétrico respecto de la recta $x = \pi/2$? ∞

Problema 1.2: Si la función f definida sobre todo \mathbb{R} es impar y simétrica respecto de la recta $x = a$ (donde $a \neq 0$), entonces tiene período (no necesariamente el mínimo) $4a$. ∞

Habiendo “jugado” a este “Tetrix” con figuras planas, es hora de intentar ir a tres dimensiones.

Volviendo a nuestros dos trozos con la función seno, tomemos uno de ellos y enrollémoslo, juntando los lados que corresponden a $x = -\pi$ y $x = \pi$, para formar un cilindro con una base circular formada por el borde paralelo al eje x original. No estaría demás pegar los bordes que ahora están juntos con cinta adhesiva o con “clips”.

Pensar antes de seguir: ¿Qué es lo que obtenemos? ∞

Si no conocemos la respuesta de antemano y no hacemos el “experimento”, se necesita una muy buena intuición espacial para predecir el resultado. Teniendo cuidado en nuestra construcción veremos, quizás con alguna sorpresa, que hemos obtenido un cilindro truncado por un plano oblicuo. Para comprobarlo, bastará apoyarlo sobre la base correspondiente al gráfico del seno.

En la Figura 6 vemos el proceso de “enrollado”. Para ayudarnos visualmente, el gráfico del seno está remarcado en azul y los bordes del papel original que terminan juntándose están remarcados en verde. La sucesión de figuras debe verse de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo.

En la Sección 3 veremos con detalle por qué el objeto final es un cilindro truncado, aunque desde ya alentamos al lector para que lo piense ahora. Planteamos mientras tanto un problema más sencillo, teniendo en cuenta la construcción sugerida en la Figura 6.

Problema 1.3: Si el rectángulo de la Figura 21 tiene ancho 2π y altura 2,

- ¿cuál es el radio del cilindro que se obtiene al enrollar el rectángulo?
 - suponiendo que efectivamente se obtenga un cilindro cortado por un plano, ¿qué ángulo forma este plano con el eje del cilindro?
- Sugerencia:* ¿cuáles son las alturas máxima y mínima de la curva? ∞

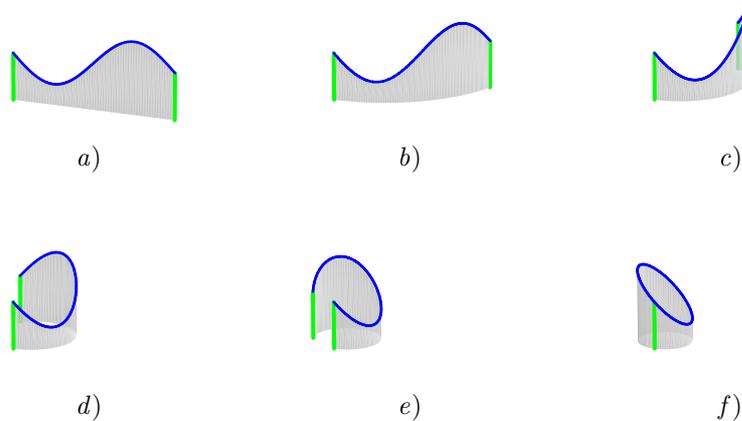


Figura 6: enrollando el seno

2. El ocho

Basados en la descripción de una circunferencia de radio r y centro en (a, b) como los puntos $(x(\theta), y(\theta))$ tales que

$$x(\theta) = a + r \cos(\theta) \quad \text{y} \quad y(\theta) = b + r \sin(\theta),$$

nuestro próximo objetivo es tratar de dibujar una curva en forma de ocho, “8”.

Podemos empezar mostrando cómo dibujan un “8” los profesionales, recurriendo a los tipos de letras de las computadoras (a veces llamados “fuentes” o “fonts” en inglés). En la Figura 7 mostramos el resultado usando los tipos “Times”, “Courier” y “Helvetica”.

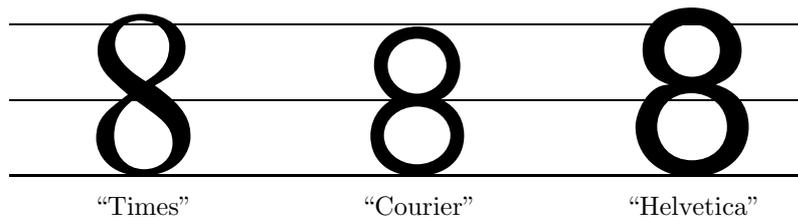


Figura 7: gráfico del ocho

Como se puede observar, el bucle en la parte superior es un poco más chico que el de la parte inferior. Además, por ejemplo en “Times”, los trazos que se cruzan en el centro tienen distinto grosor.

Nuestro propósito va a ser mucho más humilde, y buscaremos una curva en el plano pidiendo que su gráfico sea simétrico respecto de ambos ejes (y por lo tanto respecto del origen). Por supuesto, nuestra curva no sólo no va tener grosor variable, sino que en realidad ¡no tiene grosor!

Una primera posibilidad es pensar que el ocho está formado por dos circunferencias, una arriba de la otra, como se muestra en la Figura 8.

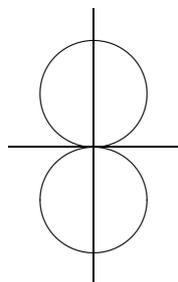


Figura 8: una circunferencia arriba de otra

Esta solución es completamente satisfactoria, pues el gráfico es similar al tipo “Courier” que mostramos anteriormente, y de hecho mucha gente dibuja el ocho de esta forma.

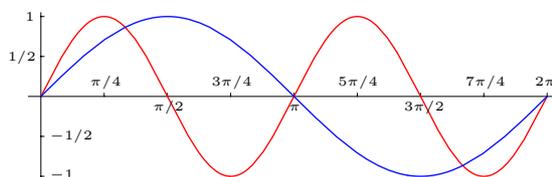
Pero pensemos otras alternativas, por ejemplo que los bucles de arriba y de abajo se cortan en un ángulo, como en el tipo “Times”, y que dibujamos el ocho con un movimiento continuo, comenzando desde el centro hacia arriba y a la derecha, completando el lazo de arriba, pasando nuevamente por el centro pero ahora hacia la derecha y abajo, y completando el lazo de abajo para volver en el centro.

Nuestra curva no podrá expresarse como $y = f(x)$ o $x = g(y)$ (¿por qué?), de modo que pensando que las coordenadas del movimiento dependen del tiempo t , estamos buscando expresiones $x(t)$ y $y(t)$.

Pensando sólo en los valores de x , tenemos un movimiento oscilatorio que empieza en $x = 0$, llega a un máximo, vuelve a 0 hasta llegar a un mínimo, regresa al 0, y vuelta al máximo y al mínimo. Es decir, nuestro $x(t)$ realiza 2 vueltas en el lapso en que trabajamos.

Por otra parte, mirando a los valores de y , vemos que empezamos desde 0, vamos a un máximo, después a un mínimo pasando por 0 y volvemos a 0 para terminar. Es decir, nuestro $y(t)$ realiza sólo una vuelta en el transcurso del dibujo.

Si nuestra variable t varía entre 0 y 2π , $y(t)$ podría representarse por $\text{sen}(t)$, puesto que empieza en 0, llega a un máximo, vuelve a un mínimo y termina en 0. En cambio, como $x(t)$ realiza dos veces este recorrido, podemos pensar en representarlo por $\text{sen}(2t)$, de modo de realizar dos vueltas.

Figura 9: gráficos de $x(t)$ (en rojo) y $y(t)$ (en azul)

En la Figura 9 está el gráfico de estas dos funciones,

$$x(t) = \text{sen}(2t) \quad \text{y} \quad y(t) = \text{sen}(t), \quad (2.1)$$

donde hemos trazado en rojo el gráfico de x y en azul el gráfico de y (el eje de abscisas es t). Observando este gráfico con cuidado, podemos entender mejor el gráfico de la curva $(x(t), y(t))$, que mostramos en la Figura 10. Por ejemplo, los valores de $x(t)$ y $y(t)$ son ambos nulos para $t = 0, \pi$ y 2π . Entre 0 y π , los valores de $y(t)$ son positivos, pero los valores de $x(t)$ toman ambos signos. Entre π y 2π los valores de $y(t)$ son ahora negativos, pero $x(t)$ sigue tomando cualquier signo.

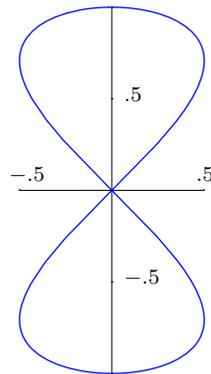
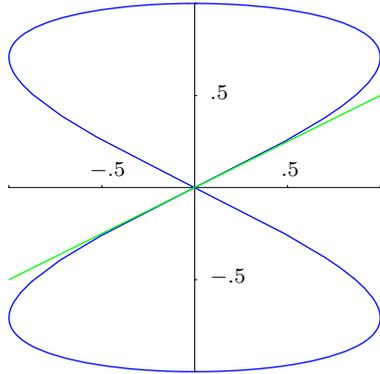


Figura 10: gráfico de la curva $(x(t), y(t))$ Figura 11: lemniscata de Geronon

En la Figura 10 también hemos dibujado la “tangente” (una de las dos) por el origen en color verde que, como se puede apreciar, tiene pendiente $1/2$. Para calcular esta pendiente, podríamos recordar que $\text{sen}(t) \approx t$ si $t \approx 0$ y por lo tanto cuando t está cercano a 0 tenemos

$$x(t) = \text{sen}(2t) \approx 2t \quad \text{y} \quad y(t) = \text{sen}(t) \approx t,$$

o

$$(x(t), y(t)) \approx (2t, t) = t(2, 1).$$

También podríamos hacer un estudio más formal usando derivadas:

Problema 2.1 (requiere derivadas): Con las ecuaciones en (2.1), y pensando que t indica tiempo:

- Calcular el vector velocidad en cada instante.
- Ver que la magnitud de la velocidad no es constante, pero nunca se anula.
- ¿En qué instantes la velocidad tiene máxima magnitud?, ¿y mínima?
- Ver que la tangente a la curva para $t = 0$ tiene pendiente $1/2$. \gg

Nuestro ocho parece un poco ancho (o chato), lo que no sucedía con las circunferencias una arriba de la otra en la Figura 8, ni tampoco con los tipos de la Figura 7. Elaborando sobre estas ideas, vemos que en el ocho el recorrido en y es aproximadamente el doble del recorrido en x . Como $\text{sen}(2t) = 2 \text{sen}(t) \cos(t)$, podemos recortar el recorrido en x definiendo nuestras nuevas funciones x y y como

$$x(t) = \text{sen}(t) \cos(t) \quad \text{y} \quad y(t) = \text{sen}(t). \quad (2.2)$$

El resultado de nuestros esfuerzos puede verse en la Figura 11 (dibujada a la misma escala de la Figura 10). Esta curva se conoce como¹ “el ocho” o “lemniscata de Gerono”, en honor a C. C. Gerono (1799–1891), matemático francés quien fue uno de los primeros en estudiarla.

Quizás el lector esté más familiarizado con la lemniscata de Bernoulli que en coordenadas polares tiene ecuación

$$\rho^2 = a^2 \cos(2\theta),$$

y que generalmente se introduce como ejemplo al estudiar (justamente) coordenadas polares.

Jacob Bernouilli publicó esta curva en 1694, describiéndola como *con la forma de un 8, o un nudo, o un moño de una cinta*. El término “lemniscata” viene del latín “lemniscus”, que significa cinta colgante.

La lemniscata de Bernouilli tiene la propiedad interesante de ser la imagen de una hipérbola mediante la inversión respecto del círculo más pequeño tangente a ambas ramas.

En la Figura 12 ponemos lado a lado ambas lemniscatas, poniendo la de Gerono inclinada, para que el lector pueda apreciar la diferencia entre ellas. Ambas están dibujadas en la misma escala, con $-1 \leq x \leq 1$ y $-.5 \leq y \leq .5$.

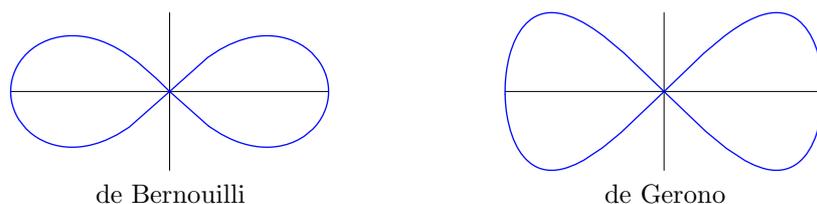


Figura 12: lemniscatas

Parece importante recalcar que en nuestras ecuaciones (2.2) para describir la lemniscata de Gerono, la variable t no representa el ángulo polar. Quizás esto quedará más claro después del siguiente problema:

Problema 2.2: En las ecuaciones (2.2):

- a) Encontrar la relación entre el ángulo polar, θ , y la variable t .
- b) Encontrar las ecuaciones en coordenadas polares de la lemniscata de Gerono. >

Para terminar nuestra colección, no podemos dejar de mencionar otro ocho popular: el de las pistas de autos y trenes de juguete, esquematizado en la Figura 13.

Este ocho está formado por los arcos de circunferencia DF y EG y los segmentos DG y FE . Las circunferencias, de centros O_1 y O_2 , tienen el mismo radio r , y el ocho está dispuesto simétricamente respecto del punto medio C y la recta AB , de modo que el ángulo $\widehat{DO_1O_2}$ mide α .

En el caso de los autos y trenes de juguete, α es generalmente 45° o 60° (que hemos tomado en la figura). Vale la pena observar que en el caso extremo de $\alpha = 0^\circ$, recuperamos el ocho de la Figura 8.

¹¡sorprendentemente!

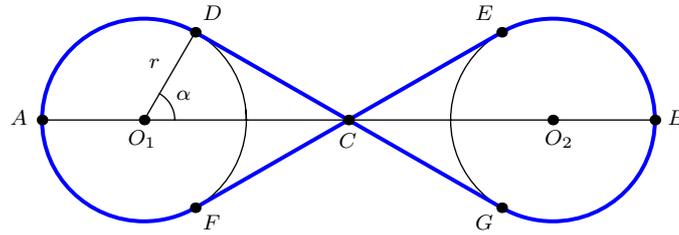


Figura 13: el ocho formado por un tren de juguete

Ejercicio 2.3: A los padres generalmente les preocupa el espacio ocupado por la pista: dados r y α , ¿cuál es ancho y largo (AB) de la pista en la Figura 13? ∞

Habiendo visto varias posibilidades y llegado a una curva que desde hace siglos se conoce como “el ocho”, damos por terminada nuestra búsqueda, aunque no nuestra exploración.

No hay nada que nos impida trabajar con valores de t no comprendidos entre 0 y 2π en las ecuaciones (2.2), si bien al volcar los valores de $x(t)$ y $y(t)$ para otros valores de t no observemos cambios en la Figura 11. Para observar los cambios, podemos incluir una nueva coordenada, z , y representar nuestra función en el espacio (x, y, z) como

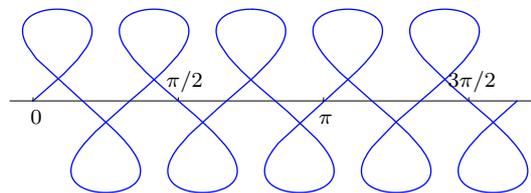
$$x(t) = \sin(t) \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad z(t) = t.$$

En este caso, la figura original (Figura 11) puede pensarse como la curva en el espacio vista desde un punto “muy arriba” en el eje z , siendo que el gráfico de esta nueva curva es una especie de hélice o resorte que se entrecruza en tres dimensiones.

Esto nos da la idea de que podríamos extender el resorte para obtener una curva nuevamente plana, como mostramos en la Figura 14. Esta nueva curva tiene por ecuación

$$x(t) = at + \sin(t) \cos(t), \quad y(t) = \sin(t), \quad (2.3)$$

donde agregamos el término at en la definición de $x(t)$.

Figura 14: Una guarda “estirando” el ocho ($a = 1/6$)

En la Figura 14, hemos presentado 5 “vueltas” pero podemos pensar que se extiende indefinidamente hacia uno y otro lado, tomando valores de t arbitrarios.

Por otra parte, hemos tomado el valor $a = 1/6$ para producir un efecto visual más o menos agradable, pero a (que es fijo para cada curva) podría tomar cualquier valor real. Cuando $a = 0$ recuperamos el “ocho” de la Figura 11, y a

medida que aumentamos a obtenemos curvas que se van intersecando cada vez menos, como mostramos en la Figura 15 (las figuras están a distintas escalas).

Para ayudarnos a entender la influencia de a en el gráfico, pensemos que mientras dibujamos el “ocho” original alguien nos corre el papel a velocidad constante, como en los sismógrafos o los encefalogramas. En este caso, a representa la velocidad con la que el papel se está moviendo (hacia la izquierda si a es positivo y hacia la derecha si es negativo).

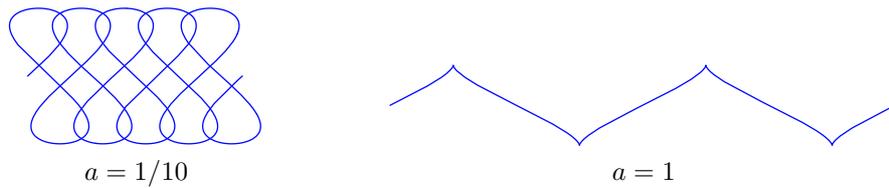
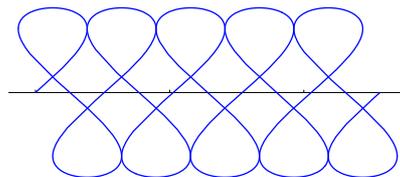


Figura 15: guardas para distintos valores de a

Problema 2.4 (relacionar con los Problemas 1.1 y 1.2): Teniendo en cuenta las ecuaciones (2.3), con a arbitrario (pero fijo):

- a) Ver que $x(t)$ y $y(t)$ son funciones impares; $y(t)$ es periódica, pero $x(t)$ no lo es si $a \neq 0$.
- b) La curva en la ecuación (2.3) no es el gráfico de una función, pero es simétrica respecto del punto $(0,0)$, y periódica en el sentido que existe c ($c \neq 0$) tal que si (x, y) es un punto de la curva, entonces $(x \pm kc, y)$ también está sobre la curva para cualquier k entero (basta con tomar $k = 1$).
- c) Ver que la curva es simétrica respecto de la recta $x = a\pi/2$. >⌘

Problema 2.5 (más fácil con derivadas): ¿Qué valor de a debemos poner para obtener una figura como la siguiente, donde los lazos son tangentes?



Sugerencia: repasar con atención el Problema 2.4. Si se usan derivadas, dar condiciones sobre los puntos donde $x(t)$ cambia de sentido.

Respuesta: $a \approx 0.128375$. >⌘

Problema 2.6: Encontrar ecuaciones similares a las (2.3) para describir la siguiente curva (que a veces se usa para representar un resorte):



Sugerencia: ¿qué curva se obtendría si $a = 0$?

✂

Como anticipo de la próxima sección y repaso de la anterior, mostramos en la Figura 16 el efecto de enrollar un rectángulo que contiene una guarda (como la de la Figura 14 pero con 10 “vueltas”) para formar un cilindro.

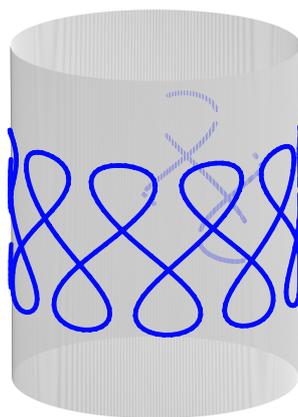


Figura 16: la guarda alrededor de un cilindro

3. La cocleoide: la figura del caracol

Presentamos ahora una forma de describir analíticamente el proceso de “enrollado” que hemos usado en las Figuras 6 (para el seno) y 16 (para la guarda). En ambos casos podemos considerar que la curva plana (el seno o la guarda) está contenida dentro de un rectángulo, y nos interesa describir entonces el proceso de “enrollado” de un rectángulo que inicialmente está en dos dimensiones, como mostramos en la Figura 17, donde los bordes que se van a juntar están remarcados en verde.



Figura 17: enrollando un rectángulo

Para la descripción analítica del proceso, debemos introducir coordenadas. Supongamos entonces que el rectángulo inicial, que puede o no contener una curva, “vive” en el plano de coordenadas (u, v) y está descrito por

$$\{(u, v) : a \leq u \leq b \text{ y } c \leq v \leq d\}, \quad (3.1)$$

y queremos enrollarlo en el espacio de coordenadas (x, y, z) . Esto se puede hacer de muchas maneras, y nosotros hemos elegido una disposición como se muestra

en la Figura 18 donde están remarcados los semiejes positivos², pensando al rectángulo inicialmente sobre el plano $x = 0$, y lo enrollamos manteniendo una arista del rectángulo sobre el eje z y un vértice sobre el origen $(0, 0, 0)$.

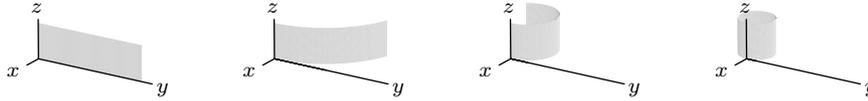


Figura 18: ubicando el rectángulo mientras se enrolla

Para estudiar el problema, pensemos primero el problema similar con una dimensión menos, donde queremos pasar de un segmento de extremos a y b a una circunferencia que tendrá radio $R = (b - a)/(2\pi)$. Equivalentemente, podemos pensar que estamos mirando al rectángulo “desde arriba” de modo que sólo lo vemos “de canto”.

Supongamos que nuestro segmento está inicialmente en la recta de coordenadas u (Figura 19 a), y que la circunferencia final está en el plano de coordenadas (x, y) , pasa por el origen y tiene centro en la parte negativa del eje x (Figura 19 c). Pensando que trasladamos primeramente el segmento al eje y positivo (Figura 19 b), una posible “transferencia” de puntos del segmento hacia la circunferencia final podría darse mediante las funciones

$$x(u) = R(\cos(\alpha) - 1), \quad y(u) = R \sin(\alpha),$$

de modo que la circunferencia tiene centro sobre el semieje negativo x y es tangente al eje y . Nuestro problema ahora es determinar α en términos de u .

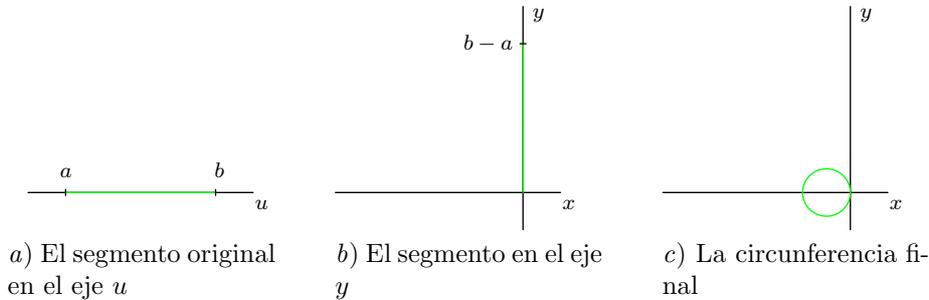


Figura 19: Transformando el segmento en circunferencia

Lo más sencillo es hacer variar α linealmente en el intervalo $a \leq u \leq b$, proponiendo que tenga el valor 0 para $u = a$, y el valor 2π para $u = b$. Entonces ponemos

$$\alpha(u) = \frac{2\pi}{b - a}(u - a),$$

y recordando que $R = (b - a)/(2\pi)$, podemos escribir sencillamente

$$\alpha(u) = (u - a)/R.$$

²cada uno con distintas longitudes, pero que se mantienen en las sucesivas figuras.

Si ahora queremos hacer el efecto de “transición” del segmento a la circunferencia, podemos pensar que las imágenes intermedias están en circunferencias de radio r con centro en el semieje negativo x y son tangentes al eje y . Si pensamos que el segmento está inicialmente sobre una circunferencia de radio “infinito”, debemos hacer variar r desde “infinito” hasta llegar a $r = R$. Por lo tanto, extendiendo naturalmente las ecuaciones anteriores, podríamos poner ahora

$$\begin{aligned}x(r, u) &= r (\cos(\alpha(r, u)) - 1), \\y(r, u) &= r \operatorname{sen}(\alpha(r, u)), \\ \alpha(r, u) &= \frac{u - a}{r},\end{aligned}$$

para $r \geq R$.

Vemos que de este modo reproducimos las ecuaciones que teníamos para $r = R$. También vemos que para un r intermedio, $r > R$, los valores de $\alpha(r, u)$ están entre 0 y $(b - a)/r$, y entonces la longitud ocupada por la imagen del segmento (para r fijo) es

$$\frac{b - a}{r} r = b - a,$$

como es de esperar.

En la Figura 20 graficamos lo que hemos obtenido. En verde están el segmento inicial y los arcos de circunferencias (que tienen igual longitud) para valores intermedios. El segmento inicial tiene un extremo en el origen y el otro en $(0, 1)$. La curva en negro está formada por los extremos de los arcos verdes, y por lo tanto tiene ecuaciones paramétricas (dependiendo del radio r):

$$x(r) = r (\cos(1/r) - 1), \quad y \quad y(r) = r \operatorname{sen}(1/r).$$

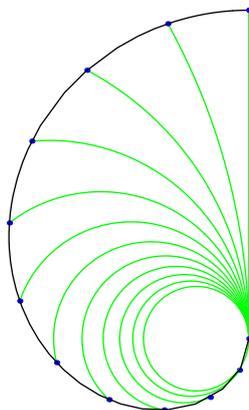


Figura 20: la cocleioide o figura del caracol

Esta curva es (parte de) la *cocleioide* o curva con forma de caracol, que tiene ecuación paramétrica $((\cos(t) - 1)/t, \operatorname{sen}(t)/t)$.

El nombre, dado por Bentham y Falkenburg en 1884, viene del griego “koklias” que significa caracol. La curva fue estudiada primeramente por J. Peck en 1700.

La versión latina de “koklias” es “cochleare” de donde viene “cuchara”, así que también podríamos llamarla “curva de la cuchara”.

Problema 3.1: Encontrar la ecuación en coordenadas polares de la cocleioide. >

Problema 3.2 (requiere cálculo): La cocleioide también se puede describir de la siguiente forma: supongamos que tenemos una circunferencia con centro en $(0, 0)$ y radio 1; para un ángulo θ dado, consideremos el arco entre $(1, 0)$ y $(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$, y su baricentro, $m(\theta)$. Al variar θ , $m(\theta)$ describe la cocleioide. >

Pasar ahora a una dimensión más es sencillo, pues (ver Figura 18) las alturas se mantienen. Recordando que el rectángulo está inicialmente en el plano de coordenadas (u, v) y está descrito por (3.1), y el espacio tiene coordenadas (x, y, z) , podemos poner

$$\begin{aligned}x(r, u, v) &= r (\cos(\alpha(r, u)) - 1), \\y(r, u, v) &= r \operatorname{sen}(\alpha(r, u)), \\z(r, u, v) &= v - c, \\ \alpha(r, u) &= \frac{u - a}{r}.\end{aligned}$$

De aquí que una curva plana que puede describirse paramétricamente como $(u(t), v(t))$ como la del seno en la Figura 1 o en la Figura 21, o la guarda de la Figura 14, pueda “enrollarse” en un cilindro mediante las ecuaciones paramétricas

$$x(t) = R (\cos(\alpha(t)) - 1), \quad y(t) = R \operatorname{sen}(\alpha(t)), \quad y \quad z(t) = v(t) - c,$$

donde $R = (b - a)/(2\pi)$, a y b son los extremos en u de la imagen inicial, c el extremo inferior en v , y $\alpha(t) = (u(t) - a)/R$.

En el caso particular de la curva $(t, \operatorname{sen}(t))$, donde $a = -\pi$ y $b = \pi$, $c = -1$, queda $R = 1$ y

$$\begin{aligned}x(t) &= \cos(t - \pi) - 1 = -\cos(t) - 1, \\y(t) &= \operatorname{sen}(t - \pi) = -\operatorname{sen}(t), \\z(t) &= \operatorname{sen}(t) + 1.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Podemos ahora retomar nuestra inquietud del final de la Sección 1, y en particular el Problema 1.3, cuando enrollábamos la parte del rectángulo por debajo de la curva del seno y obteníamos la Figura 6f). Suponiendo que las imágenes en esa figura se obtienen mediante el proceso que acabamos de describir, vemos que los puntos $(x(t), y(t), z(t))$ en (3.2) pertenecen al plano de ecuación

$$y + z = 1,$$

que es un plano de normal $(0, 1, 1)$, es decir que está inclinado a 45° respecto de los ejes y y z , y contiene a la recta $\lambda(1, 0, 0) + (0, 0, 1)$, que es el eje x “elevado” en una unidad.

Problema 3.3: Encontrar los focos de la elipse que describen las ecuaciones (3.2). >

4. Comentarios sobre bibliografía

Aunque seguramente los conceptos presentados aquí no son originales, no los he encontrado en libros ni artículos. Como cada vez sucederá con mayor frecuencia, sí he tomado muchos datos de “internet”, como las referencias históricas y el nombre mismo de la curva “cocleoide” y su etimología.

Al preparar las notas y realizar el gráfico de la Figura 20, parecía ser (parte de) una cardioide, pero las ecuaciones no eran las mismas. Una búsqueda en internet reveló la dirección

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Curves>,

donde se presentan muchas curvas clásicas, y entre ellas la cocleoide. También allí encontré que el “ocho” ya era conocido con ese mismo nombre.

En fin, la cocleoide en realidad es una especie de espiral, que se puede comparar con las espirales de Arquímedes y la logarítmica, también descritas en esa dirección de internet. Otros lugares interesantes donde se muestran curvas clásicas, y en particular la cocleoide y/o la lemniscata de Gerono, son

<http://home.planet.nl/wasse170/spiral/spiralc.html>

<http://perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie/>

<http://br.crashed.net/akrowne/crc/math/e/e039.htm>

<http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/Courbes/LemniGerono.html>

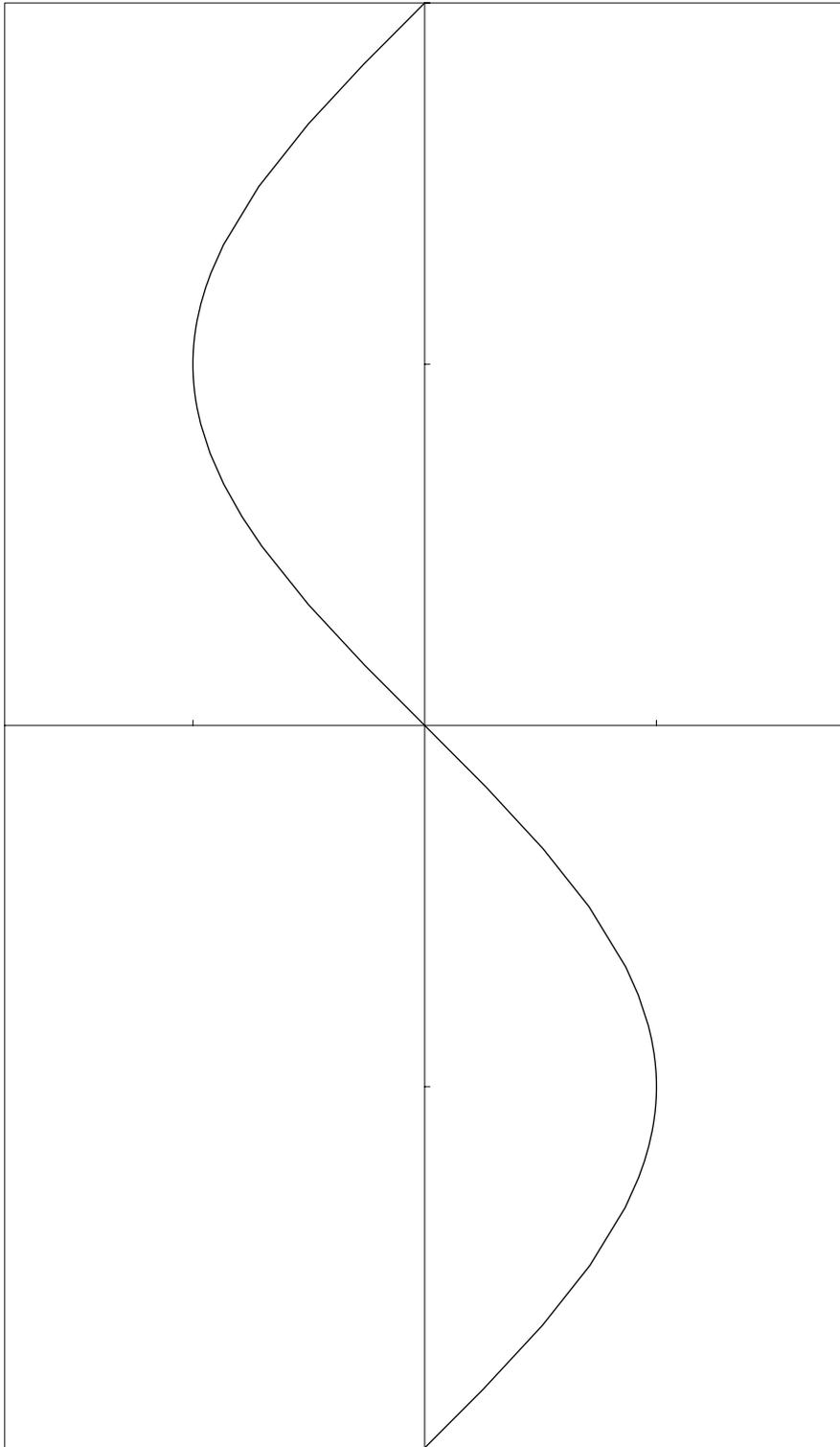


Figura 21: Para recortar y pegar