Investigación y docencia

Hasta el infinito. . . y más acá

por N. Aguilera

Estas notas forman parte de la colección de apuntes en la sección *Investigación y Docencia* de la Olimpíada Matemática Argentina, disponibles vía internet en http://oma.org.ar/invydoc.

Fecha de esta versión: 19 de enero de 2019

A

Luis Santaló, Enzo Gentile y Miguel de Guzmán,

quienes mostraron el camino

Contenidos

Figuras

1. Una historia para contar

Estar parado cansa más que caminar.

Gran parte de nuestra cultura matemática se formó en la Grecia clásica, empezando tal vez con Tales de Mileto (c. 624 a. C.–c. 546 a. C.),[1] a quien algunos atribuyen las primeras demostraciones matemáticas, afirmándose posteriormente con Pitágoras de Samos (c. 569 a. C.–c. 495 a. C.) y su escuela. Mucho menos profundamente, a los griegos debemos palabras como «axioma», «teorema», «hipótesis» y la misma «matemática».

Pero no todo era sencillo para ellos, como se refleja en la siguiente paradoja atribuida a Zenón de Elea (c. 490 a. C.–c. 430 a. C.), quien argumentaba sobre la imposibilidad del movimiento:

1.1. Paradoja de Aquiles y la tortuga. *Aquiles, el más rápido corredor de Grecia, compite en una carrera contra una tortuga. Siendo mucho más lenta que él, Aquiles le da a la tortuga una ventaja inicial de varios metros.*

Una vez comenzada la carrera, Aquiles tarda algún tiempo en llegar hasta donde estaba la tortuga inicialmente, pero en ese tiempo la tortuga ya recorrió cierta distancia. Cuando Aquiles llega a esa nueva ubicación de la tortuga, ésta ya se encuentra en otra posición, y así sucesivamente.

Por lo tanto, Aquiles nunca alcanzará a la tortuga pues siempre tiene que llegar antes al lugar donde estaba la tortuga.

Nuestra experiencia nos dice que Aquiles alcanzará a la tortuga:

---

(1) «c.» es la abreviatura del latín *circa* (alrededor, aproximadamente), usada cuando la fecha que sigue no se conoce con exactitud. También se usa la abreviatura «ca».

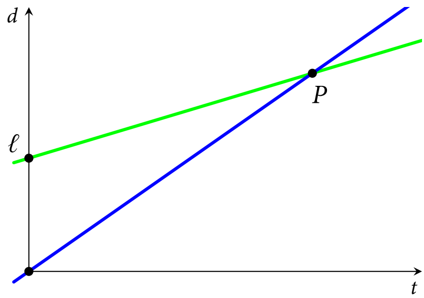

Figura 1.1: Distancias d recorridas por Aquiles (en azul) y la tortuga (en verde) en función del tiempo t.

1.2. Ejercicio. Midiendo las distancias en metros, los tiempos en segundos y las velocidades en metros por segundo, supongamos que la velocidad de Aquiles es v, la de la tortuga es u, y que la ventaja que Aquiles le da a la tortuga es de ℓ metros (suponemos que las velocidades son constantes durante toda la carrera, $v > u$ y $\ell > 0$).

a) ¿En cuántos segundos alcanza Aquiles a la tortuga?

Respuesta: en $\ell/(v - u)$ segundos.

b) Si la distancia entre el punto de partida y el de llegada es de a metros ($a > \ell$), ¿para cuáles valores de ℓ la tortuga ganará la carrera?

Respuesta: Para $\ell > a\,(v - u)/v$. ✄

En la figura 1.1 se ilustra el ejercicio 1.2, indicando las distancias d al punto de partida en función del tiempo t. Las pendientes de las rectas indican las velocidades: en azul la de Aquiles y en verde la de la tortuga. (la mayor velocidad de Aquiles se refleja en mayor pendiente). El punto P corresponde al momento en que Aquiles alcanza a la tortuga.

1.3. Ejercicio. La figura 1.1 se hizo con GeoGebra y luego exportándola como gráfica PGF/TikZ.

a) Reconstruir la figura con GeoGebra (sin exportarla) tomando $v = 0.7$, $u = 0.3$ y $\ell = 1.5$ como datos básicos en la ventana algebraica, y luego variar esos valores para comprender mejor el ejercicio (por ejemplo, ¿qué debería pasar si se incrementa u?).

b) Los valores de u, v y ℓ en el apartado anterior fueron puestos para que el gráfico «quedara lindo», pero ¿son razonables? Por ejemplo, ¿qué velocidad podría tener Aquiles?[(2)] De modo similar, dar una estimación de la velocidad de la tortuga.[(3)] Finalmente, teniendo en cuenta las respuestas del ejercicio 1.2, si quisieras que la carrera durara unos 10 segundos, ¿qué valor le darías a la distancia ℓ (en metros)?

c) Modificar el gráfico en *a*) poniendo en la ventana algebraica de GeoGebra los datos estimados en *b*) para u, v y ℓ. ¿Comentarios?

> ✍ Con el botón derecho en la ventana gráfica de GeoGebra, es posible *mostrar todos los objetos*. ✂

Parte del origen de los problemas que tenían los griegos era que concebían al mundo físico constituido por elementos básicos. Aristóteles (384–324 a. C.) menciona que Tales enseñaba que «todas las cosas son agua», mientras que los pitagóricos más abstractamente pensaban que el origen de todo era el número (y todavía hoy se escucha hablar de «numerología»). Asociadas a estas ideas venía el concepto de indivisibilidad, como en el «átomo», y trataban de eludir el «infinito» lo más posible. Claro que esto generaba inconvenientes. Por ejemplo, admitían que una longitud pudiera dividirse en un número entero de partes iguales (lo que se puede hacer geométricamente con el teorema de Tales) y por lo tanto en fracciones, pero no de forma continua como en la barrera de la «inconmensurabilidad» de $\sqrt{2}$ de los pitagóricos.

---

(2) Pensar en récords olímpicos para los 100 m.

(3) ¿Habrá olimpíadas para tortugas?

No conociendo el concepto de límite, tuvieron que recurrir a otras técnicas para evitar paradojas como la de Zenón y esquivar los números irracionales como $\sqrt{2}$. Así, Euclides (c. 325 a. C.–c. 265 a. C.) da un tratamiento geométrico a las matemáticas en sus *Elementos*: los números son segmentos o áreas o volúmenes (magnitudes), y demuestra el teorema de las paralelas de Tales usando áreas.

Pero no se podía ocultar completamente la realidad para avanzar. El *método de exhaución* o *agotamiento* fue perfeccionado por Eudoxo de Cnido (c. 390 a. C.–c. 337 a. C.), quien encontró la fórmula del volumen de la pirámide y abrió las puertas para que Arquímedes de Siracusa (c. 287 a. C.–c. 212 a. C.) aplicara el método con éxito para encontrar varias fórmulas para áreas, como la del *segmento parabólico*,[(4)] y volúmenes, como el de la esfera. El método de exhaución es en cierto sentido equivalente al concepto de *límite*, parte fundamental de las teorías que Newton (1643–1727) y Leibniz (1646–1716) iniciaron varios siglos después.

Tratando de reducir a un mínimo formalidades y axiomáticas, en estas notas queremos mirar cómo sumar «infinitos» términos. No es para asustarse ya que en la escuela nos enseñaron algunos ejemplos que repasamos en la sección 3, después de hablar un poco del «infinito» en la sección 2.

En la sección 4 introducimos los conceptos de serie y convergencia, y antes de pasar a describir algunos resultados teóricos en las secciones 7 y 8, en la sección 5 vemos aproximaciones numéricas, siempre útiles a la hora de conjeturar el comportamiento de las series, y en la sección 6 introducimos el símbolo de sumatoria que se usa en las matemáticas post-secundarias.

En la sección 9 «desfacemos entuertos», tocamos el tema de visualizaciones en la sección 10, y después de dedicar unos minutos a la música, terminamos jugando con una pelota y el dominó en la

---

(4) Que discutimos en *Apuntes sobre la parábola: su medición según Arquímedes y otras propiedades* (`http://www.oma.org.ar/invydoc/pdfs/parabola.pdf`).

sección 11.

En el texto se van intercalando ejercicios de distinto nivel de dificultad, algunos para trabajar con el lenguaje de programación Python o con GeoGebra, y otros bastante abstractos. Ciertamente, no es necesario hacer todos los ejercicios, aunque sería bueno al menos entender los enunciados. Por ejemplo, si uno no conoce Python se puede obviar la parte del ejercicio que lo requiera sin demasiado pérdida de continuidad.

El Apéndice A tiene un resumen de las notaciones y nomenclatura que usamos, en el Apéndice B hay algunos módulos de Python que pueden resultar útiles, y el Apéndice C contiene sugerencias para la resolución de algunos de los ejercicios.

Comentarios adicionales

- *Matemática* podría traducirse del griego antiguo como aprendizaje, o conocimiento o lección. Una persona *matemática* sería lo que actualmente llamamos docente.

  Otro significado otorgado a la palabra *matemático* y que hoy nos resulta divertido, es la frase de San Agustín (354–430) en *De Genesi ad Litteram*:

  > *El buen cristiano debe resguardarse de los matemáticos y de todos aquellos con profecías impías.*

  Claro que San Agustín se refería a lo que ahora llamamos *astrólogos*.
- Los datos históricos están tomados principalmente del clásico *Historia de la matemática* de Boyer (Boyer y Merzbach, 2011; Boyer, 2007) que recomendamos: no es ni muy técnico ni demasiado abreviado.

  También tomamos datos de internet, especialmente de MacTutor History of Mathematics (en inglés), y de Wikipedia (a la que hay que aproximarse siempre con desconfianza).
- Zenón propuso varias paradojas. Por ejemplo, *en la paradoja de la dicotomía* planteaba que para recorrer cierta distancia hay que recorrer

Figura 1.2: Lugares de matemática griega: Alejandría, Cnido, Elea, Mileto, Samos y Siracusa.

primero la mitad; para recorrer esa mitad hay que recorrer primero la mitad de ella, es decir, un cuarto de la original; para recorrer ese cuarto hay que recorrer el primer octavo, y así sucesivamente. Si no permitimos que se pueda dividir «infinitas veces» por dos, se llega a la conclusión de que el movimiento es imposible.

- Hablamos de «los griegos», pero vale la pena recordar la amplia región geográfica involucrada.

  En la figura 1.2 (obtenida con Google Maps) hemos etiquetado en rojo las ubicaciones que mencionamos anteriormente:

  - Mileto (Tales), Samos (Pitágoras) y Cnido (Eudoxo) están en la margen este del Mar Egeo, bastante cercanas entre sí.
  - Elea (Zenón), actualmente Velia, está al sur de Italia sobre el Mar Tirreno (donde empieza el empeine de la bota).
  - Siracusa (Arquímedes) está al sureste de la isla de Sicilia (Italia).

  - Alejandría (Euclides) está en Egipto, sobre el Mar Mediterráneo, al noroeste de El Cairo.

  Salvo la isla de Samos, muy próxima a la Turquía de hoy, estos lugares no pertenecen a la Grecia actual, reflejo de las muchas guerras que soportó la región.

- Observemos también que al hablar de los «griegos» estamos hablando de un período de cerca de mil años, desde 600 a. C. con Tales, hasta los últimos «grandes» que podemos considerar como «griegos», aunque bien avanzada ya la época del imperio romano: Diofanto (c. 214– c. 290), Papo (c. 290–c. 350) y quizás hasta Proclo (411–485), todos éstos de Alejandría.
- Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) fue uno de los primeros en dar una descripción clara de la suma de progresiones geométricas (ejercicio 4.1), resolvió la paradoja de Zenón (ejercicio 7.3), y parece haber sido el primero en nombrar como *methodus exhaustionibus* al método usado por Eudoxo, que acá traducimos (algo torpemente) como *exhaución*, siguiendo la usanza en castellano.

2. Infinito = no finito

Dos cosas son infinitas:
el universo y la estupidez humana,
y no estoy seguro sobre el universo.

Albert Einstein

La idea de «infinito» aparece en varios contextos, dentro y fuera de la matemática, y parece bastante sencilla. Por ejemplo, si empezamos a nombrar los números naturales, 1, 2, 3,…, podemos seguir indefinidamente, sin terminar nunca.[5] Los puntos suspensivos «...», el «indefinidamente», o el «sin terminar nunca» podemos expresarlo también diciendo que hay «infinitos» números naturales.

Como observaron los griegos, los problemas aparecen cuando tratamos de sumar «infinitos» números, y en general cuando queremos manipular una «cantidad infinita» de objetos. No nos queda más remedio que ponernos un poco más rigurosos, así que ¡manos a la obra!

El concepto de infinito relacionado con conjuntos, como en el ejemplo anterior de los naturales, se define un poco al revés, empezando por el concepto de conjunto finito y su cardinal:

2.1. Definición. Un conjunto A es *finito* si es vacío o si podemos encontrar un número entero positivo n ($n \in \mathbb{N}$) y una función $f : A \to \{1, 2, \dots, n\}$ biyectiva.

En este caso decimos que el *cardinal* de A, denotado por $\#(A)$, es n si $A \neq \emptyset$, y definimos $\#(\emptyset) = 0$. ✄

Admitiremos la siguiente propiedad de los números naturales que parece obvia.

2.2. Propiedad de buena ordenación de $\mathbb{N}$. *Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, entonces existe $m \in A$ tal que*

$$m \le n \quad \textit{para todo } n \in A,$$

es decir, todo conjunto no vacío de los naturales tiene un mínimo.

2.3. Ejercicio. Si A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ y existe un número K tal que

$$n \le K \quad \text{para todo } n \in A,$$

entonces existe $m \in A$ tal que

$$n \le m \quad \text{para todo } n \in A,$$

(5) Bah, hasta que nos llamen para cenar.

es decir, m es el máximo del conjunto A. ✂

2.4. Ejercicio. Si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función (no necesariamente biyectiva), ver que dado $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{f(1), f(2), \dots, f(n)\} \subset \{1, 2, \dots, m\}. \tag{2.1}$$

✍ El valor de m no es único: si m sirve, también sirve cualquier valor mayor como $m + 1$, $2m$, etc.

Por ejemplo, si $f(k) = k^3 - 9k^2 + 23k - 11$ y $n = 5$, en (2.1) es

$$\{f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{4, 7, 4, 1, 4\} = \{1, 4, 7\},$$

(en los conjuntos pueden haber elementos repetidos) y podríamos tomar $m = 7$ o cualquier otro número mayor. ✂

A partir de la propiedad de buena ordenación de $\mathbb{N}$ y los ejercicios 2.3 y 2.4, es posible demostrar las siguientes propiedades aparentemente obvias, que admitiremos sin discusión:

2.5. Propiedad. *Si existe un n como en la definición 2.1, no hay otro distinto con la misma propiedad, o en otras palabras, si hay una biyección entre $\{1, 2, \dots, n\}$ y $\{1, 2, \dots, m\}$ entonces $n = m$. Esto hace que el cardinal esté bien definido para conjuntos finitos.*

2.6. Propiedad. *Supongamos que A es un conjunto finito. Entonces las siguientes propiedades son equivalentes: La existencia de es equivalente a:*

- *Existen $n \in \mathbb{N}$ y una función $f : A \to \{1, \dots, n\}$ biyectiva.*
- *Existe $m \in \mathbb{N}$ y una función $g : A \to \{1, \dots, m\}$ suryectiva.*
- *Existen $\ell \in \mathbb{N}$ y una función $h : \{1, \dots, \ell\} \to A$ suryectiva (o «sobre»).*

2.7. Ejercicio. Dar dos ejemplos distintos de funciones biyectivas de $\{1, 2, \dots, n\}$ en sí mismo que no sean la identidad. ¿Podría ser $n = 1$?, ¿y $n = 2$?

✍ Es decir, encontrar dos ejemplos de $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ tal que $f(k) \neq k$ para algún $k \in \{1, \dots, n\}$.

✍ Recordemos que hay $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ funciones biyectivas de $\{1, \dots, n\}$ en sí mismo. ✂

2.8. Ejercicio. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$.

a) Si A es finito entonces tiene un máximo.

b) Recíprocamente, si A tiene un máximo entonces es finito. ✂

2.9. Ejercicio. Ver que los siguientes conjuntos son finitos, encontrando en cada caso una función apropiada según la definición 2.1 o la propiedad 2.6.

a) $A = \{1, -2, 3\}$.

b) El conjunto B de los racionales que pueden escribirse como p/q con p y q enteros, $1 \leq p < q < 100$.

✍ Observar que $4/15$ y $16/60$ son el mismo elemento de B.

c) ¿Cuál es el cardinal de A?, ¿y el de B?

✍ $\#(B) = 3003$, pero su cálculo no es sencillo. Ver las notas al final de esta sección. ✂

2.10. Ejercicio. Sean A y B conjuntos.

a) Si A y B son finitos y disjuntos, entonces $A \cup B$ es finito y $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

✍ En éste como en los apartados siguientes, debe prestarse atención a la posibilidad de que alguno de los conjuntos sea vacío (o ambos).

b) Si A es finito y $B \subset A$, entonces B es finito y $\#(B) \leq \#(A)$.

c) Si A y B son finitos, entonces $A \cap B$, $A \setminus B$ y $A \cup B$ también lo son.

d) Si A y B no son vacíos, B es finito y $f : A \to B$ es inyectiva, entonces A es finito. ✂

Como no podría ser de otra forma, tenemos:

2.11. Definición. Un conjunto es infinito si no es finito. ✂

2.12. Ejercicio. Demostrar:

a) El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ (los enteros positivos) es infinito.

b) Los enteros $\mathbb{Z}$, los racionales $\mathbb{Q}$ y los reales $\mathbb{R}$ son conjuntos infinitos. ✂

Abusando la nomenclatura, es común decir que *el cardinal* de un conjunto finito es (un número) *finito*, o sea, no sólo hay *conjuntos* finitos sino también *números* finitos. Por extensión, se dice que un conjunto infinito *tiene cardinal infinito*. Esta idea se empalma con otro contexto de matemáticas donde aparece el concepto de infinito: a veces conviene agregar a un conjunto de números, como $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, otros objetos, que seguimos llamando números, para trabajar más cómodamente.

Comentarios adicionales

- La noción de conjunto bien ordenado (que todo subconjunto no vacío tiene un mínimo) fue introducida por G. Cantor (1845–1918) en 1883 en un contexto general. La propiedad 2.2 se refiere al caso de $\mathbb{N}$ con el orden usual.
- La pregunta sobre el cardinal del conjunto B del ejercicio 2.9 apareció en la publicación *The Ladies Diary* de 1747. Recién cuatro años después aparecieron en esa publicación tres soluciones, dos de ellas incorrectas.

  El conjunto B es esencialmente la serie de Farey $\mathfrak{F}_{99}$ (ver Hardy y Wright, 2008), relacionado con la función ϕ de Euler (ver Gentile, 1991) para la que no se conocen fórmulas explícitas ni algoritmos eficientes para su cálculo.

De cualquier forma, el valor 99 del ejercicio es lo suficientemente pequeño como para calcular explícitamente $\mathfrak{F}_{99}$ sin mayores problemas mediante un programa computacional como el módulo `farey` en el apéndice B: $\#(B)$ se obtiene evaluando `len(farey(99)) - 2` pues $B = \mathfrak{F}_{99} \setminus \{0, 1\}$.

- No es difícil encontrar una biyección entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$ (por ejemplo, asociando los enteros pares positivos con los enteros positivos).

  Cantor fue mucho más allá y demostró que es posible encontrar biyecciones entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$, pero no hay biyecciones entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$, es decir, los «cardinales» de $\mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ son «distintos».

  Esencial en este tipo de desarrollos es el llamado *teorema de Cantor-Bernstein* (Cantor lo enunció y Bernstein dio la primer demostración): si existen $f : A \to B$ y $g : B \to A$ inyectivas, entonces existe $h : A \to B$ biyectiva, lo que parece obvio para conjuntos finitos (ver las propiedades 2.5 y 2.6), pero no para conjuntos infinitos. Hay muchas demostraciones de este teorema, y una muy bonita está presentada en el libro de Fava y Zó (1996).

- Otro contexto donde aparece el «infinito» es el de objetos a los que se le agrega un nuevo objeto para que el total satisfaga ciertas propiedades. Por ejemplo, agregando a los puntos del plano el *punto en el infinito*, podemos equiparar este nuevo conjunto a la superficie de una esfera, y trabajar como se hace en *geometría proyectiva*. En el caso de la recta podemos agregar un único punto para obtener básicamente la circunferencia, o bien agregar un «número más grande que cualquier número real», que llamamos *infinito* e indicamos con ∞. Claro que también podríamos pensar en «un número menor que cualquier número real», que indicaríamos con $-\infty$.

3. Decimales periódicos

No se termina hasta que se termina.

Yogi Berra (beisbolista)

En la escuela nos enseñan que todo número racional a/b (donde a y b son enteros positivos, $a < b$) tiene una «expresión decimal periódica». Por ejemplo:

- $1/7 = 0.1428571428\ldots = 0.\overline{142857}$ tiene una expresión *periódica pura*, con *período* 142857.

  ✍ Con la barra indicamos que los números debajo de ella se repiten indefinidamente.

  ✍ Usaremos «punto» decimal en vez de «coma» decimal para no enloquecernos al trabajar con la computadora o calculadora, y aprovechando que su uso es recomendado por la Real Academia Española.

- $611/4950 = 0.123434\ldots = 0.12\overline{34}$ tiene una expresión *periódica mixta*, con *período* 34 y *anteperíodo* 12.

- El período puede ser 0, como en $1/4 = 0.25 = 0.2500\ldots = 0.25\overline{0}$.

El período y el anteperíodo no están completamente determinados, salvo que uno pida que ambos tengan una mínima cantidad de cifras y el número no tenga representaciones distintas. Por ejemplo,

$$0.\overline{123} = 0.12\overline{312} = 0.\overline{123123}.$$

Además, los números racionales con expresiones (decimales) de período 0 tienen otra representación de período 9, como $1/10 = 0.1 = 0.1\overline{0} = 0.0\overline{9}$, y no hay otros números con dos representaciones decimales distintas, como veremos en el ejercicio 3.6.

Por supuesto, así como la expresión decimal es una suma de potencias de 10,

$$123 = 1 \times 10^2 + 2 \times 10 + 3,$$

y

$$0.456 = 4 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2} + 6 \times 10^{-3} = \frac{456}{100},$$

debemos interpretar que

$$0.7\overline{89} = \frac{7}{10} + \frac{89}{10^3} + \frac{89}{10^5} + \frac{89}{10^7} + \cdots , \tag{3.1}$$

donde los puntos suspensivos indican que debemos seguir sumando «para siempre» fracciones con denominadores cada vez más grandes.

3.1. Ejercicio. ¿Por qué a partir de cierto momento, en la expresión decimal de un racional se repiten periódicamente los dígitos? ✄

En la escuela también nos enseñan cómo pasar de un número decimal periódico a fracción:

3.2. Receta. *Para pasar de expresión decimal periódica pura a fracción, hay que tomar el período dividido por tantos 9 como cifras tenga el período.*

Repasemos cómo se hace esto, tomando un ejemplo particular, digamos $x = 0.\overline{1234}$.

Como el período tiene 4 lugares, multiplicamos x por 10^4 para que el período forme la parte entera:

$$10^4 x = 1234.\overline{1234} = 1234 + 0.\overline{1234} = 1234 + x, \tag{3.2}$$

de donde

$$(10^4 - 1)\, x = 1234,$$

y como $10^4 - 1 = 9999$,

$$\boxed{x = \frac{1234}{9999}.}$$

En general, si $x = 0.\overline{a}$ y a tiene k cifras,[6] repitiendo el argumento que usamos para $0.\overline{1234}$ tendremos

$$\boxed{x = \frac{a}{10^k - 1},} \tag{3.3}$$

que es la receta 3.2.

3.3. Pregunta. ¿Es esto una demostración? ✂

Hummm, parece que sí, pero después de ver la ecuación (3.5) veremos que estas manipulaciones formales puede llevar a contradicciones.

También tenemos una receta para cuando hay un anteperíodo:

3.4. Receta. *Para pasar de expresión decimal periódica mixta a fracción, hay que tomar el anteperíodo seguido del período, restarle el anteperíodo y dividir todo por tantos* 9 *como cifras tenga el período seguido de tantos* 0 *como cifras tenga el anteperíodo.*

Por ejemplo,

$$0.083333\ldots = 0.08\overline{3} = \frac{83 - 8}{900} = \frac{75}{900} = \frac{1}{12}.$$

3.5. Ejercicio. Dar una «demostración» para la receta 3.4 análoga a la que vimos para la receta 3.2. ✂

3.6. Ejercicio. Usando la receta 3.4, ver que un racional tiene una representación decimal de período 9 si y sólo si tiene una representación de período 0, y no hay otros racionales con representaciones distintas. ✂

3.7. Ejercicio. La mayoría de las calculadoras no tienen la capacidad de pasar de una representación a otra. Por ejemplo, Python nos da una aproximación numérica,

---

(6) Abusando la notación, escribimos $0.\overline{a}$ pero a puede tener más de una cifra decimal.

```
>>> 1234/9999
0.12341234123412341
```

y no es sencillo pasar a la representación como fracción (pero se pueden instalar «módulos» apropiados para hacerlo).

Por otra parte, GeoGebra admite la representación simbólica:

a) En la barra de entrada ingresar $a = 1234/9999$, y comprobar que en la vista algebraica se observa ese valor.

b) Cambiando la descripción en el menú *Vista Algebraica* $\rightarrow f_x \rightarrow$ Valor/Descripción/Definición, eventualmente cambiando la cantidad de decimales (menú *Opciones* → *Redondeo*), podemos ver distintas aproximaciones numéricas.

c) GeoGebra tiene la función `Racionaliza` en la ventana CAS de cálculo simbólico, que permite pasar una expresión decimal finita a fracción. Comprobar el comportamiento de esta función con varios argumentos como `Racionaliza(.1234)`, `Racionaliza(.12341234)`, etc.

✍ Aplicaciones más elaboradas como *Mathematica* permiten tener mayor control para pasar de una representación a otra.

✍ Las funciones `TextoFracción` y `TextoIrracional` de GeoGebra pueden ser útiles en algunos contextos. ✂

3.8. Ejercicio. En este ejercicio trabajamos computacionalmente con el período y anteperíodo de la expresión decimal de un racional p/q, con $0 < p < q$ (p y q pueden tener factores comunes).

a) Definir una función en Python que dados el anteperíodo y el período como listas de números entre 0 y 9, encuentre el numerador y denominador.

✍ Se pide expresar la receta 3.4 en Python.

b) Construir una función `periodo(p, q)` en Python que dados los enteros p y q, $0 < p < q$, imprima la parte decimal (del desarrollo en base 10) de la fracción p/q, distinguiendo su período y anteperíodo.

✍ Es una especie de inversa a la función del apartado anterior.

✍ Ignoraremos las expresiones con período 9, considerando sus equivalentes de período 0.

El comportamiento debe ser algo como:

```
>>> periodo(617, 4950)
Los decimales son: [1, 2, 4, 6]
El anteperíodo es: [1, 2]
El período es:     [4, 6]
```

c) Encontrar el entero n entre 1 y 1000 tal que $1/n$ tiene máxima longitud del período.

Respuesta: 983, que tiene período de longitud 982.

d) Encontrar todos los enteros entre 2 y 1000 para los cuales $1/n$ tiene período $n - 1$. ¿Son todos primos?, ¿hay primos que no cumplen esta condición?

✍ El módulo eratostenes (en el apéndice B) es una versión sencilla de la criba de Eratóstenes para encontrar los primos que no superan n (en Python). ✄

Examinando la ecuación (3.2), vemos que el «truco» fue encontrar una expresión que relaciona al número con sí mismo.

El mismo truco se puede usar para encontrar la suma de una progresión geométrica de razón x: si

$$s = 1 + x + x^2 + \cdots, \tag{3.4}$$

entonces

$$s = 1 + x\,(1 + x + x^2 + \cdots) = 1 + xs,$$

de donde

$$(1 - x)\,s = 1,$$

y

$$\boxed{s = \frac{1}{1-x}} \quad \text{si } x \neq 1. \tag{3.5}$$

Pero eso no suena bien.

Desde ya que tenemos el problema con $x = 1$, pero si $x > 1$ el valor de s da negativo, lo que no parece correcto. Por ejemplo para $x = 2$,

$$s = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$$

no tiene mucho sentido como número, pero si lo fuera seguramente no sería negativo.

Si consideramos ahora $x = -1$ (que es negativo) el «truco» dará

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = 1 - (1 - 1 + 1 + \cdots) = 1 - s, \tag{3.6a}$$

y por lo tanto $s = 1/2$, que es el valor en (3.5). Pero también podríamos pensar que

$$s = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + \cdots = 0, \tag{3.6b}$$

o

$$s = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1, \tag{3.6c}$$

¡estamos en aguas más que turbias!

Tenemos problemas parecidos a los griegos: no estamos seguros de qué significa hacer una suma «infinita» de términos, como las que están a la derecha en (3.1) o (3.4).

En (3.1) a la izquierda pusimos un número y suponiendo cierta la igualdad entre ese número y la suma infinita, los pasos hasta llegar a (3.3) están justificados.

De modo similar, los pasos que llevan desde (3.4) hasta (3.5) son válidos suponiendo que s sea un número, pero para $x \geq 1$ o $x \leq -1$ esta suposición nos lleva a absurdos y s no puede ser un número.

Ciertamente no hay problemas cuando trabajamos con un número finito de términos, como al sumar los primeros n términos de la progresión geométrica de razón x,

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}. \tag{3.7}$$

Imitando lo que hemos hecho anteriormente (y que también se hace en la escuela), ponemos

$$s_{n+1} = 1 + x + \cdots + x^n = 1 + x\,(1 + x + \cdots + x^{n-1}) = 1 + x s_n,$$

y como $s_{n+1} = s_n + x^n$,

$$s_n + x^n = 1 + x s_n,$$

de donde

$$s_n = \frac{1 - x^n}{1 - x} \quad \text{si } x \neq 1, \tag{3.8}$$

la conocida expresión para la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica de razón distinta de 1.

3.9. Ejercicio. ¿Cuál es el valor de s_n en (3.7) cuando $x = 1$? ✂

Comenzando con los «griegos», los matemáticos han estudiado durante siglos problemas como los que surgen en las ecuaciones (3.6), desarrollando varias teorías aplicables en distintos contextos. En las próximas secciones echaremos un vistazo a algunos de estos resultados.

Comentarios adicionales

- La técnica que usamos para obtener (3.5) a partir de (3.4) y (3.8) a partir de (3.7), consiste en expresar una cantidad desconocida en términos de sí misma y luego despejar, lo que puede llevar a absurdos como $0 = 1/2$ cuando hay infinitos términos en juego.

De cualquier forma, la técnica es muy útil y bastante común, y en determinados contextos se denomina *swindle* (engaño, fraude, estafa). Algunas de las demostraciones del teorema de Cantor-Bernstein (mencionado en los comentarios adicionales de la sección 2) usan esta técnica.

- La expresión $1-1+1-\cdots$ a veces se llama *de Grandi* pues L. G. Grandi (1671–1742) hizo un análisis similar al que hicimos en (3.6). Según se dice, a partir de que la suma de infinitos ceros da $1/2$, Grandi concluyó que esto probaba que Dios pudo crear al mundo de la nada.

4. Series

Cuando trabajamos con muchos números es común usar una notación con *subíndices*: como se nos terminan las letras, en vez de poner $a, b, c, \dots$, ponemos $a_1, a_2, a_3, \dots$, que se lee «a-sub-uno», «a-sub-dos», «a-sub-tres», etc. Claro que podemos usar otras letras en vez de a, como $b_1, b_2, \dots$ o $x_1, x_2, \dots$

Una *sucesión infinita*, o simplemente *sucesión*, es una lista de números $(a_1, a_2, \dots)$ en la que interesa conocer el orden de los elementos y si se repiten o no. La encerramos entre paréntesis para distinguir entre sucesión y conjunto. Así, las sucesiones

$$(1, 2, 1, 2, \dots), \quad (2, 1, 2, 1, \dots) \quad \text{y} \quad (1, 1, 2, 2, 1, 1, 2, 2, \dots),$$

son todas distintas.

✍ Una sucesión de números $(a_1, a_2, \dots)$ es en realidad una función $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sólo que en vez de poner $a(n)$ ponemos a_n.

Como vimos en las ecuaciones (3.6), dada la sucesión $(a_1, a_2, \dots)$ la expresión

$$a_1 + a_2 + \cdots \tag{4.1}$$

puede llevar a contradicciones si no se la trata con cuidado. En otras palabras, la expresión (4.1) es meramente formal, un montón de símbolos escritos que pueden no representar un número, y nada nos autoriza a operar con ella como lo haríamos con una suma finita de números.

Sin embargo, la expresión es lo suficientemente importante en matemática como para recibir un nombre: se la llama *serie* (infinita) asociada a la sucesión $(a_1, a_2, \dots)$.

Tratando de darle un sentido a la expresión (4.1), miramos a las *sumas parciales* de los primeros n términos como las de (3.7),

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{4.2}$$

que están bien definidas.

Si a medida que n aumenta los valores de s_n se parecen cada vez más a un único número s, decimos que la serie *converge*, que *el valor de su suma es* s, o también que *converge a* s, y pondremos

$$s = \mathbf{valor}(a_1 + a_2 + \cdots), \tag{4.3}$$

y en otro caso decimos que la serie *no converge* o *diverge*, y su suma no está definida.

O sea, cuando escribimos $\mathbf{valor}(a_1 + a_2 + \cdots)$ estamos sobreentendiendo que la serie es convergente.

Veamos algunos ejemplos.

Las sumas parciales de la serie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots, \tag{4.4a}$$

de término general $1/2^k$, $k = 0, 1, \dots$, son, como vimos en (3.8),

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \tag{4.4b}$$

que a medida que n aumenta se parece cada vez más a 2. Es decir, la serie $1 + 1/2 + 1/4 + \cdots$ es convergente y

$$\textbf{valor}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) = 2. \tag{4.4c}$$

Si la sucesión es $(1, -1, 1, -1, \dots)$ como en (3.6), las sumas parciales son

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Los valores se van alternando, no se parecen a un único número, y por lo tanto la serie $1 - 1 + 1 - \cdots$ es divergente.

Finalmente, la serie $1 + 1 + 1 + \cdots$, tiene sumas parciales

$$s_n = n,$$

que son cada vez más y más grandes y no se van pareciendo a ningún número fijo, por lo que la serie es divergente.

4.1. Ejercicio. Consideremos la *serie geométrica*

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \tag{4.5}$$

asociada a la progresión geométrica de razón x.

a) Con el razonamiento usado en (4.4), ver que si $|x| < 1$ entonces la serie es convergente y su suma es $1/(1 - x)$ (como previsto en (3.5)).

b) Ya vimos que la series $1 - 1 + 1 - \cdots$ y $1 + 1 + 1 + \cdots$, correspondientes a $x = -1$ y a $x = 1$ en (4.5), son divergentes. ¿Qué se puede decir de la convergencia cuando $x > 1$ o $x < -1$?

Respuesta: Cuando $|x| \geq 1$ la serie es divergente. ✄

4.2. Ejercicio. Ver que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\\ =\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}\tag{4.6}$$

y luego determinar la convergencia y eventualmente la suma de la serie

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots.$$

✄

Comentarios adicionales

- Acá tomamos una perspectiva mucho menos rigurosa y mucho más sintetizada de lo que en cursos de análisis matemático se presenta usando el concepto de límite: hablamos de «se parecen cada vez más», «se van aproximando», etc.

  Hay muchísimos libros sobre el tema. Nosotros tomamos ideas del libro clásico de Courant (1937), que tiene varias ediciones en distintos idiomas. Una versión algo distinta en castellano es la de Courant y John (2002).

- En lenguaje coloquial, serie y sucesión son prácticamente sinónimos. Para confundir más, a veces se llama serie a la misma sucesión, como en las series temporales de estadística o la serie de Farey (que es finita) que mencionamos al final de la sección 2.

  Como tantas veces en matemáticas, la adhesión estricta a la nomenclatura puede ser paralizante. Nosotros trataremos de que quede claro de qué estamos hablando en cada caso.

5. Tratamiento numérico

La mayoría de las veces es complicado determinar si una serie es convergente o no, y encontrar su suma cuando es convergente es una tarea casi imposible salvo en pocos casos.

Una posibilidad es considerar numéricamente muchas sumas parciales para tener una idea del comportamiento, pero a veces estos estudios no orientan mucho (y *nunca* son concluyentes).

Por ejemplo, la serie de término general $a_n = (-1)^{n+1}/n$,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots, \tag{5.1}$$

es convergente, si bien las sumas parciales

$$s_{10} = 0.64563\ldots, \quad s_{100} = 0.68817\ldots, \quad s_{1000} = 0.69264\ldots, \tag{5.2}$$

después de 1000 términos no indican claramente que la serie converge al logaritmo natural de 2,

$$\log 2 = 0.693147\ldots$$

- ✍ Ver la definición de $\log x$ en el apéndice sobre notaciones.
- ✍ No veremos que la serie (5.1) es convergente, y mucho menos que su valor es $\log 2$.

Por otra parte, si en vez de ir alternando sumas y restas en (5.1), sumamos siempre, obtenemos la *serie armónica*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots. \tag{5.3}$$

Las sumas parciales de esta serie se llaman *números armónicos*, y se las indica con la letra h (a partir del inglés *harmonic*),

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}. \tag{5.4}$$

Como veremos en el ejercicio 8.5, la serie armónica es divergente aún cuando las sumas parciales,

$$h_{10} = 2.9289\ldots, \quad h_{100} = 5.1873\ldots, \quad h_{1000} = 7.4854\ldots, \tag{5.5}$$

no crecen demasiado y parecen estar acercándose a algo.

En el módulo parciales (en el apéndice B) hemos implementado funciones en Python para calcular las sumas parciales de las series (5.1) y (5.3).

Después de ejecutar el módulo (con *Run Module* en Idle), podemos calcular las sumas parciales redondeadas a 5 decimales en (5.2) poniendo

```
>>> s = [alterna(n) for n in [10, 100, 1000]]
>>> [round(x, 5) for x in s]
[0.64563, 0.68817, 0.69265]
```

y podemos aproximar el logaritmo natural de 2 con Python poniendo:

```
>>> import math  # funciones trascendentes
>>> math.log(2)  # logaritmo natural de 2
0.6931471805599453
```

Del mismo modo, las sumas parciales en (5.5) redondeadas a 5 decimales se pueden calcular mediante

```
>>> s = [armonico(n) for n in [10, 100, 1000]]
>>> [round(x, 5) for x in s]
[2.92897, 5.18738, 7.48547]
```

5.1. Ejercicio. Calcular con GeoGebra las sumas parciales de las series (5.1) y (5.3), y comparar con los resultados obtenidos con Python.

✍ Hay muchas posibilidades, pero para valores grandes de n no parece conveniente usar la planilla de cálculo. Una posibilidad es algo como `Suma(Secuencia(1/k, k, 1, n))` para el caso de números armónicos.

✍ El logaritmo natural de 2 se puede calcular en GeoGebra tanto con `ln(2)` como con `log(2)`. ✄

Comentarios adicionales

- Para la computadora la suma de números reales *no es asociativa*, por ejemplo en Python:

```
>>> (0.1 + 0.2) + 0.7
1.0
>>> 0.1 + (0.2 + 0.7)
0.9999999999999999
```

  Cuando se suman miles de términos los errores numéricos acumulados pueden dar resultados erróneos, por lo que en general se recomienda sumar primero los términos de menor valor absoluto, lo que tampoco garantiza que el resultado sea correcto. El *análisis numérico* es la rama de la matemática que estudia estos temas.

  Para no desviarnos demasiado, acá cerraremos los ojos, cruzaremos dedos, y sumaremos en el orden original, de izquierda a derecha.

6. El símbolo de sumatoria

Como tenemos que ir poniéndonos más serios, vamos a agregar una notación para las sumas usando el símbolo de *sumatoria*, $\sum$, poniendo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

para sumas con una cantidad finita de términos, que se lee *suma desde i igual* 1 *hasta n de a-sub-i*, y

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

para series (*suma desde n igual* 1 *hasta infinito*).

Por ejemplo, podríamos poner

$$1 + 2 + 3 + 4 = \sum_{i=1}^{4} i,$$

o la serie armónica como

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Las variables i y n en los subíndices se llaman *mudas* y pueden ser reemplazadas por cualquier otro símbolo,

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} = \sum_{j=1}^{4} \frac{1}{j} = \sum_{\tau=1}^{4} \frac{1}{\tau},$$

siempre que no lleve a confusión con otro nombre, como en

$$\sum_{i=1}^{i} a_i.$$

Evitando convenciones demasiado artificiales, en estos apuntes el comienzo siempre es menor o igual al fin, por lo que algo como $\sum_{i=5}^{0} i$ no tendrá sentido para nosotros. Por otra parte, cuando el comienzo es el final hay un único término en la suma, $\sum_{i=1}^{1}(2i + 3) = 2 \times 1 + 3$.

El extremo inicial puede ser distinto de 1,

$$\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = \sum_{k=0}^{3} (k + 1),$$

que a veces resulta conveniente como en el caso de la serie geométrica:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (\text{si } x \neq 0).$$

6.1. Pregunta. ¿Por qué pedimos $x \neq 0$ en la última igualdad? ✂

Los límites de la sumatoria también se pueden cambiar modificando un poco los coeficientes. Por ejemplo, la suma de los n primeros impares positivos podría ponerse como

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = \sum_{k=1}^{2n-1} a_k\, k,$$

donde

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par,} \end{cases}$$

y por supuesto, también tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) - n.$$

6.2. Ejercicio. Usando que la suma de los n primeros naturales es $n\,(n+1)/2$, ver que la suma de los primeros n impares positivos es n^2, un cuadrado perfecto. ✂

A veces tenemos sumatorias «dobles», como en

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij},$$

expresión que debe entenderse como

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right),$$

haciendo primero las sumas internas: para cada i calcular $b_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, y luego calcular $\sum_{i=1}^{n} b_i$.

En estos casos es bueno recordar que por la asociatividad y la conmutatividad de la suma,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

operación que a veces se llama *cambio del orden de sumatoria*.

6.3. Ejercicio. Demostrar:

a) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} u_i v_j = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} v_j \right).$

b) $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}.$ ✄

6.4. Ejercicio. Suponiendo que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ es una sucesión de números positivos, encontrar la falla en la siguiente cadena de igualdades:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i}{a_j} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} n = n^2.$$ ✄

Para terminar, mencionamos que es común poner los índices a sumar debajo del símbolo de sumatoria con una expresión similar a la de conjuntos:

$$1 + 2 + 3 = \sum_{1 \le i \le 3} i, \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n}.$$

Comentarios adicionales

- El símbolo $\sum$ de sumatoria es una estilización de la letra griega sigma mayúscula, por la inicial en <u>s</u>uma, introducido por Euler en 1755.

  También debemos a Euler muchas otras notaciones como $f(x)$, $e = 2.718\dots$, $\pi = 3.14159\dots$ y i («$\sqrt{-1}$»).

- El ejercicio 6.4 está tomado de Graham, Knuth y Patashnik (1994).

7. Algunos resultados teóricos

Si bien determinar la convergencia de una serie es un tema delicado, hay herramientas teóricas que pueden ayudar. En ésta y la próxima sección daremos una breve descripción de algunas, con justificaciones no muy rigurosas.

Empecemos por considerar las series $a_1 + a_2 + \cdots$ y $b_1 + b_2 + \cdots$, con respectivas sumas parciales

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{y} \quad r_n = \sum_{i=1}^{n} b_i,$$

y tomemos la serie $c_1 + c_2 + \cdots$ de términos $c_k = a_k + b_k$, con sumas parciales

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = s_n + r_n. \tag{7.1}$$

Si s_n se parece a s y r_n se parece a r, entonces t_n se parecerá a $s + r$, es decir, si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ y $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ son convergentes, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} c_i$ también lo es y

$$\textbf{valor}\left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\right) = \textbf{valor}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right) + \textbf{valor}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i\right).$$

El argumento anterior no es una demostración, ya que —como en ocasiones anteriores— hemos usado una idea intuitiva pero no rigurosa de expresiones como «se parece a» o «es aproximadamente».

7.1. Ejercicio. Usando un razonamiento similar al anterior, dar una justificación de que si se eliminan los primeros términos (una cantidad finita) de una serie convergente, se obtiene una serie convergente.

✍ Por ejemplo, si la serie $x_1 + x_2 + \cdots$ es convergente y consideramos $y_1 = x_5$, $y_2 = x_6$, y en general $y_n = x_{n+4}$, la serie $y_1 + y_2 + \cdots$ es convergente si y sólo si $x_1 + x_2 + \cdots$ lo es.

Además, en caso de convergencia tendremos

$$\mathbf{valor}(x_1 + x_2 + \cdots) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \mathbf{valor}(y_1 + y_2 + \cdots).$$ ✄

Llegamos así al siguiente resultado que admitiremos sin más:

7.2. Resultado. *Sean $x_1 + x_2 + \cdots$ y $y_1 + y_2 + \cdots$ dos series convergentes,*

$$a = \boldsymbol{valor}(x_1 + x_2 + \cdots), \quad b = \boldsymbol{valor}(y_1 + y_2 + \cdots).$$

Entonces:

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + y_n)$ es convergente y su valor es $a + b$.
b) Del mismo modo, $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)$ es convergente y su valor es $a - b$.
c) Si r es un número, $\sum_{n=1}^{\infty}(r x_n)$ es convergente y su valor es ra.

Por ejemplo, ya hemos mencionado que

$$\mathbf{valor}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \mathbf{valor}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = \log 2, \tag{7.2a}$$

y por lo tanto la serie que se obtiene multiplicando cada término por $1/2$ es convergente y

$$\begin{aligned}\mathbf{valor}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots\right) &= \mathbf{valor}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathbf{valor}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\right) = \frac{1}{2}\log 2.\end{aligned} \tag{7.2b}$$

7.3. Ejercicio (resolución de la paradoja de Aquiles y la tortuga). Recordando el ejercicio 1.2 y las notaciones allí, llamemos t_1 al tiempo que tarda Aquiles en llegar al lugar donde estaba la tortuga inicialmente, t_2 al tiempo que tarda en llegar desde el nuevo punto al lugar donde estaba la tortuga al tiempo t_1, t_3 al tiempo que tarda en llegar al punto donde estaba la tortuga al tiempo $t_1 + t_2$, y así sucesivamente.

a) Ver que $t_1 = \ell/v$ y que

$$t_n = \frac{u\, t_{n-1}}{v} \quad \text{para } n \geq 2.$$

Por lo tanto, el tiempo total que tarda Aquiles en alcanzar a la tortuga será

$$t_1 + t_2 + \cdots . \tag{7.3}$$

✍ Recordar que cuando la velocidad es constante,

$$\textit{distancia} = \textit{velocidad} \times \textit{tiempo}.$$

b) Ver que la serie en (7.3) es el producto de un número por una serie geométrica convergente y calcular su suma, verificando que se obtiene el mismo resultado que en el ejercicio 1.2. ✂

El resultado 7.2 parece decir que podemos trabajar con series convergentes como si se tratara de sumas de finitos términos, pero no es así.

Encolumnando los términos similares de las series en (7.2),

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} & + & \cdots \\ & & \frac{1}{2} & & & - & \frac{1}{4} & & & + & \frac{1}{6} & + & \cdots , \end{array}$$

y sumando por columnas obtenemos

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots . \tag{7.4}$$

En vista de las ecuaciones (7.2), diríamos que la nueva serie es convergente y su suma es $(3/2)\log 2$.

Sin embargo, los términos de la serie (7.4) son exactamente los de la serie (5.1) excepto por el orden (ver el ejercicio 7.4), lo que nos llevaría a decir que

$$\log 2 = \frac{3}{2}\,\log 2,$$

que es absurdo pues $\log 2 \neq 0$ ($\text{y } 3 \neq 2$).

Informalmente podríamos decir:

> *Las propiedades asociativa y conmutativa de la suma no siempre son válidas para series convergentes.*

7.4. Ejercicio. En este ejercicio vemos que las series en (5.1) y (7.4) tienen exactamente los mismos términos, sólo que en distinto orden.

a) Ver que los términos de la serie (7.4) son de la forma

$$\begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ es impar} \\ -1/n & \text{si } n \text{ es par,} \end{cases} \tag{7.5}$$

para algún $n \in \mathbb{N}$, y no se repiten.

b) Toda expresión de la forma (7.5) (con $n \in \mathbb{N}$) es un término de la serie (7.4). ✄

7.5. Ejercicio. Usar Python o GeoGebra para calcular las sumas parciales de la serie (7.4). ✄

7.6. Ejercicio. Con respecto a la serie (7.4):

a) Decidir si es convergente, y en caso afirmativo conjeturar si su suma es $\log 2$, $\frac{3}{2}\log 2$ u otro número.

✍ El ejercicio anterior puede ayudar.

b) Justificar la conjetura del apartado anterior.

✍ No se pide una demostración rigurosa sino una justificación del estilo «esto se parece a esto otro», como hemos hecho anteriormente. ✄

En resumen, el resultado 7.2 es útil pero no podemos confiarnos demasiado. En la próxima sección veremos que pidiendo algo más que convergencia podremos trabajar más cómodamente.

Comentarios adicionales

- El ejemplo en (7.2) y (7.4) y algunos de los ejercicios están tomados del libro de Courant (1937).

8. Series absolutamente convergentes

Empezamos observando que si la serie $a_1 + a_2 + \cdots$ tiene términos no negativos y es convergente, entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq \mathbf{valor}(a_1 + a_2 + \cdots) \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

es decir, las sumas parciales están mayoradas por un número fijo.

El próximo resultado nos dice que también vale una especie de recíproco. La demostración se basa en propiedades de los números reales y no la veremos.

8.1. Resultado. *Si los términos de la serie $a_1 + a_2 + \cdots$ son no negativos, entonces las sumas parciales $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ son no decrecientes con n. Además:*

a) *si existe M tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq M$ para todo n, la serie es convergente (y* **valor**$(a_1 + a_2 + \cdots) \leq M$*),*

b) *en otro caso la serie es divergente.*

Veamos cómo podríamos aplicar el resultado.

8.2. Ejercicio. Demostrar que la serie

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \tag{8.1}$$

de término general $1/n^2$, es convergente de dos formas distintas:

a) Comparando con la serie (4.6):

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)\,n} \quad \text{si } n \geq 2,$$

por lo que

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} &\leq 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} \\ &= 1 + \frac{n-1}{n} \leq 2, \end{aligned}$$

y podemos tomar $M = 2$ en el resultado 8.1.*a*).

b) Dividiendo la suma entre potencias de 2,

$$\frac{1}{(2^k)^2} + \frac{1}{(2^k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^k + 2^k - 1)^2} \leq \frac{2^k}{2^{2k}} = \frac{1}{2^k},$$

o sea

$$1 \leq 1, \quad \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \leq \frac{1}{4}, \ldots,$$

y nuevamente podemos tomar $M = 2$ en 8.1.*a*).

✍ Prestar atención a la diferencia entre la serie geométrica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots,$$

y la serie (8.1) que estamos estudiando:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

de alguna manera en los denominadores estamos intercambiando bases con exponentes. ✄

8.3. Ejercicio. L. Euler demostró en 1734 que el valor de la serie (8.1) es $\pi^2/6$.

Usar Python o GeoGebra para calcular las sumas parciales de la serie (8.1), es decir, para cada n calcular la suma

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2},$$

y luego encontrar n para aproximar con 3 cifras decimales al valor $\pi^2/6$ dado por Python o GeoGebra (según corresponda).

✍ El valor de π según Python es `math.pi` para lo que debe importarse previamente el módulo *math* (mediante `import math`). En GeoGebra se puede poner directamente `pi`. ✄

8.4. Ejercicio. Recordemos que si n es un entero no negativo, su factorial es

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n & \text{si } n > 0, \\ 1 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

a) Ver que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots \tag{8.2}$$

es convergente y su valor es menor que 3.

b) El valor de la serie (8.2) es la constante $e = 2.718\ldots$

Usar Python o GeoGebra para calcular las sumas parciales de la serie, y luego encontrar n para aproximar con 5 cifras decimales al valor e dado por Python o GeoGebra (según corresponda).

✍ El valor de e según Python es `math.e` para lo que debe importarse previamente el módulo *math* (mediante `import math`). En GeoGebra es simplemente `e`. ✂

8.5. Ejercicio. Demostrar que los números armónicos h_n (definidos en (5.4)) pueden ser tan grandes como se desee, es decir, la serie armónica es divergente. ✂

8.6. Ejercicio. Si s es un número real, entonces la serie

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots, \tag{8.3}$$

es convergente si $s > 1$ y divergente en otro caso. ✂

8.7. Ejercicio. Supongamos que los términos de la serie $a_1 + a_2 + \cdots$ son no negativos, y consideremos la serie $b_1 + b_2 + \cdots$ formada tomando algunos de los términos. Concretamente, consideramos $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y

$$b_n = a_{f(n)} \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

✍ Por ejemplo, tomando sólo los términos positivos de la serie

$$1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} + \cdots$$

obtendríamos la serie $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$.

Demostrar que si $a_1 + a_2 + \cdots$ es convergente, entonces $b_1 + b_2 + \cdots$ también lo es. ✂

8.8. Ejercicio. Ver que las siguientes series son divergentes.

a) La formada por los inversos multiplicativos de los pares positivos,
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots .$$

b) La formada por los inversos multiplicativos de los impares positivos,
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots .$$

✍ En cierto sentido, las series «sumadas» dan la serie armónica (5.3) y «restadas» dan la serie (5.1), pero no se satisfacen las hipótesis del resultado 7.2. ✄

Finalmente llegamos a una condición que nos permite trabajar con series como si fueran sumas finitas de números:

8.9. Definición. La serie $a_1 + a_2 + \cdots$ es *absolutamente convergente* si la serie $|a_1| + |a_2| + \cdots$ es convergente. ✄

Por supuesto que si una serie de términos positivos (como las consideradas en el resultado 8.1) es convergente, entonces es absolutamente convergente. Lo interesante es el resultado en general, que no demostraremos:

8.10. Resultado. *Si $a_1 + a_2 + \cdots$ es una serie absolutamente convergente, entonces es convergente.*

8.11. Ejercicio. Dar un ejemplo de una serie convergente pero no absolutamente convergente. ✄

Como vimos, las series (5.1) y (7.4) tienen los mismos términos, siendo una *reordenada* de la otra:

8.12. Definición. Un *reordenamiento* de la serie $a_1 + a_2 + \cdots$ es una serie $b_1 + b_2 + \cdots$ tal que
$$b_n = a_{f(n)} \quad \text{para } n \in \mathbb{N},$$
donde $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una función biyectiva (una permutación). ✄

8.13. Ejercicio. Consideremos la serie $0 + 1 + 0 + 1 + \cdots$, donde

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

¿Es posible encontrar un reordenamiento de la serie de modo que todos los ceros queden adelante (no haya ningún 0 detrás de un 1)? ✄

8.14. Ejercicio. Dar un ejemplo de una serie $a_1 + a_2 + \cdots$ convergente y un reordenamiento $b_1 + b_2 + \cdots$ también convergente pero con

$$\textbf{valor}(a_1 + a_2 + \cdots) \neq \textbf{valor}(b_1 + b_2 + \cdots).$$ ✄

Si $b_1 + b_2 + \cdots$ es una reordenada de $a_1 + a_2 + \cdots$, digamos $b_k = a_{f(k)}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (f biyectiva), una suma parcial de los valores absolutos de $b_1 + b_2 + \cdots$ siempre está mayorada por una suma parcial de los valores absolutos de $a_1 + a_2 + \cdots$. Concretamente, para todo natural n,

$$\begin{aligned} |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n| &= \left|a_{f(1)}\right| + \left|a_{f(2)}\right| + \cdots + \left|a_{f(n)}\right| \\ &\leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|, \end{aligned}$$

donde $m = \text{máx}\,\{f(1), f(2), \dots, f(n)\}$. Esto nos lleva al siguiente resultado, que junto con 7.2 y 8.10 nos permitirá trabajar sin temor con series absolutamente convergentes.

8.15. Resultado. *Si $b_1 + b_2 + \cdots$ es un reordenamiento de la serie absolutamente convergente $a_1 + a_2 + \cdots$, entonces $b_1 + b_2 + \cdots$ es (absolutamente) convergente y tienen la misma suma,*

$$\textbf{\textit{valor}}(a_1 + a_2 + \cdots) = \textbf{\textit{valor}}(b_1 + b_2 + \cdots).$$

O, más informalmente:

> *La propiedades asociativa y conmutativa de la suma son válidas para series absolutamente convergentes.*

8.16. Ejercicio. Dada la sucesión $(a_1, a_2, \dots)$, definamos las sucesiones $(b_1, b_2, \dots)$ y $(c_1, c_2, \dots)$ mediante:

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n > 0, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad c_n = \begin{cases} -a_n & \text{si } a_n < 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

a) Dar un ejemplo donde ninguna de las series $a_1 + a_2 + \cdots$, $b_1 + b_2 + \cdots$ o $c_1 + c_2 + \cdots$ es convergente.

b) Dar un ejemplo donde $a_1 + a_2 + \cdots$ es convergente pero ni $b_1 + b_2 + \cdots$ ni $c_1 + c_2 + \cdots$ lo son.

c) Ver que si $a_1 + a_2 + \cdots$ es absolutamente convergente, entonces también lo son $b_1 + b_2 + \cdots$ y $c_1 + c_2 + \cdots$, y

$$\begin{aligned} &\mathbf{valor}(a_1 + a_2 + \cdots) \\ &\quad = \mathbf{valor}(b_1 + b_2 + \cdots) - \mathbf{valor}(c_1 + c_2 + \cdots). \end{aligned}$$

d) ¿Podrían ser $b_1+b_2+\cdots$ y $c_1+c_2+\cdots$ convergentes y $a_1+a_2+\cdots$ divergente? ✄

Hay varios *criterios* para determinar si una serie es convergente o no, que pueden verse en los libros de análisis matemático o cálculo como los ya mencionados de Courant (1937) o Courant y John (2002).

En los ejercicios 8.2 a 8.7 usamos sin nombrarlo el *criterio de comparación* y ahora ilustraremos la idea subyacente en el *criterio del cociente* para ver que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n \tag{8.4}$$

es convergente (absolutamente) si $0 < x < 1$.

Para hacerlo trataremos de comparar los términos nx^n con los de una serie geométrica de razón y, $0 < y < 1$, de modo que al menos cuando n es grande tengamos

$$n x^n \leq y^n.$$

Como también tendremos

$$(n+1)\, x^{n+1} \leq y^{n+1},$$

si por un instante «≤» fuera lo mismo que «=», después de dividir las dos expresiones anteriores, buscaríamos y tal que

$$\frac{n+1}{n}\, x \leq y < 1,$$

y debemos considerar n suficientemente grande como para que

$$x < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

o, de forma equivalente, tomar $n + 1 \geq 1/(1 - x)$.

Observando que $1/(1-x) > 1$ pues $0 < x < 1$, podemos fijar $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\boxed{m + 1 > \frac{1}{1-x},} \tag{8.5}$$

y luego poniendo

$$\boxed{y = \frac{m+1}{m}\, x,} \tag{8.6}$$

quedará

$$\frac{n+1}{n}\, x \leq y \quad \text{para todo } n \geq m. \tag{8.7}$$

Dejamos que el lector complete ahora algunos detalles.

8.17. Ejercicio. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n-1}{n} \leq \frac{n}{n+1}.$$

8.18. Ejercicio. Si $0 < x < 1$ y valen (8.5) y (8.6), entonces:

a) $0 < y < 1$.

b) También vale (8.7).

c) Si $n \geq m$ entonces $nx^n \leq y^n$.

d) La serie (8.4) es (absolutamente) convergente si $0 \leq x < 1$.

e) La serie (8.4) es (absolutamente) convergente si $|x| < 1$.

El miembro derecho de la desigualdad (8.5) es sospechoso, y sugiere que hay una relación con la serie geométrica.

8.19. Ejercicio. Consideremos x con $|x| < 1$.

a) Ver que si $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{m} nx^{n-1} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x^m}{1-x} - mx^m\right).$$

b) **valor** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right) = 1/(1-x)^2$.

c) Encontrar el valor de la serie (8.4).

✍ Quienes hayan visto derivadas, observarán que *a*) es la derivada de (3.7) o (3.8), y *b*) es la derivada de (3.5) y, formalmente al menos, la derivada de la serie geométrica (4.5).

8.20. Ejercicio. Ver que si $|x| < 1$ y $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$ es convergente.

Comentarios adicionales

- Cuando $s > 1$, la serie (8.3) es la *función zeta de Riemann* $\zeta(s)$, fundamental en el estudio de números primos. En los ejercicios 8.2 y 8.3 vimos la relación entre $\zeta(2)$ y π. La serie armónica (5.3) correspondería al valor $\zeta(1)$ que no está definido.
- Posiblemente N. Oresme (1323–1382) haya sido quien primero demostró que la serie armónica es divergente, usando la técnica sugerida en el ejercicio 8.5.

  Es curioso que bastante después se entendiera la suma de series geométricas (ver la nota sobre Saint-Vincent).

9. Verdades ocultas

Hay mentiras compasivas
Hay mentiras por piedad
Que no quieren lastimar
Mi verdad, Maná

La notación **valor**$(a_1 + a_2 + \cdots)$ es un invento de este apunte, y no se usa en ninguna otra parte. Para el resto del mundo,

> *la expresión*
>
> $$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
>
> *puede indicar tanto la serie formal como el valor de su suma (cuando la serie es convergente).*

Así, en el «mundo exterior» tenemos que tener cuidado cuando ponemos la igualdad

$$a_1 + a_2 + \cdots = b_1 + b_2 + \cdots .$$

Si nos referimos a las expresiones formales, la igualdad podría significar que $a_k = b_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a veces llamada *igualdad término a término*.

En cambio, si nos referimos a los valores de la sumas, las series formales podrían ser diferentes como en

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 2 + 0 + 0 + \cdots ,$$

ya que ambas series tienen el mismo valor.

> *En lo que sigue abandonaremos la notación para el valor de la suma de la serie, adoptando la notación usada universalmente.*

No nos traerá mayores inconvenientes porque en el resto del apunte trabajaremos casi exclusivamente con series de términos no negativos. Por ejemplo, si $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y A es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, la expresión

$$\sum_{n \in A} a_n$$

tiene perfecto sentido puesto cualquiera sea el orden en que consideremos los elementos de A, la convergencia o divergencia no cambia por el resultado 8.15.

También, si A y B forman una partición de $\mathbb{N}$ (es decir, A y B son no vacíos, $A \cup B = \mathbb{N}$ y $A \cap B = \emptyset$), podemos poner sin inconvenientes

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n \in A} x_n + \sum_{n \in B} x_n,$$

ya que si la serie a la izquierda es convergente, también lo serán las que están a la derecha (alguna podría ser una suma finita), y el valor de la de la izquierda es la suma de los valores de las que están a la derecha. En cambio si la serie a la izquierda es divergente, alguna (o ambas) de la derecha es también divergente y no tiene sentido considerar sus valores.

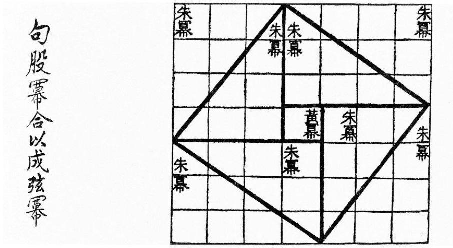

Figura 10.1: Pitágoras chino.

10. Visualizaciones: demostraciones sin palabras

Use una figura, vale mil palabras.
A. Brisbane (editor, 1911)

Hacia 1975 la revista *Mathematics Magazine* comenzó a publicar una serie de artículos cortos que tuvieron gran repercusión. Bajo el título de *Proofs without words* (*demostraciones sin palabras*), estos artículos están entremezclados con otros más largos, y su contenido se reduce a unos pocos dibujos y tal vez algunas ecuaciones orientativas. Por supuesto, no son realmente demostraciones sino visualizaciones de propiedades que estimulan el ingenio y la comprensión, y pueden llevar a una demostración rigurosa (cuanto más sencilla la demostración, más valiosa la imagen).

En realidad, esta tradición viene desde antaño. Posiblemente la «demostración sin palabras» más conocida sea la del teorema de Pitágoras en el tratado *Zhoubi Suanjing* (c. 500–200 a. C.), que mostramos en la figura 10.1.[7]

Hay varias «demostraciones sin palabras» que se ocupan de las series geométricas. Acá miraremos dos que parecen particularmente

(7) Tomada de https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=104738

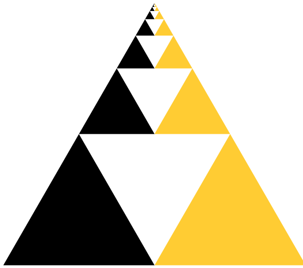

Figura 10.2: Triángulo dividido en tres partes iguales.

sencillas y llamativas: las de Mabry (1999) y Webb (1987).

El artículo de Mabry (1999) se limita a mostrar el triángulo subdividido de la figura 10.2 y poner en su título la igualdad a demostrar.

10.1. Ejercicio. Construir la imagen de la figura 10.2 con GeoGebra (10 «capas» serán más que suficientes). ✄

Si en la figura 10.2 nos restringimos al lado que sirve de borde a los triángulos negros, vemos que se divide primero en 2, una mitad se vuelve a dividir en 2, y así sucesivamente, lo que es una variante de la paradoja de la dicotomía de Zenón. En definitiva, estamos poniendo

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = \cdots,$$

que a su vez nos recuerda a la técnica que usamos para obtener (3.5). La crítica de Zenón era que no parece claro que se pueda llenar todo el segmento inicial. Del mismo modo, no parece claro que terminemos de llenar toda el área del triángulo contenedor en la figura 10.2.

10.2. Ejercicio. Redactar una demostración de la igualdad

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3},$$

basada en la figura 10.2. ✄

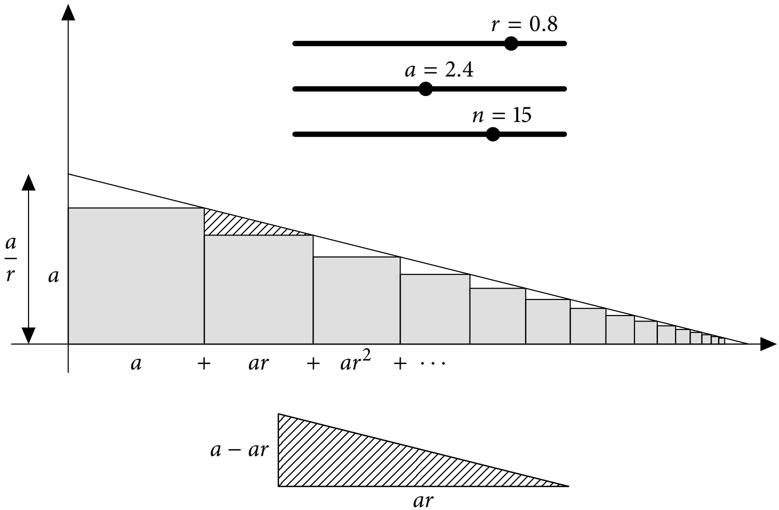

Figura 10.3: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ en relación a un triángulo.

Por otra parte, el título del artículo de Webb (1987) incluye la igualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r},$$

y la «demostración» consiste en los gráficos de la figura 10.3 (que acá reproducimos con la ayuda de GeoGebra), con las siguientes indicaciones:

$$\begin{aligned} \frac{a - ar}{ar} &= \frac{a/r}{a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots} \\ \Rightarrow \quad a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots &= \frac{a}{1-r}. \end{aligned}$$

✍ El símbolo $\Rightarrow$ se lee «por lo tanto» o «implica», también indicado a veces por $\therefore$ (tres puntos formando un triángulo).

Dejando un tiempo para que el lector reflexione sobre esta «demostración», pasemos a describirla y veamos si nuestras opiniones coinciden.

Para hacer la figura, se construye primero un cuadrado de lado a, apoyado sobre el eje x y con su extremo inferior izquierdo en el origen. A la derecha se pone un cuadrado de lado ar, a la derecha de ambos uno de lado ar^2 y así sucesivamente, incrementando la potencia de r en cada cuadrado que se agrega.

✍ Hemos usado que $a > 0$ y que $0 < r < 1$, cosa que Webb no explicita.

La tapa de un cuadrado junto con la diferencia de lados con el cuadrado anterior forman un triángulo rectángulo, como el rayado en la figura 10.3, que se ve ampliado con más detalle un poco más abajo en la misma figura.

Todos estos triángulos son semejantes, pues las proporciones entre los lados son

$$\frac{ar}{a - ar} = \frac{ar^2}{ar - ar^2} = \frac{ar^3}{ar^2 - ar^3} = \cdots = \frac{r}{1 - r},$$

por lo que sus hipotenusas están en una misma recta (¿cuál?). Esta recta corta al eje y en la ordenada a/r y al eje x en la abscisa $a/(1 - r)$, formando un triángulo semejante a los anteriores.

Si los lados de los cuadrados que están apoyados sobre el eje x cubrieran el segmento $(0, a/(1 - r))$, quedaría

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} ar^n}{a/r} = \frac{r}{1 - r},$$

y entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r},$$

que es lo que se quiere demostrar (y que ya conocíamos).

Como a Zenón y como en el caso anterior, nos queda la duda de si ésta es una verdadera demostración, ya que suponemos que los lados sobre el eje x cubren un segmento de longitud $a/(1-r)$.

10.3. Ejercicio. Reproducir con GeoGebra la figura 10.3 (sin las letras, sólo los cuadrados y triángulos), que tiene tres deslizadores: r que varía entre 0 y 1, a positivo (es simplemente un factor de escala), y n entero que indica la cantidad de cuadrados a dibujar. ✄

En resumen, tanto en la «demostración» de Mabry (figura 10.2) como en la de Webb (figura 10.3), nos quedan algunos reparos. El primero es esencialmente la duda de Zenón (quien desconocía el método de exhaución), sobre si las series «llenan» la figura correspondiente. Relacionado con esto, está la pregunta de si no se está suponiendo de antemano que las series son convergentes, lo que visualmente parece claro pero formalmente parece requerir del resultado 8.1 o similar.

Comentarios adicionales

- Hay varias recopilaciones de «demostraciones sin palabras». Las de Nelsen (1993, 2000) contienen las de Mabry y Webb que presentamos aquí y varias más sobre series (y muchos otros tópicos más).

11. Números armónicos

¿Qué es la felicidad sino la simple armonía entre un hombre y la vida que lleva?

Albert Camus

Como tantos otros objetos matemáticos, sorprende la variedad de situaciones en las que aparecen la *serie armónica* y sus sumas parciales, los *números armónicos*,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, \tag{11.1}$$

aunque posiblemente se deba a que su lento crecimiento es el más simple para una serie divergente.

Desde el vamos intriga el nombre de *armónico*, que se debe a que cada término es la media armónica de los términos lindantes,

$$\frac{1}{n} = \frac{2}{(1/(n-1))^{-1} + (1/(n+1))^{-1}} \quad \text{(para } n > 1\text{)}.$$

Recordemos que la *media armónica* es, después de la aritmética y la geométrica, uno de los promedios más usados. Si a y b son números positivos,

$$\begin{aligned} &\text{la media aritmética es:} && \frac{a+b}{2}, \\ &\text{la media geométrica es:} && \sqrt{a \times b}, \\ &\text{la media armónica es:} && \frac{2}{1/a + 1/b}, \end{aligned}$$

es decir, la media armónica es el inverso multiplicativo del promedio aritmético de los inversos multiplicativos.

Según se dice, los pitagóricos fueron los primeros en desarrollar una teoría de la música en Occidente, y fue Arquitas de Tarento (c. 430 a. C.–c. 360 a. C.) uno de los primeros en asignar el nombre «armónico» al promedio, relacionado con esa teoría.

Mirando a un teclado de piano, vemos que vuelve a repetirse el patrón de blancas y negras cada 12 teclas. La frecuencia de una nota se duplica para la nota correspondiente a la 12.ª tecla a la derecha, la *octava*. Si quisiéramos repartir las frecuencias uniformemente en 12 intervalos, tomaríamos $\alpha = \sqrt[12]{2} = 1.059\ldots$, y la nota de una tecla correspondería a multiplicar por α la frecuencia de la tecla anterior (yendo de izquierda a derecha).

Escapando como siempre a los irracionales, en este caso α, los griegos desarrollaron su teoría de música a partir de operaciones aritméticas entre enteros. De este modo obtenían la *quinta* como media aritmética entre la nota original (la *tónica*) y la octava, multiplicando la frecuencia original por $3/2$, una buena aproximación a $\alpha^7 = 1.498\dots$ (en el piano, 7 teclas a la derecha de la original contando blancas y negras). La *cuarta* es la media armónica entre la tónica y la octava, multiplicando la original por $4/3$, una buena aproximación de $\alpha^5 = 1.3348\dots$ (5 teclas a la derecha). Tomando medias aritméticas y armónicas, a veces mediante complicados manejos, se van generando las otras notas de la escala y se obtienen relaciones entre ellas.

Pero viajemos a tiempos algo más cercanos.

Leonhard Euler (1707–1783), uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos y a quien hemos mencionado ya unas cuantas veces, obtuvo varios resultados relacionados con la serie armónica. Entre otras cosas, la usó para dar una demostración alternativa a la de Euclides sobre la infinitud de primos, y, más aún, demostró que la serie de los inversos multiplicativos de los primos,

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p},$$

también es divergente (donde indicamos con $\mathcal{P}$ al conjunto de primos).

Hacia 1734, Euler demostró que a medida que n aumenta la diferencia

$$h_n - \log n$$

se parece cada vez más a la *constante de Euler-Mascheroni*,

$$\gamma = 0.577215664901\dots \tag{11.2}$$

Esto implica que para n grande, el número armónico h_n es básicamente $\log n + \gamma$, y por lo tanto crece muy lentamente. Por ejemplo, si

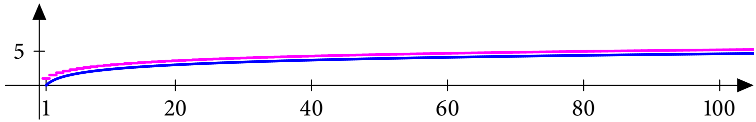

Figura 11.1: Números armónicos y el logaritmo natural.

queremos tener $h_n \geq 200$, habrá que tomar

$$n \approx e^{200} = 7.22597\ldots \times 10^{86},$$

cuando se estima que hay menos de 10^{81} átomos en el universo observable.

En la figura 11.1 hemos graficado los valores de $\log x$ para $x \geq 1$ en azul, y en púrpura los números armónicos como escalones constantes de altura h_n y base $(n - 1/2, n + 1/2)$. Como puede apreciarse con un «zoom» o una lupa, al principio se diferencian un poco pero luego los escalones prácticamente forman una curva paralela a la del logaritmo, y ambas crecen muy lentamente.

11.1. Ejercicio. Reproducir con GeoGebra la figura 11.1. ✂

Como la constante γ se conoce con muchos dígitos, para calcular h_n cuando n es muy grande y no se requiere demasiada precisión, parece más expeditivo usar el logaritmo antes que la suma indicada en (11.1).

11.2. Ejercicio. Hacer con GeoGebra o Python:

a) Encontrar la diferencia $h_n - \log n$ para $n \in \{20, 40, 60, 80, 100\}$.

✍ En GeoGebra es conveniente ajustar el redondeo a 10 dígitos *significativos*.

b) Como se puede apreciar, la diferencia $h_n - \log n$ decrece con n. Encontrar el primer n tal que la diferencia es menor que 0.5773.

Respuesta: En mi máquina esto sucede para $n = 5929$.

c) Usando la constante de Euler-Mascheroni (11.2) junto con el logaritmo natural, encontrar el primer n tal que $h_n > 20$.

Respuesta: $n = 272\,400\,601$ según mi máquina.

d) Con el valor de n encontrado en el apartado anterior, calcular h_n mediante la suma indicada en (11.1) (esto puede no tener sentido en GeoGebra).

✍ Mi máquina (no muy moderna) tarda unos 50 segundos en hacer el cálculo con Python.

¡Ajá!, ¡llegó la hora de jugar!

11.3. Ejercicio. Una pelota *muy* elástica va y viene rebotando entre dos paredes que distan un metro entre sí. Cada vez que rebota, la pelota incrementa su velocidad en 1 m/s, siendo su velocidad inicial de 1 m/s.

Suponiendo que:

- la velocidad permanece constante entre un rebote y otro,
- no hay demoras al dar la vuelta, el cambio de dirección es instantáneo,
- la velocidad de la luz es de 300 000 km/s, y
- no tenemos en cuenta la teoría de la relatividad,

resolver:

a) ¿Cuántas veces deberá rebotar la pelota para llegar a la velocidad de la luz?

Respuesta: 299 999 999 veces.

b) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a la velocidad de la luz?

Respuesta: Aproximadamente 20.1 s.

✍ El ejercicio seguramente fue pensado por un matemático: totalmente impracticable.

Lo interesante es que muestra al desnudo el crecimiento exponencial ($\log x$ es la inversa de e^x): para llegar a una velocidad ridículamente alta se necesita un tiempo ridículamente corto.

Ya hemos visto este comportamiento en el ejercicio 11.2.*c*). ✂

11.4. Ejercicio. Un conjunto de n fichas de dominó se apila sobre una mesa, una ficha colocada horizontalmente en cada capa, como se ilustra en la figura 11.2. Suponiendo que el largo de cada ficha es 2, encontrar la máxima distancia que la ficha en la cima puede sobresalir del borde de la mesa.

✍ Suponemos que las piezas del juego de dominó son paralelepípedos rectangulares iguales, de material homogéneo.

Queremos que la estructura no se caiga por la acción de la gravedad, es decir, la abscisa del centro de gravedad de un conjunto de las k ($k < n$) fichas de más arriba debe estar sobre o a la izquierda del extremo derecho de la ficha $k + 1$, y el conjunto de las n fichas debe tener su centro de gravedad con abscisa sobre o a la izquierda del borde de la mesa.

✍ El dominó tiene 28 fichas (¿por qué?), pero el argumento debe servir para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Respuesta: La máxima distancia (según la figura 11.2) es h_n. ✂

11.5. Ejercicio. Teniendo en cuenta el ejercicio 11.4 y la figura 11.2:

a) Reproducir la figura con GeoGebra, donde el deslizador para n varía entre 1 y 28 (la cantidad de fichas del dominó).

b) Según se puede observar en la figura, con 14 fichas hay dos que sobresalen completamente afuera de la mesa. Encontrar visualmente con GeoGebra, y luego comprobar analíticamente,

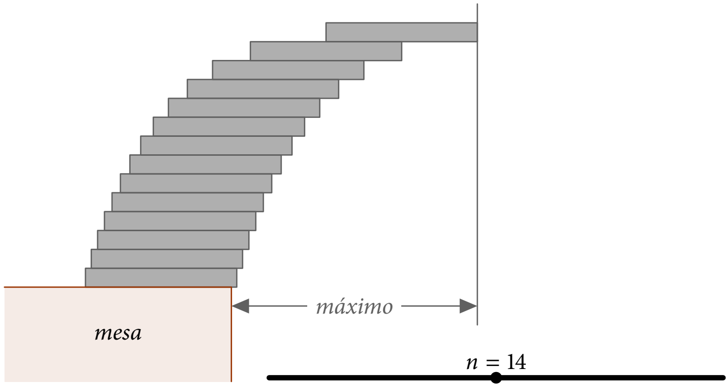

Figura 11.2: Fichas de dominó formando una pila.

el mínimo n para que sobresalgan 1, 2, 3 o 4 fichas respectivamente.

✍ «Encontrar el mínimo» significa encontrar un valor n tal que n satisface la propiedad pero $n - 1$ no la satisface.

c) 28 fichas no son suficientes para que el extremo derecho de la ficha superior esté a distancia horizontal de dos fichas (o más) del borde de la mesa. ¿Cuántas fichas son necesarias? Resolver visual y analíticamente. ✄

El próximo ejercicio en particular nos dice que, a pesar del «amontonamiento» en la configuración de la figura 11.2, el extremo superior derecho de la pila nunca sobresale exactamente una cantidad entera de fichas (recordar que suponemos que la longitud de las fichas es 2).

11.6. Ejercicio. Demostrar que h_n es entero sólo cuando $n = 1$. ✄

Comentarios adicionales

- Hemos seguido a Kullman (2001) en la justificación del nombre «armónico».

Si en vez de mirar al piano miramos una cuerda de guitarra o violín, la frecuencia se duplica al apretarla por la mitad, obteniendo la octava. Algunos autores sostienen que el nombre «armónico» proviene de que el *k-ésimo armónico* se obtiene al pulsar una cuerda de longitud $1/k$ de la original.

- Arquitas de Tarento fue contemporáneo de Platón, y uno de los primeros en trabajar en el conocimiento conjunto de la aritmética, geometría, astronomía y música, el «Quadrivium» (literalmente *cuatro vías* o, en este caso, *las cuatro ramas de la matemática*), esquema educativo que aún se mantiene en algunos lugares. El «Trivium», del cual viene la palabra *trivial*, debía realizarse antes y comprendía gramática, lógica y retórica.

  Arquitas enseñó matemáticas a Eudoxo de Cnidos (a quien encontramos en la seccion 1), y entre sus muchos inventos se encuentra un mecanismo articulado con alas, similar a un pájaro, al que logró hacer volar cerca de 300 metros gracias al impulso de un núcleo de vapor comprimido.

- El ejercicio 11.3 es una variante de uno que aparece en la versión inglesa de Wikipedia, y desconozco su autor.

- El ejercicio 11.4 es una variante de un problema de Sharp (1954).

  La solución sugerida en la figura 11.2 no es físicamente estable, en el sentido de que poniendo sobre la ficha superior una pluma, no importa cuán liviana, la estructura se desmorona. La estabilidad puede obtenerse corriendo «un poquito» cada ficha.

  Si se permite más de una ficha por «piso», es posible extenderse más allá de h_n. Paterson y otros (2009) discuten esta variante, la estabilidad de distintas soluciones y plantean problemas abiertos.

- El ejercicio 11.6 es un resultado de Theisinger (1915), y es un clásico en los entrenamientos para olimpíadas.

Apéndices

A. Notaciones y nomenclatura

Convenciones que usamos y que pueden diferir de las ya conocidas: mirarlas rápidamente y volver en caso de duda.

Notaciones

$\setminus$ — *diferencia* de conjuntos. $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\}$.

$\#(A)$, $\#A$ — *cardinal del conjunto* A, la cantidad de elementos de A.

$\emptyset$ — El *conjunto vacío*, $\#(\emptyset) = 0$.

$\mathbb{N}$ — El conjunto de números naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Para nosotros $0 \notin \mathbb{N}$.

$\mathbb{Z}$ — Los enteros, $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.

$\mathbb{Q}$ — Los racionales p/q, donde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

$\mathbb{R}$ — Los reales. Son todos los racionales más números como $\sqrt{2}$, π, etc., que no tienen una expresión decimal periódica.

$|x|$ — El *valor absoluto* o *módulo* del número x. Decir que $|a| < b$ es lo mismo que decir $-b < a < b$.

$\ln x$, $\log x$ — El *logaritmo natural* de $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Es el logaritmo en base $e = 2.718281828459\dots$, es decir, $\log x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

Nomenclatura

- $f : A \to B$ indica que f es una función del conjunto A (el *dominio* o *salida*) al conjunto B (el *codominio* o *llegada*).

- $f(a)$ es la *imagen* de $a \in A$ y el *rango* (o *imagen*) de f es el conjunto $\mathrm{Rg}(f) = \{f(a) : a \in A\}$.
- f es *inyectiva* (o *uno a uno*) si elementos distintos de A tienen imágenes distintas.
- f es *suryectiva* (o *sobreyectiva* o simplemente *sobre*) si $B = \mathrm{Rg}(f)$.
- f es *biyectiva* o *biunívoca* si inyectiva y suryectiva a la vez.

Programación

- Los comandos de Python y GeoGebra se ponen en letras distintas (monoespaciadas) y en distinto color: `2 + 3`.
- Para representar entradas y salidas de la terminal de Idle al trabajar con Python ponemos una barra adelante:

```
>>> 2 + 3
5
```

- En Python y GeoGebra el producto se indica con una «estrella» o «asterisco», `2 * 3`, y en GeoGebra también se puede dejar un espacio, `2 3`.
- La potenciación en GeoGebra se indica con un «sombrero» o «circunflejo», `2^3`, y en Python con un doble asterisco, `2**3`.

Abreviaciones

a. C. Antes de Cristo.

c., ca. *circa*, indica que la fecha que le sigue es aproximada.

B. Algoritmos con Python

En esta sección presentamos algunos algoritmos sencillos implementados en el lenguaje Python 3, en los que se prioriza sencillez sobre eficiencia.

En cada caso se puede «copiar» desde acá y luego «pegar» en Idle para su ejecución, o bien puede bajarse directamente el archivo fuente codificado en utf-8 manteniendo el formato (indicado con color violeta), pero no todas las aplicaciones para leer archivos pdf reconocen estos archivos «adosados».

Los archivos adjuntos tienen extensión «txt» por un problema de permisos en Adobe Reader, y eventualmente habrá que cambiar esa extensión a «py».

Series de Farey

Módulo para obtener la serie de Farey $\mathfrak{F}_n$ cuando n no es muy grande. Ver el ejercicio 2.9 y los comentarios en esa sección.

Descargar o leer el archivo fuente:

Desde este pdf: farey.txt

En internet: farey.py

```
"""Cálculo de la serie de Farey F(n) y su cardinal.

- F(n) es el conjunto de las fracciones irreducibles
  p/q con 0 <= p <= q <= n, incluyendo 0 y 1.

- farey(n) construye explícitamente F(n).
"""

def farey(n):
    """La serie de Farey de orden n.

- Usamos que si u = a/b, v = c/d son términos
```

```
  consecutivos en F(n-1), entonces

      (a + c)/(b + d)

  es el único término entre u y v en F(n) si
  (b + d) <= n (ver Hardy y Wright).

- El cardinal de F(n) es len(farey(n)), y puede
  obtenerse más eficientemente con la función
  fi de Euler (no hecho aquí).

- Escribimos fracciones como pares de enteros (p, q).
"""

    far = [(0, 1), (1, 1)]      # Farey(1)
    for k in range(2, n + 1):   # k = 2,...,n
        p, q = (0, 1)           # el 0 como racional
        fark = [(0, 1)]
        for u, v in far[1:]:
            w = q + v           # sumar denominadores
            if w <= k:          # si denominador chico
                fark.append((p + u, w))  # agregar
            p, q = u, v
            fark.append((p, q))
        far = fark
    return far
```

Criba de Eratóstenes

Versión sencilla de la criba de Eratóstenes para encontrar los primos que no superan n, eventualmente para usar en el ejercicio 3.8.

Descargar o leer el archivo fuente:

Desde este pdf: eratostenes.txt

En internet: eratostenes.py

```
"""Versión sencilla de la criba de Eratóstenes."""

def criba(n):
    """Lista de primos <= n."""

    #-----------------------------------------------
    # inicialización:
    # usamos una lista por comprensión para que todos
    # los elementos tengan un mismo valor inicial
    # las posiciones 0 y 1 no se usan, pero
    # simplifican la vida.

    esprimo = [True for i in range(n + 1)]  # 0,...,n

    #-----------------------------------------------
    # lazo principal:
    for i in range(2, n+1):     # 2,...,n
        if esprimo[i]:
            for j in range(i * i, n + 1, i):
                esprimo[j] = False

    #-----------------------------------------------
    # salida:
    return [i for i in range(2, n + 1) if esprimo[i]]
```

Sumas parciales

Sumas parciales de la serie armónica (divergente) y alternando signos (convergente) (ver la sección 5).

Descargar o leer el archivo fuente:
Desde este pdf: parciales.txt
En internet: parciales.py

```
"""Sumas parciales de series.
```

```
- Mostramos un ejemplo de serie convergente (log 2)
  y otro de divergente (la armónica).

- Los métodos usados no son ni eficientes ni demasiado
  precisos cuando se suman muchos términos.
"""

def alterna(n):
    """Valor de 1 - 1/2 + 1/3 -... 1/n.

- Suponemos n natural (n >= 1).

- Es una aproximación a logaritmo natural de 2.
   (En python, math.log(2))
"""
    return sum((-1)**(k+1)/k for k in range(1, n+1))

def armonico(n):
    """Número armónico 1 + 1/2 +...+ 1/n.

- Suponemos n natural (n >= 1).

- La serie 1 + 1/2 + 1/3 +... es divergente.
"""
    return sum(1/k for k in range(1, n+1))
```

C. Sugerencias para algunos ejercicios

En esta sección presentamos sugerencias para algunos ejercicios.

Vale la pena recordar que no hay una única manera de resolver los ejercicios, y las sugerencias pueden señalar un camino distinto al pensado, tal vez desorientando más que ayudando.

Claro que si todo lo demás falla, Google puede ayudar ☺.

2.3. Usar la propiedad 2.2.

2.4. Usar el ejercicio 2.3.

2.9.*b*). Usar la propiedad 2.6.

2.10.*b*). Si una función inyectiva se restringe a un subconjunto…

2.10.*c*). $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

2.12.*a*). Usar el ejercicio 2.8.

3.8.*b*). Guardar los cocientes y restos sucesivos de la división hasta que se repita un resto.

4.2. Para ver (4.6) se podría usar una *suma telescópica*,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

o bien que si los primeros $n-1$ términos suman $(n-1)/n$, al agregarle el siguiente quedará

$$\left(\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots\right) + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n\,(n+1)}.$$

6.3.*b*). Considerar $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ij}$ donde

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq n, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

7.1. ¿Cómo se comparan las sumas parciales de las series?

8.4.*a*). Comparar $1/n!$ con $1/2^{n-1}$ para $n \geq 2$.

8.5. Usando la segunda técnica en el ejercicio 8.2,

$$\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \frac{1}{2^k+3} + \cdots + \frac{1}{2^k+2^k} \geq \frac{2^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2},$$

y entonces $h_{2^m} \geq \frac{m+1}{2}$.

8.6. Repasar los ejercicios 8.2 y 8.5.

8.7. Usar el ejercicio 2.4 y el resultado 8.1 para ver que $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq \textbf{valor}(a_1 + a_2 + \cdots)$, y luego usar nuevamente 8.1.

8.13. Usar la propiedad 2.2.

8.18.*d*). Recordar el ejercicio 7.1.

8.19.*a*). $\sum_{n=1}^{m} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{m-1} (n+1)\, x^n$ y $n + 1 = \sum_{k=0}^{n} 1$.

10.2. Las tres regiones coloreadas con negro, blanco y naranja tienen igual área, $1/3$ del total.

Además, si construimos los triángulos por «capas» de abajo hacia arriba, cada nuevo triángulo ocupa un cuarto de un triángulo mayor, como el que incluye al triángulo azul en la figura 11.3, y el área de cada triángulo en una capa es $1/4$ del área de los de la capa anterior.

11.4. Si dos objetos tienen masas m_1 y m_2, y las abscisas de sus centros de gravedad son x_1 y x_2, entonces la abscisa del centro de gravedad del conjunto formado por ambos objetos es

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

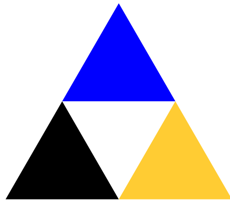

Figura 11.3: Triángulo dividido en cuatro partes iguales, los 3 inferiores forman una nueva «capa».

Si el centro de gravedad de n fichas tiene abscisa a, al agregar una ficha debajo con centro de gravedad de abscisa b, el centro de gravedad de las $n + 1$ fichas tiene abscisa $(na + b)/(n + 1)$.

11.5.*c*). Cambiar el límite superior del deslizador n.

11.6. Una posibilidad es considerar k tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$, y entonces $2^{k-1} h_n = 1/2 + a/b$ con b es impar.

Referencias

C. B. Boyer, 2007. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial. (Traducción de M. Martínez Pérez). (*pág. 5*)

C. B. Boyer y U. C. Merzbach, 2011. *A History of Mathematics*. Wiley, 3.ª ed. (*pág. 5*)

R. Courant, 1937. *Differential and Integral Calculus*, vol. 1. Interscience Publishers, 2.ª ed. (*págs. 23, 34 y 40*)

R. Courant y F. John, 2002. *Introducción al cálculo y al análisis matemático*, vol. 1. Limusa. (*págs. 23 y 40*)

N. Fava y F. Zó, 1996. *Medida e Integral de Lebesgue*. Editorial Red Olímpica (OMA). http://oma.org.ar/red/libro.php?cod=51. (*pág. 12*)

E. Gentile, 1991. *Aritmética elemental en la formación matemática*. Editorial Red Olímpica (OMA). Dos volúmenes (http://oma.org.ar/red/libro.php?cod=122 y http://oma.org.ar/red/libro.php?cod=123). (*pág. 11*)

R. L. Graham, D. E. Knuth y O. Patashnik, 1994. *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2.ª ed. (*pág. 30*)

H. G. Hardy y E. M. Wright, 2008. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 6.ª ed. Versión editada por E. R. Heath-Brown, J. H. Silverman y A. Wiles. (*pág. 11*)

D. E. Kullman, 2001. What's Harmonic about the Harmonic Series? *The College Mathematics Journal*, 32(3):201–203. (*pág. 55*)

R. Mabry, 1999. Proof Without Words: $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{3}$. *Mathematics Magazine*, 72(1). (*pág. 46*)

R. B. Nelsen, 1993. *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America. (*pág.* 49)

R. B. Nelsen, 2000. *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America. (*pág.* 49)

M. Paterson, Y. Peres, M. Thorup, P. Winkler y U. Zwick, 2009. Maximum Overhang. *American Mathematical Monthly*, 116(9): 763–787. (*pág.* 56)

R. T. Sharp, 1954. Problem 52: Overhanging dominoes. *Pi Mu Epsilon Journal*, 1(10):411–412. (*pág.* 56)

L. Theisinger, 1915. Bemerkung über die harmonische Reihe. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 26:132–134. (*pág.* 56)

J. H. Webb, 1987. Proof without Words: $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$. *Mathematics Magazine*, 60(3). (*págs.* 46 *y* 47)