Año V - Número 6 - Junio 2020

NOTAS DE GEOMETRÍA

Redactadas por los Doctores José Araujo, Guillermo Keilhauer y la Lic. Norma Pietrocola

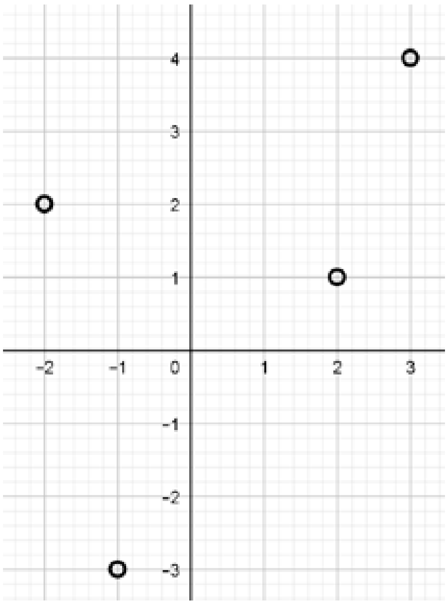
TORNEO DE LAS CUENCAS

6 SEXTA NOTA

Coordenadas, vectores, operaciones con vectores, determinantes en áreas y volúmenes

Problema 1 Ubicar los puntos de coordenadas (2, 1), (3, 4), (–2, 2), (–1, –3) en un sistema de coordenadas cartesianas.

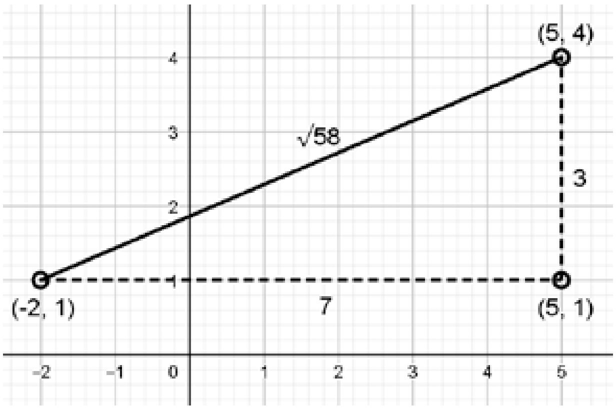
Solución



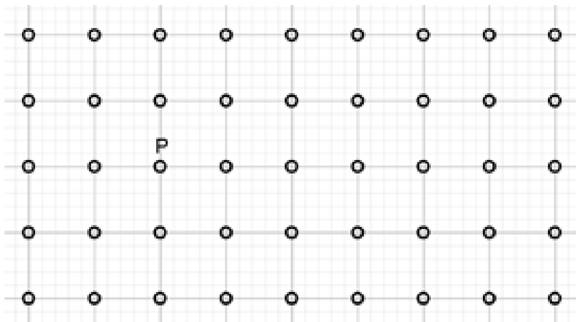
Problema 2 ¿Qué distancia hay entre los puntos de coordenadas (5, 4) y (–2, 1)?

Solución

Estos puntos son los vértices de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyo vértice restante es el punto de coordenadas (5, 1). Sus catetos miden 3 y 7 y por Pitágoras la distancia es igual a $\sqrt{7^2+3^2}=\sqrt{58}$.

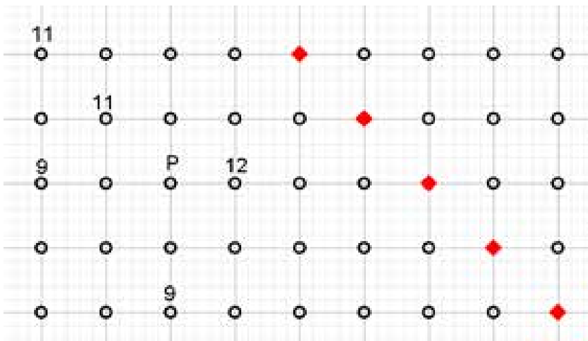


Problema 3 Los puntos indicados en la figura tienen coordenadas enteras. La suma de las coordenadas del punto P es igual a 11. ¿Cuántos puntos en la figura tienen la suma de sus coordenadas igual a 15?



Solución

Si colocamos los valores de las sumas de las coordenadas sobre cada punto, veremos que los puntos destacados en rojo son todos aquellos cuya suma de coordenadas es 15, por lo tanto, hay cinco puntos.

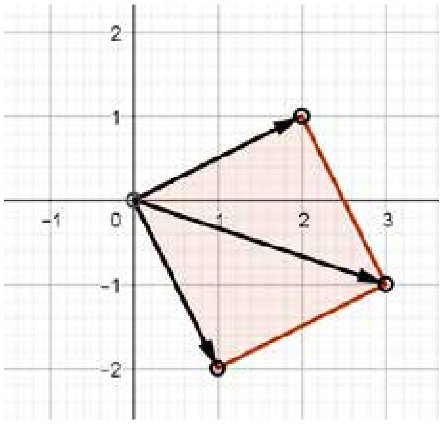


Observe que los puntos que tienen la misma suma de sus coordenadas están alineados.

Problema 4 Hallar las coordenadas del vector obtenido al sumar los vectores de coordenadas $(2, 1)$ y $(1, -2)$.

Solución

Geométricamente, siguiendo la regla del paralelogramo encontramos la suma en forma gráfica:



En forma analítica:

$$(2,\ 1) + (1,\ -2) = (2 + 1,\ 1 + (-2)) = (3,\ -1)$$

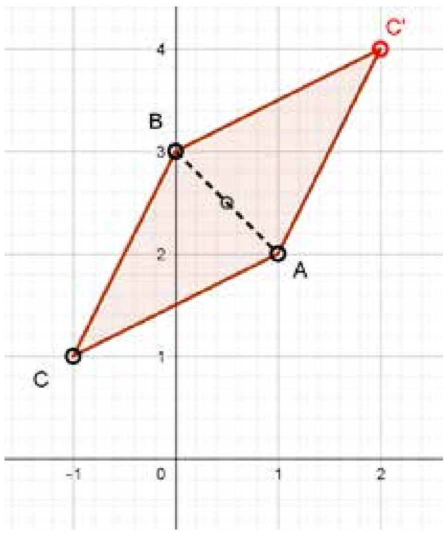
Problema 5

Los puntos *A, B* y *C* de coordenadas (1, 2), (0, 3) y (−1, 1), respectivamente, son tres vértices de un paralelogramo. Hallar las coordenadas del cuarto vértice de este paralelogramo. ¿Cuántas soluciones hay? ¿Cuál es la relación entre el área de uno de los paralelogramos y el área del triángulo determinado por los tres puntos dados?

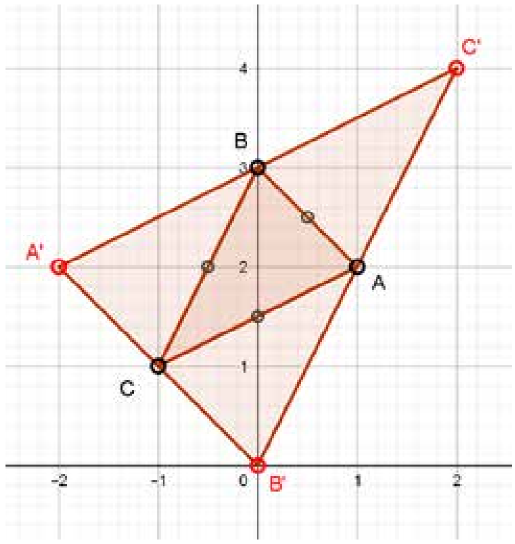
Solución

Naturalmente, el área de un paralelogramo será el doble del área del triángulo *ABC*. Una diagonal del paralelogramo puede ser *AB, BC* o *CA*. Dados los vértices *A, B, C* y una diagonal, el cuarto vértice se obtiene como el punto simétrico, respecto del punto medio de la diagonal, del vértice que no está en la diagonal.

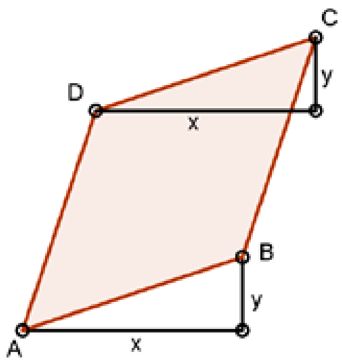
Por ejemplo, si se considera *AB* como diagonal, la siguiente figura muestra la obtención del cuarto vértice del paralelogramo *CAC′B*.



De manera análoga se obtienen los paralelogramos *ABA′C* y *ABCB′* si se consideran, respectivamente, *BC* y *CA* como diagonales.



En la figura precedente se indican tres puntos en color rojo que son los que dan lugar a los distintos paralelogramos; las coordenadas de estos puntos serían (2, 4), (–2, 2) y (0, 0). Como la información surgida del dibujo podría ser imprecisa, veamos cómo calcular las coordenadas del cuarto vértice de un paralelogramo a partir de las coordenadas de tres de sus vértices. Consideremos A, B, C, D los vértices de un paralelogramo cuyas coordenadas son (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d'), respectivamente.



En la figura, los segmentos indicados con x y con y son paralelos a los ejes cartesianos, de modo que:

$$b = a + x, \qquad b' = a' + y, \qquad c = d + x, \qquad c' = d' + y$$

de modo que:

$$c = d + b - a, \qquad c' = d' + b' - a'$$

Hemos encontrado las coordenadas de C a partir de las coordenadas de A, B, D; esto puede escribirse en forma más sintética si usamos la suma vectorial:

$$C = B + D - A$$

En el caso de nuestro problema, podemos ver que:

$$(2, 4) = (1, 2) + (0, 3) - (-1, 1)$$

$$(-2, 2) = (0, 3) + (-1, 1) - (1, 2)$$

$$(0, 0) = (-1, 1) + (1, 2) - (0, 3)$$

Comentario: La expresión obtenida para los vértices A, B, C, D de un paralelogramo también puede escribirse como:

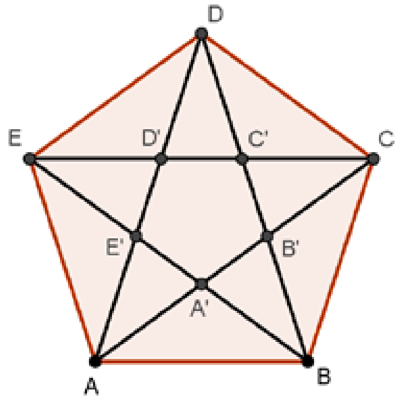
$$A + C = B + D$$

Es oportuno observar que, si tres vértices de un paralelogramo tienen coordenadas enteras, entonces el cuarto vértice también tendrá coordenadas enteras.

Problema 6 Los vértices de un pentágono regular no pueden tener todos ellos coordenadas enteras.

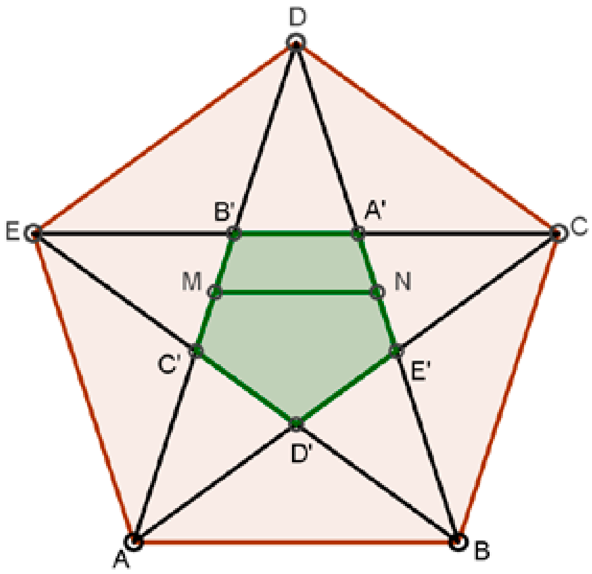
Solución

Si los vértices de un pentágono regular *ABCDE* tuvieran sus coordenadas enteras, podríamos construir un pentágono regular *A′B′C′D′E′* con vértices de coordenadas enteras como el que se muestra en la figura.



Por el comentario del problema anterior, todos los vértices del pentágono regular *A′B′C′D′E′* tienen coordenadas enteras, dado que en todos los paralelogramos *A′CDE, B′DEA, C′EAB, D′ABC, E′BCD* hay tres vértices de coordenadas enteras.

Por otra parte, la longitud del lado de *A′B′C′D′E′* es menor que la mitad de la longitud del lado de *ABCDE*. Para ver esto, razonamos sobre la siguiente figura.



Como $AC' = B'D$, el punto medio *M* de *C′B′* es el punto medio de *AD*. Análogamente, el punto medio *N* de *A′E′* es el punto medio de *BD*. Luego *MN* es la base media, relativa a *AB*, del triángulo

ABD. La diagonal *EC* es paralela a *AB*, de modo que *MNA'B'* es un trapecio isósceles con *MN* como base mayor. Se tiene que *A'B'* es menor que $NM = \frac{1}{2}AB$.

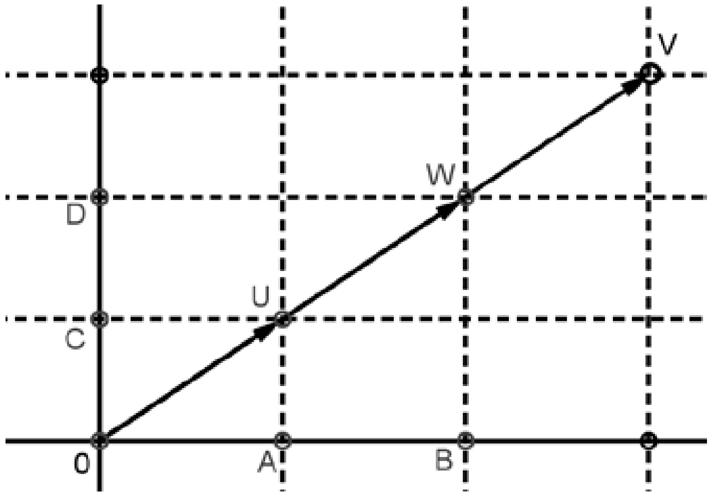
Reiterando esta construcción es posible obtener un pentágono regular cuyos vértices tengan coordenadas enteras y la longitud de sus lados sea menor que 1. Contradicción, pues la distancia entre dos puntos distintos de coordenadas enteras es mayor o igual que 1.

En conclusión, no hay pentágonos regulares cuyos vértices tengan coordenadas enteras.

Problema 7 El vector *v* de coordenadas (6, 4) se divide en tres partes iguales. ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores obtenidos?

Solución

Por el teorema de Thales, las rectas paralelas al eje Y que pasan por los puntos *A* de coordenadas (2, 0) y *B* de coordenadas (4, 0) dividen al vector *V* en tres partes iguales. Lo mismo ocurre con las rectas paralelas al eje X que pasan por los puntos *C* de coordenadas (0, 4/3) y *D* de coordenadas (0, 8/3).



Las coordenadas de los puntos *U* y *W* obtenidos son (2, 4/3) y (4, 8/3).

Nota: Las coordenadas de los vectores U y W también pueden expresarse como:

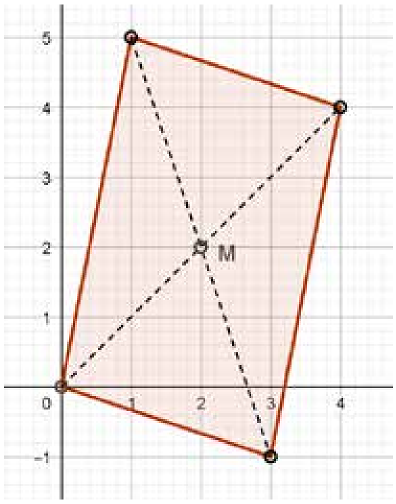
$$\frac{1}{3}\times(6,4)=\left(\frac{1}{3}\times 6, \frac{1}{3}\times 4\right)=\left(2, \frac{4}{3}\right)$$

$$\frac{2}{3}\times(6,4)=\left(\frac{2}{3}\times 6, \frac{2}{3}\times 4\right)=\left(4, \frac{8}{3}\right)$$

Problema 8 Hallar las coordenadas del punto medio del segmento cuyos vértices son los puntos de coordenadas (1, 5) y (3, −1).

Solución

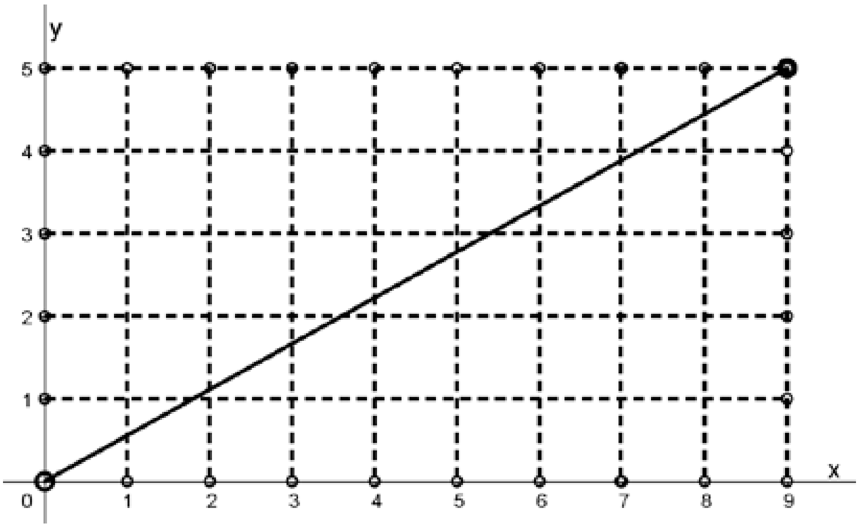
El punto medio del segmento (1, 5),(3 ,−1) es el punto de intersección de las diagonales del paralelogramo cuyos vértices tienen coordenadas (0, 0), (3, −1), (4, 4), (1, 5).



Procediendo como en el problema anterior, las coordenadas del punto medio *M* del segmento con vértices en (3, –1) y (1, 5) están dadas por $(2, 2) = \frac{1}{2} \times (4, 4) = \frac{1}{2} \times ((3, -1) + (1, 5))$.

Comentario: En forma general, es posible establecer que el punto medio en el segmento AB puede obtenerse como $\frac{1}{2}(A + B)$*, donde A y B se suman como vectores.*

Problema 9 Hallar las coordenadas de los puntos de la intersección entre el segmento que une (0, 0) con (9, 5) y las rectas indicadas en líneas de puntos.

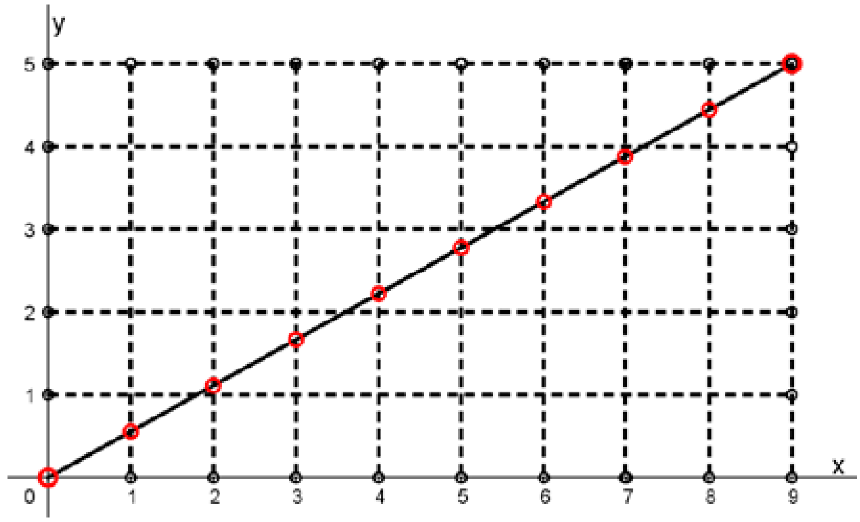


Solución

Por el teorema de Thales, las rectas paralelas al eje Y, indicadas en la figura, dividen al segmento con vértices en (0, 0) y (9, 5) en nueve segmentos iguales, los que podemos expresar como:

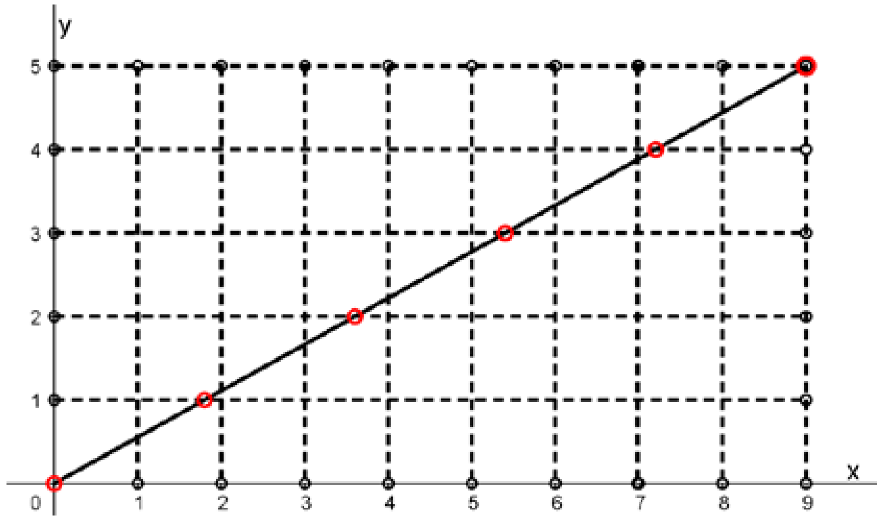
1/9 × (9, 5), 2/9 × (9, 5), 3/9 × (9, 5), 4/9 × (9, 5), 5/9 × (9, 5),

6/9 × (9, 5), 7/9 × (9, 5), 8/9 × (9, 5), 9/9 × (9, 5)



En forma similar, los puntos en las rectas horizontales están dados por:

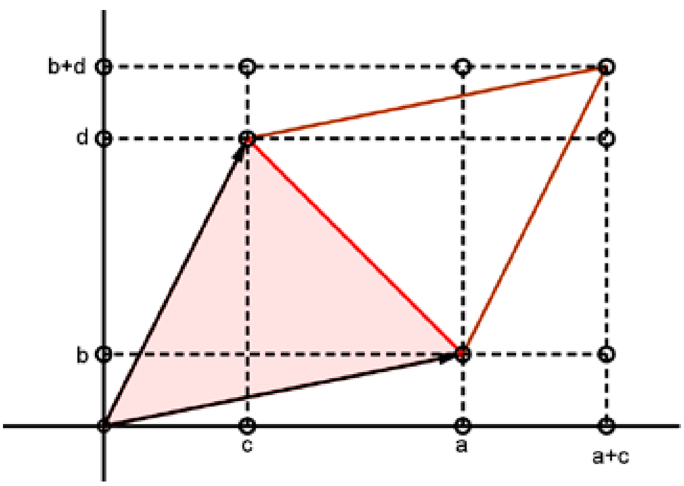
1/5 × (9, 5), 2/5 × (9, 5), 3/5 × (9, 5), 4/5 × (9, 5), 5/5 × (9, 5)



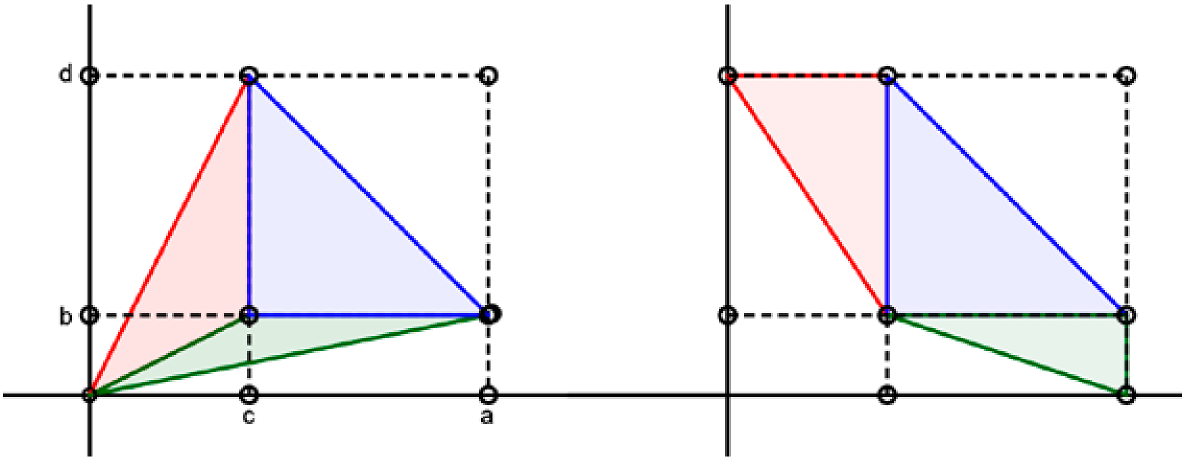
Problema 10 Hallar el área del paralelogramo cuyos vértices tienen coordenadas (0, 0), *(a, b)*, *(c, d)* y *(a + c, b + d)*.

Solución

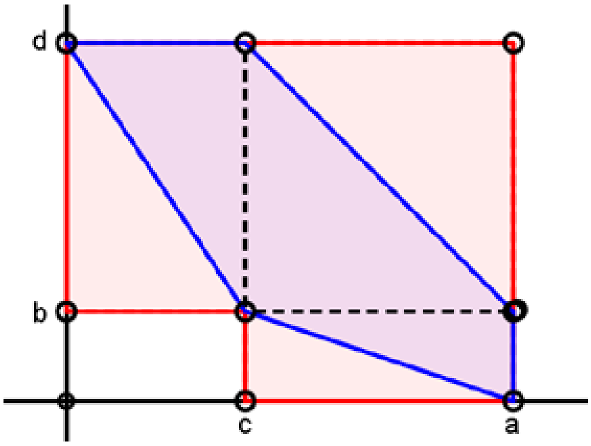
El área del paralelogramo es el doble del área del triángulo con vértices en (0, 0), *(a, b)*, *(c, d)*.



El área de dicho triángulo, descompuesto en tres triángulos según la siguiente figura, coincide con el área del pentágono obtenido al reemplazar cada uno de dos de tales triángulos por uno de igual área (tienen igual base y altura).

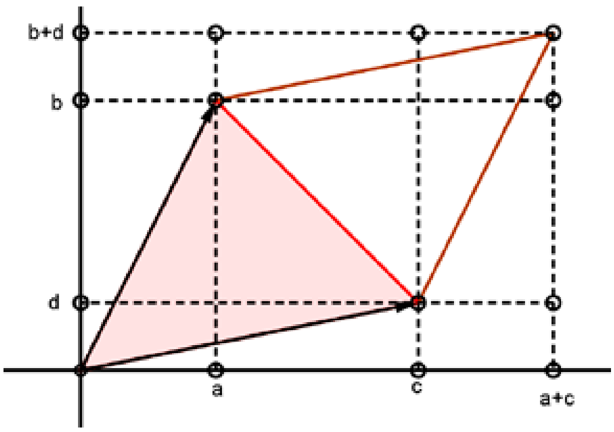


Teniendo en cuenta los rectángulos y triángulos de la figura, se observa que puede obtenerse el área del pentágono como $\frac{1}{2}(ad - bc)$.



En consecuencia, el área del paralelogramo es $ad - bc$.

Nota: Si en el primer dibujo intercambiáramos los roles de los vectores (a, b) y (c, d), es decir, si tuviéramos la siguiente figura:

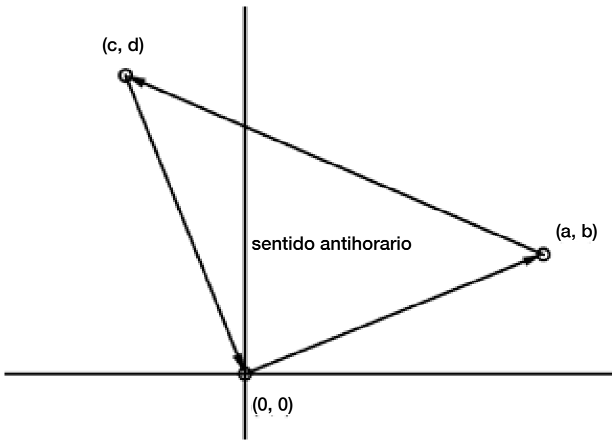


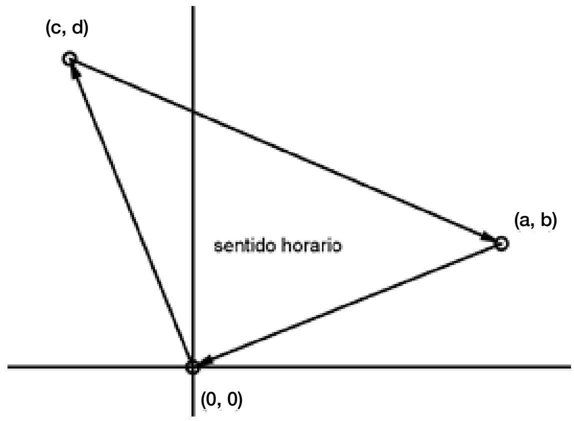
la expresión del área sería $bc - ad = -(ad - bc)$; entonces, dependiendo de la posición relativa de los puntos (a, b) y (c, d), el área del paralelogramo estará dada por aquella expresión que no sea negativa.

Dos vectores no nulos *(a, b)* y *(c, d)* determinan dos ángulos, uno de ellos menor o igual que 180°. Si es 0 o 180°, (0, 0), *(a, b)* y *(c, d)* son los vértices de lo que se llama un triángulo degenerado, de área cero y vértices alineados. En otro caso, (0, 0), *(a, b)* y *(c, d)* son los vértices de un triángulo cuya área se obtiene como un medio del determinante de una de las matrices:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

Si los vectores (0, 0), *(a, b) y (c, d)* se ordenan de modo que el contorno del triángulo que determinan sea recorrido en sentido antihorario, el área es un medio del determinante; en el caso contrario, el área es menos un medio del determinante.



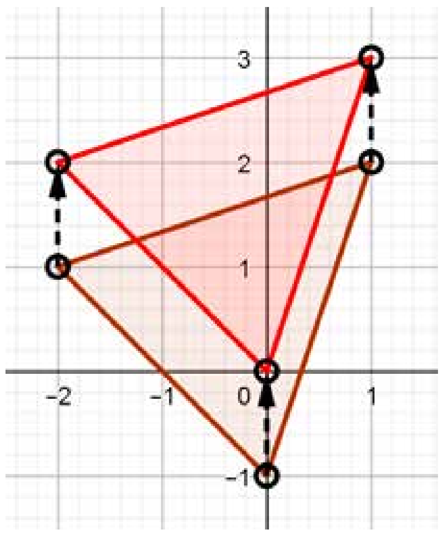


En definitiva, el área del paralelogramo es el valor absoluto del determinante, es decir $|ad - bc|$.

Problema 11 Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (1, 2), (–2, 1) y (0, –1).

Solución

Trasladamos el triángulo de manera que uno de sus vértices sea el origen de coordenadas, es decir (0, 0):



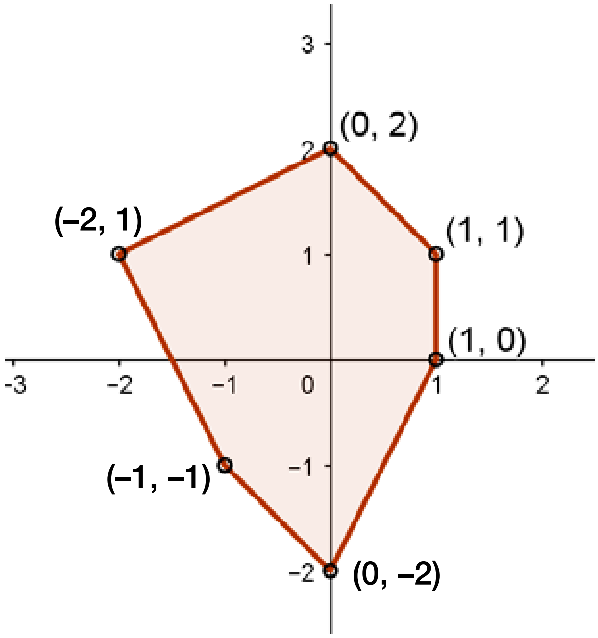
Esto puede conseguirse, por ejemplo, restando el vértice (0, –1) a los tres vértices del triángulo dado para obtener los vértices de un nuevo triángulo:

$$(1, 2) - (0, -1) = (1, 3), \quad (-2, 1) - (0, -1) = (-2, 2), \quad (0, -1) - (0, -1) = (0, 0)$$

Por lo visto en el Problema 10, el área de este nuevo triángulo es:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left(1\times 2-(-2)\times 3\right) = 4 \,.$$

Problema 12 Hallar el área del polígono cuyos vértices son los puntos de coordenadas:
(1, 0), (1, 1), (0, 2), (–2, 1), (–1, –1), (0, –2)



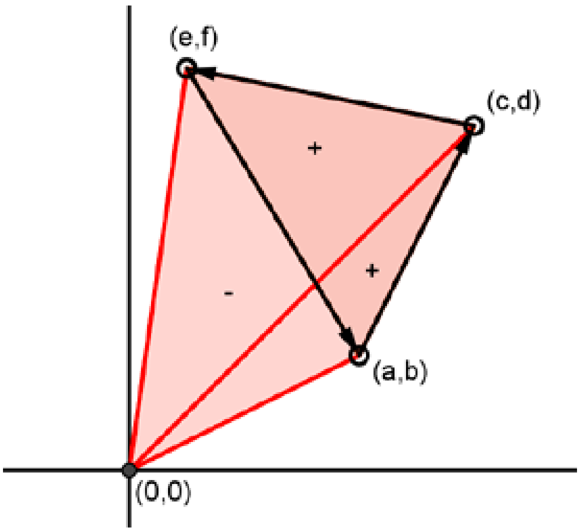
Solución

Veamos primero otra manera de calcular el área de un triángulo, a partir de las coordenadas de sus vértices; es la que exponemos a continuación.

Por ejemplo, consideremos el triángulo cuyos vértices tienen coordenadas *(a, b), (c, d), (e, f)*, ordenados de modo que el contorno se recorra en sentido antihorario. Si realizamos la siguiente suma:

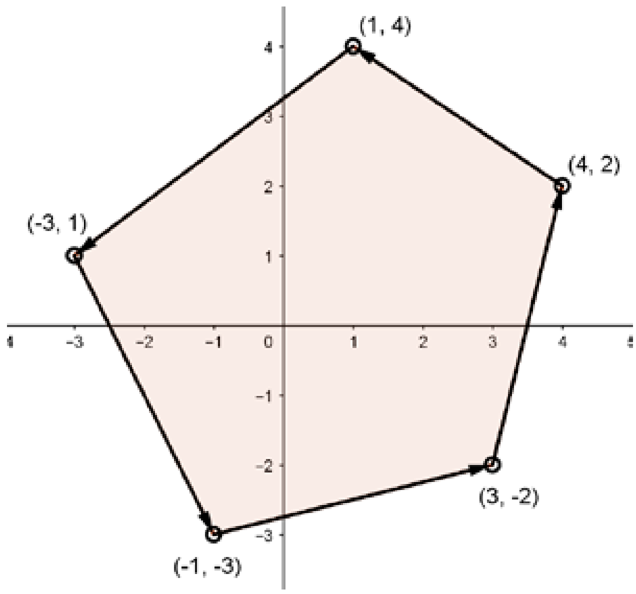
$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} e & f \\ a & b \end{pmatrix}$$

obtendremos el área del triángulo *(0, 0),(a, b),(c, d)*, más el área de *(0, 0),(c, d),(e, f)*, menos el área del triángulo *(0, 0),(e, f),(a, b)*.



Como muestra la figura, la suma considerada coincide con el área de *(a, b),(c, d),(e, f)*.

Del mismo modo podemos calcular el área de un polígono a partir de las coordenadas de sus vértices. Por ejemplo, el área del pentágono:

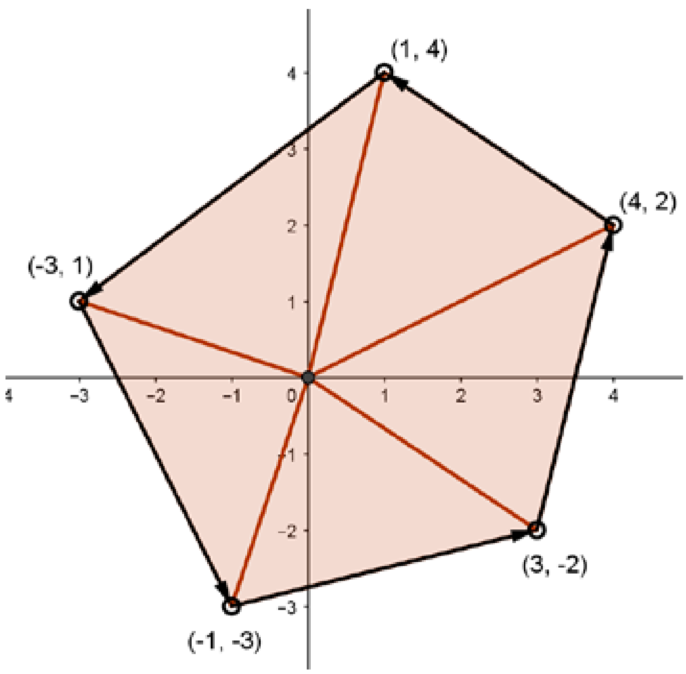


está dada por:

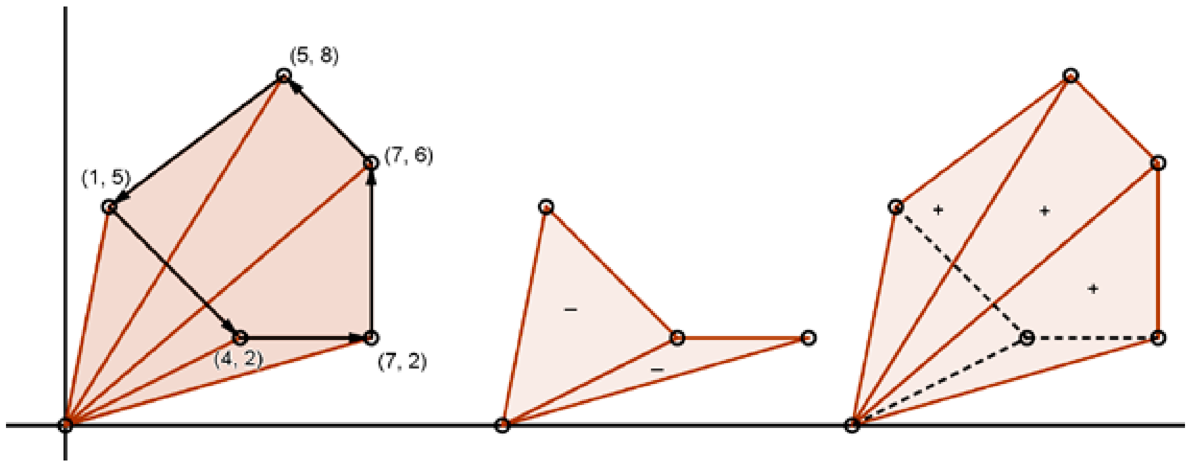
$$\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\right)=31$$

Esta suma responde a la descomposición del pentágono en triángulos que comparten un vértice en el origen de coordenadas, tal como indica la figura siguiente:



Es oportuno aclarar que si el origen de coordenadas estuviera en el exterior del polígono, como se muestra en la siguiente figura,



el área puede obtenerse con la misma expresión, teniendo en cuenta que esta representa las sumas de las áreas de los triángulos:

(0, 0),(4, 2),(7, 2), (0, 0),(7, 2),(7, 6), (0, 0),(7, 6),(5, 8), (0, 0),(5, 8),(1, 5),

(0, 0),(1, 5),(4, 2),

cada una con el signo que le corresponde según la orientación del triángulo.

En este caso, las áreas de los triángulos (0, 0),(7, 2),(7, 6), (0, 0),(7, 6),(5, 8) y (0, 0),(5, 8),(1, 5) aparecen sumando en la expresión, mientras que las áreas de los triángulos (0, 0),(4, 2),(7, 2) y (0, 0),(1, 5),(4, 2) aparecen restando.

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(-6+28+26+17-18)=\frac{47}{2}$$

Para calcular el área del hexágono propuesto en el problema usamos la expresión correspondiente.

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)=7$$

Problema 13 ¿Qué condiciones deben cumplir las coordenadas *(x, y)* de un punto para pertenecer a la recta que pasa por (1, 0) y (0, 1).

Solución

La condición para que un punto *(x, y)* esté en la recta que pasa por (1, 0) y (0, 1) es que estos tres puntos estén alineados, o, equivalentemente, que el área del triángulo con vértices en *(x, y)*, (1, 0) y (0, 1) sea igual a cero, es decir:

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & 0-y \\ 0-x & 1-y \end{pmatrix}=1-x-y=0$$

La identidad precedente puede escribirse también como $x + y = 1$.

NOTAS DE GEOMETRÍA 6

Problema 14 Determinar, en función de sus coordenadas, si los puntos *A, B* y *C* están alineados.

Solución

A, B y *C* están alineados solo cuando *ABC* es un triángulo degenerado, es decir, de área cero. Si *(a, a')*, *(b, b')* y *(c, c')* son las coordenadas de *A, B* y *C*, respectivamente, la condición para que los puntos *A, B* y *C* estén alineados equivale a la igualdad:

$$\det\begin{pmatrix} b-a & b'-a' \\ c-a & c'-a' \end{pmatrix}=0$$

Otra manera equivalente es:

$$\det\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} c & c' \\ a & a' \end{pmatrix}=0$$

El miembro de la izquierda en la igualdad precedente puede escribirse como:

$$\det\begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix} a & a' \\ c & c' \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & a & a' \\ 1 & b & b' \\ 1 & c & c' \end{pmatrix}$$

Ejemplo: ¿Los puntos (1, 3), (–2, 10) y (3, –5) están alineados?

Calculamos el determinante;

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}=1\times(-2)\times(-5)+1\times1\times10+3\times3\times1-1\times(-2)\times3-1\times1\times(-5)-1\times3\times10=10$$

y concluimos que los puntos no están alineados.

Problema 15 Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos *(a, b)* y *(c, d)*.

Solución

El punto *(x, y)* estará en la recta que pasa por los puntos *(a, b)* y *(c, d)* solamente cuando el triángulo con vértices *(x, y)*, *(a, b)* y *(c, d)* tenga área cero, es decir, si:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 1 & a & b \\ 1 & c & d \end{pmatrix}=0$$

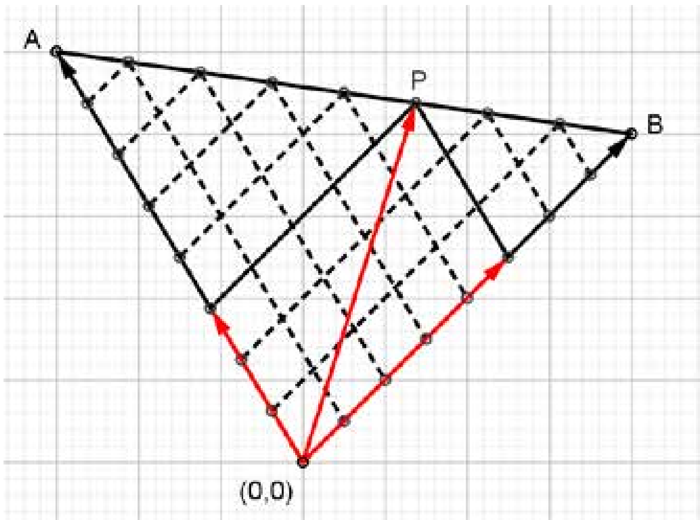
La ecuación de la recta es:

$$(b-d)x+(c-a)y=bc-ad$$

Problema 16 El punto *P* está en el segmento *AB*, con *A* = (–3, 5) y *B* = (4, 4). Si la relación *AP:PB* es 5:3, hallar las coordenadas de *P*.

Solución

La relación $\frac{AP}{PB}=\frac{5}{3}$ equivale a $\frac{AP}{5}=\frac{PB}{3}$, es decir que dividiendo a *AP* en cinco partes iguales y a *PB* en tres partes iguales, por la igualdad anterior, resulta *AB* dividido en ocho partes iguales. Ahora, si los vectores *A* y *B* se dividen en ocho partes iguales, por ejemplo, trazando por los puntos de división de *AB* las paralelas a los vectores *A* y *B*, como se observa en la figura,



resulta:

$$P=\frac{3}{8}A+\frac{5}{8}B=\frac{3}{8}(-3,5)+\frac{5}{8}(4,4)=\left(\frac{11}{8},\frac{35}{8}\right)$$

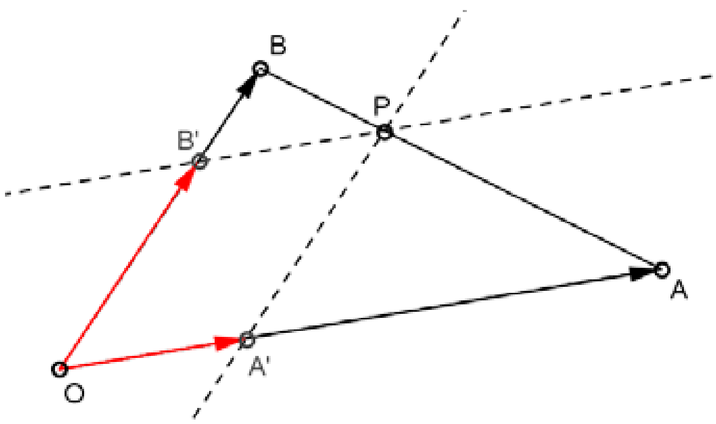
Comentario: el caso general

El problema precedente puede ser tratado de un modo general, es decir: si el punto *P* está en un segmento *AB* y la relación *AP*:*PB* es *p*:*q*, hallar las coordenadas de *P* a partir de las coordenadas *(a, b)* de *A* y *(c, d)* de *B*.

Resolveremos de la misma manera que lo hicimos en el problema, o sea, a partir de expresar *P* como:

$$P = \alpha A + \beta B$$

donde α y β son números apropiados. Para esto necesitamos ver los puntos *A, B* y *P* como los extremos de vectores con un origen común *O*. En la figura,



el cuadrilátero *OA′PB′* es un paralelogramo, vale decir que, desde el punto de vista vectorial, es:

$$P = A' + B'$$

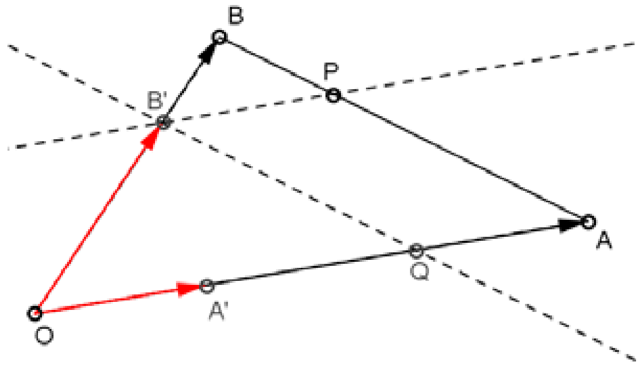
Por otra parte:

$$A' = \alpha A \qquad \text{y} \qquad B' = \beta B$$

donde:

$$\alpha = OA' / OA \qquad \text{y} \qquad \beta = OB' / OB$$

Usando semejanza de triángulos podemos expresar α y β prescindiendo del origen O. Trazando la recta $B'Q$ paralela a AB,



se tiene que $AQ = PB'$ y que los triángulos OQB' y OAB son semejantes. Se cumplen las relaciones:

$$\beta = OB' / OB = B'Q / AB = PA / AB$$

En forma similar, se puede establecer que $\alpha = PB / AB$.

Por otra parte, $AP / PB = p / q$, o sea, $AP = (p / q)PB$ y así:

$$AB = AP + PB = (p / q)PB + PB = (p / q + 1)PB = (p + q) / qPB$$

y, en consecuencia, $\alpha = PB / AB = q / (p + q)$. Análogamente, se puede ver que $\beta = p / (p + q)$.

Finalmente tenemos la expresión:

$$P = \frac{q}{p+q}A + \frac{p}{p+q}B$$

Para encontrar las coordenadas de P solo hay que reemplazar, en la expresión precedente, A por (a, b) y B por (c, d) y efectuar las operaciones. Las coordenadas de P resultan:

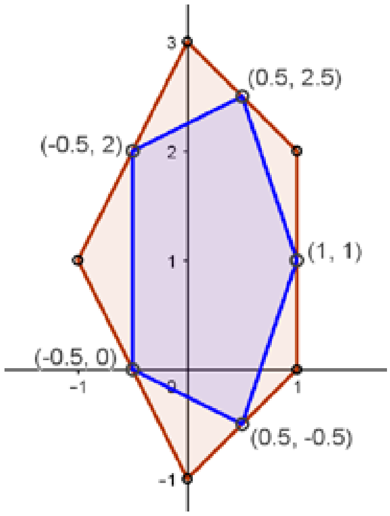
$$\left(\frac{qa+pc}{p+q}, \frac{qb+pd}{p+q}\right)$$

Es oportuno destacar la expresión vectorial:

$$\boxed{P = \frac{q}{p+q}A + \frac{p}{p+q}B}$$

que se usará reiteradamente en estas notas: punto medio, baricentro, etcétera.

Problema 17 Los vértices de un pentágono P tienen coordenadas $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$, $(-1, 1)$, $(0, -1)$. Hallar el área del pentágono cuyos vértices son los puntos medios de los lados de P.



Solución

Siguiendo el procedimiento usado en el Problema 10, el área del pentágono puede obtenerse como:

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,5 & 2,3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0,5 & 2,5 \\ -0,5 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -0,5 & 2 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -0,5 & 0 \\ 0,5 & -0,5 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \det\begin{pmatrix} 0,5 & -0,5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 3,25$$

Problema 18 Muestre que los triángulos con vértices (0, 0),*(a, b)*,*(c, d)*, (0, 0),*(d, c)*,*(b, a)*, (0, 0), *(a, c)*,*(b, d)* y (0, 0),*(d, b)*,*(c, a)* tienen todos una misma área.

Solución

Esto puede resolverse aplicando la fórmula del determinante.

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \quad \det\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

Observe que estos triángulos son iguales de a pares y justifique esta afirmación.

Problema 19 Hallar las coordenadas del baricentro de un triángulo cuyos vértices tienen coordenadas:

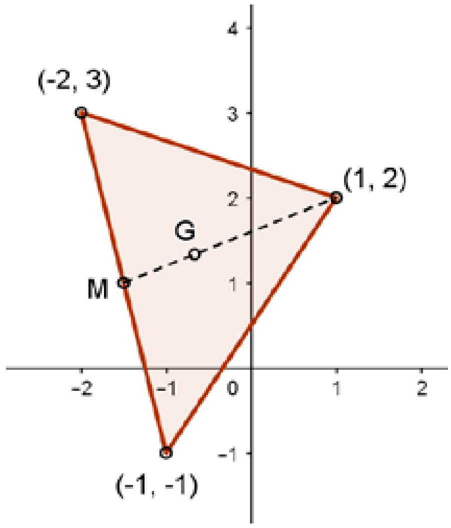
(1, 2),(–2, 3),(–1, –1)

Solución

El punto medio M del lado (–2, 3),(–1, –1) tiene coordenadas (ver Problema 8):

$$\frac{(-2,3)+(-1,-1)}{2} = \left(-\frac{3}{2}, 1\right)$$

El baricentro G se encuentra en el segmento de extremos (–3/2, 1) y (1, 2), en la relación 1:2.



En consecuencia $G=\frac{2}{3}(-3/2,1)+\frac{1}{3}(1,2)=(-2/3,4/3)$ (ver Problema 16).

Observamos que G puede obtenerse como el promedio de los vértices del triángulo.

$$G=\frac{2}{3}(-3/2,1)+\frac{1}{3}(1,2)=\frac{2}{3}\left(\frac{(-2,3)+(-1,-1)}{2}\right)+\frac{1}{3}(1,2)=$$

$$=\frac{(-2,3)+(-1,-1)+(1,2)}{3}=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

Esto es un hecho general:

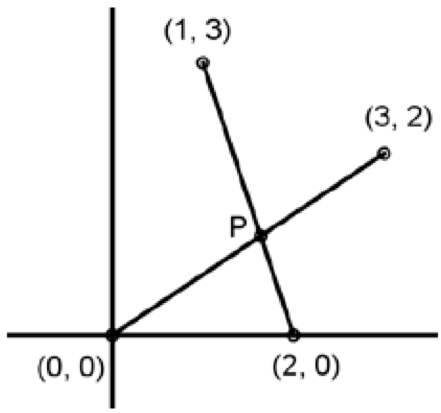
En un triángulo ABC el baricentro es el promedio de sus vértices, es decir:

$$\frac{A+B+C}{3}$$

Problema 20 Hallar las coordenadas del punto de intersección de los segmentos con vértices (0, 0),(3, 2) y (2, 0),(1, 3).

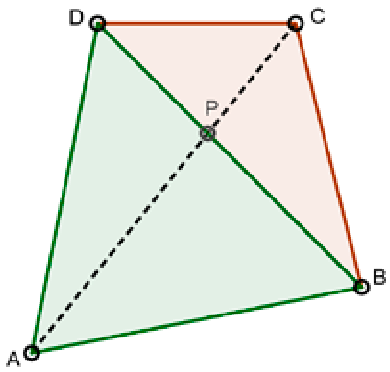
Solución

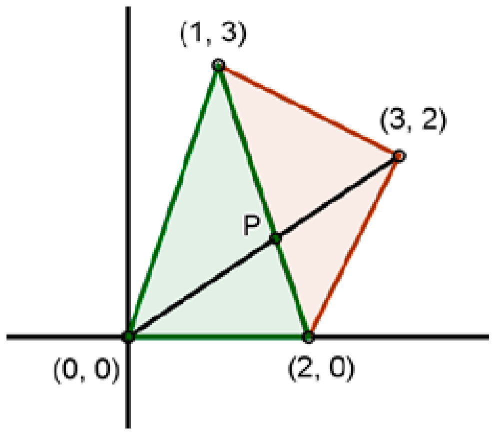
El punto P de intersección se encuentra en el segmento (0, 0),(3, 2).



Debido a la siguiente propiedad (ver demostración en Problema 9 de los problemas propuestos en *Notas de Geometría* N° 1):

Si P es el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero ABCD, entonces la relación AP:PC es la misma que área ABD:área BCD.





En el problema propuesto, la relación en la que P divide al segmento (0, 0),(3, 2) es la misma que la relación entre las áreas de los triángulos (0, 0),(2, 0),(1, 3) y (2, 0),(3, 2),(1, 3).

Luego, en virtud del Problema 16, resulta:

$$P = \frac{\text{Área } BCD}{\text{Área } ABCD}(0,0) + \frac{\text{Área } ABD}{\text{Área } ABCD}(3,2)$$

Dado que:

$$\text{Área } ABD = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right| = 3$$

$$\text{Área } BCD = \frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \frac{5}{2}$$

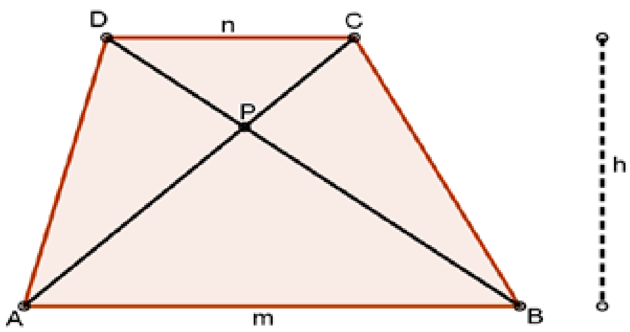
Se tiene:

$$P = \frac{6}{11}(3,2) = \left(\frac{18}{11}, \frac{12}{11}\right)$$

En general, en un cuadrilátero *ABCD* el punto *P* de intersección de las diagonales puede obtenerse como:

$$P = \frac{\text{Área } BCD}{\text{Área } ABCD}A + \frac{\text{Área } ABD}{\text{Área } ABCD}C$$

En particular, si *ABCD* es un trapecio de altura *h* y bases *AB* y *CD* cuyas longitudes son *m* y *n* respectivamente,



entonces:

$$P = \frac{n}{n+m}A + \frac{m}{n+m}C = \frac{n}{n+m}B + \frac{m}{n+m}D$$

dado que en este caso es:

$$\frac{\text{Área } BCD}{\text{Área } ABCD} = \frac{\frac{1}{2}nh}{\frac{m+n}{2}h} = \frac{n}{m+n} \quad \text{y} \quad \frac{\text{Área } ABD}{\text{Área } ABCD} = \frac{\frac{1}{2}mh}{\frac{m+n}{2}h} = \frac{m}{m+n}$$

Problema 21 Hallar las coordenadas del vector $p = (a, b)$ luego de:

i) girarlo 90° alrededor del origen;

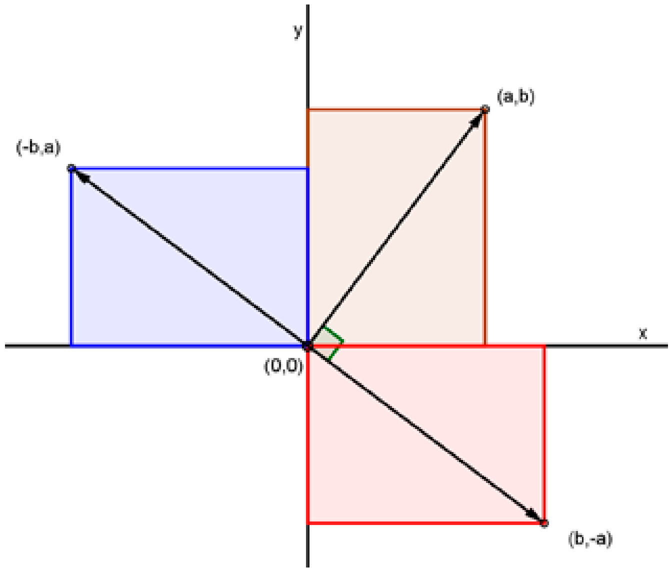
ii) reflejarlo respecto de cada uno de los ejes cartesianos;

iii) reflejarlo respecto de cada una de las rectas de ecuación $x = y$, $x = -y$;

iv) simetrizarlo respecto de un centro (c, d).

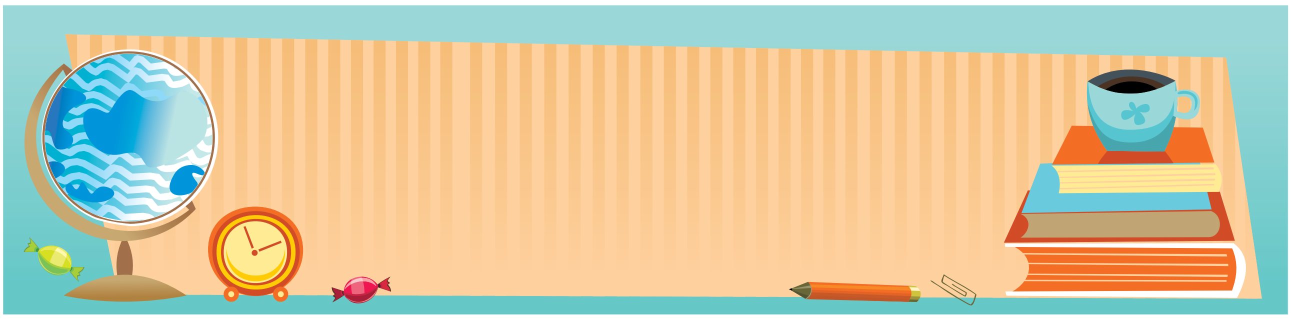
Solución

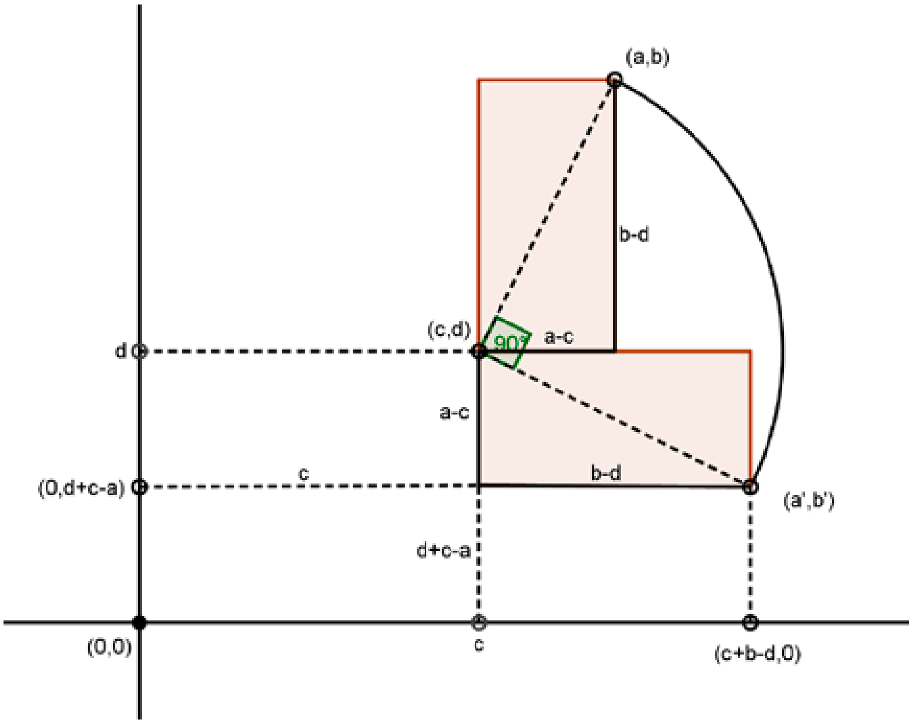
i) Consideramos el rectángulo de la figura con diagonal $(0, 0)$,(a, b).



Si este rectángulo se rota 90° en sentido horario, se obtiene el rectángulo rojo, y si se rota 90° en sentido antihorario, se obtiene el rectángulo azul. Entonces, el punto (a, b) se transforma en $(b, -a)$ y $(-b, a)$ respectivamente.

En forma similar, podemos tratar el caso de una rotación de 90° respecto de un centro (c, d). En la figura, rotando en sentido horario, el punto (a, b) se transforma en (a', b').

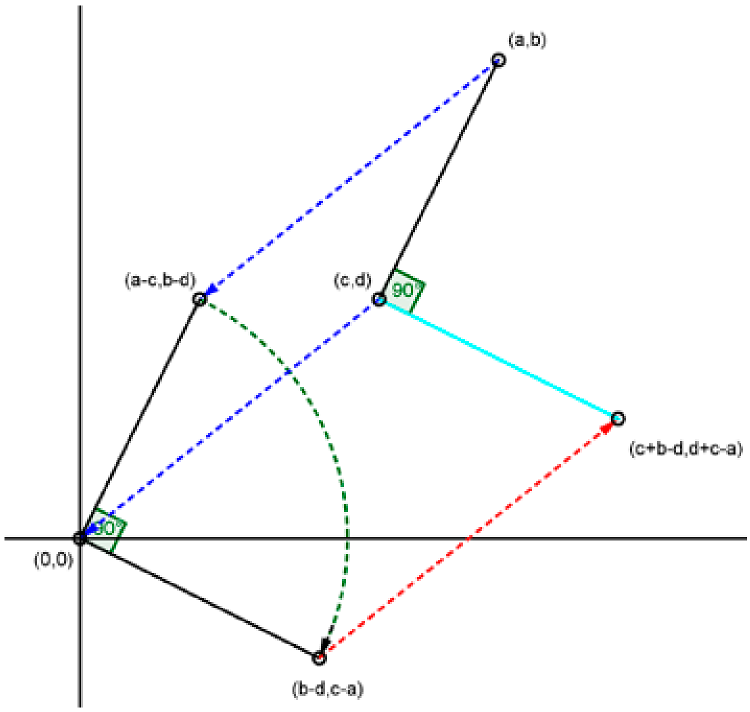




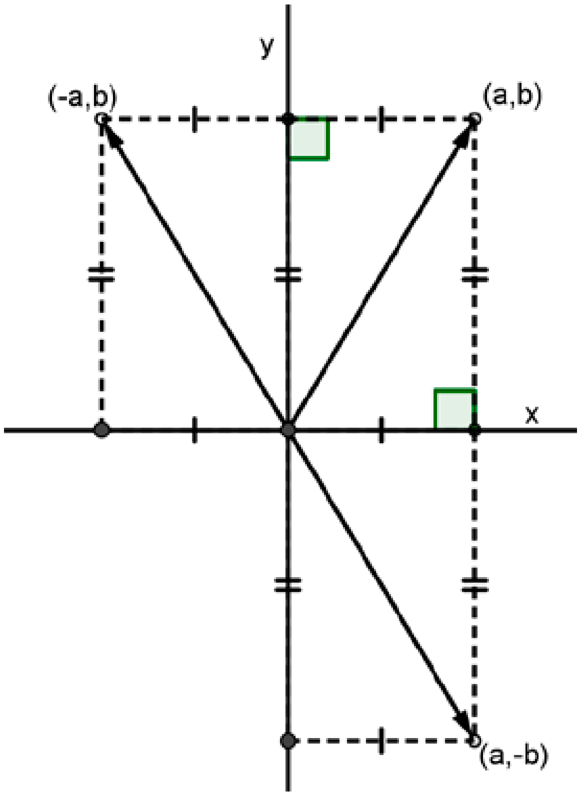
Operando con los datos consignados en la figura, es decir, longitudes de segmentos y coordenadas de los puntos involucrados, se obtienen los valores de $a' = c + b - d$ y $b' = d + c - a$.

Otra manera de hallar las coordenadas de (a', b') puede ser por composición de movimientos, como se indica a continuación:

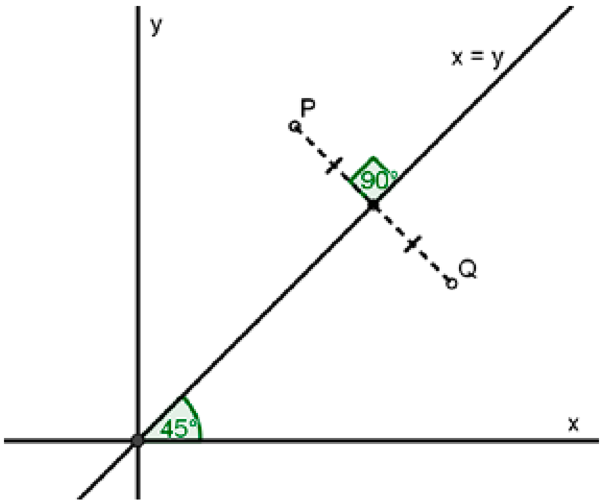
1. Trasladar los puntos (a, b) y (c, d) de modo que (c, d) quede en el origen. Se obtienen de esta forma $(a - c, b - d)$ y $(0, 0)$.
2. Rotar $(a - c, b - d)$ 90° alrededor del origen, usando la expresión anteriormente dada, para obtener $(b - d, c - a)$.
3. Trasladar $(b - d, c - a)$ según el vector (c, d) para obtener (a', b') como $(c + b - d, d + c - a)$.



ii) La figura ilustra la situación mostrando que al reflejar *(a, b)* respecto de los ejes X e Y se obtienen respectivamente *(a, –b)* y *(–a, b)*.

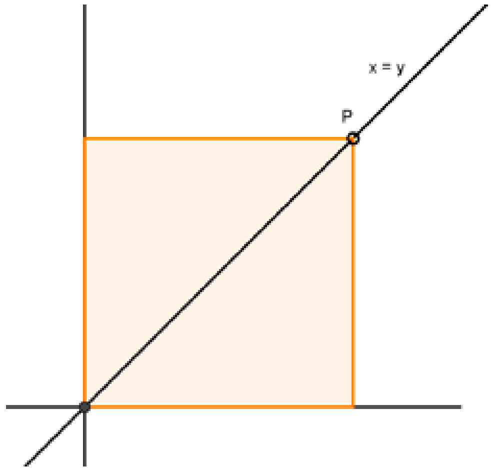


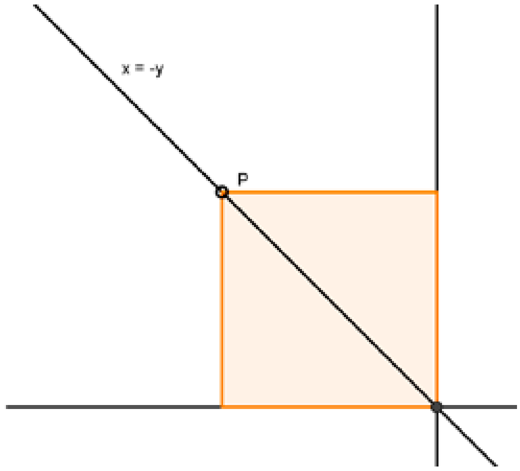
iii) La figura muestra cómo se construye el punto *Q* al reflejar *P* respecto de la recta *x* = *y*.



En lo que sigue, tendremos en cuenta la siguiente propiedad.

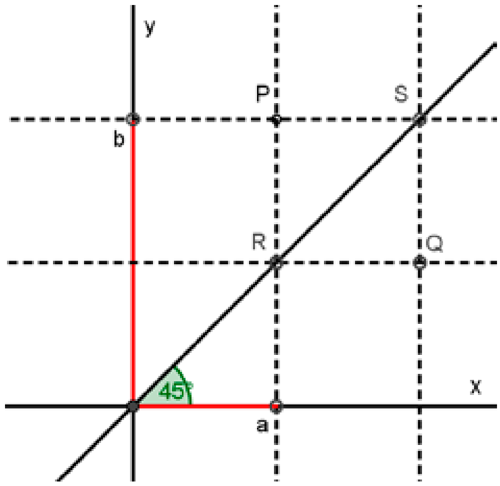
Sea *R* un punto distinto de (0, 0) de la recta *x* = *y* (o *x* = –*y*). Los ejes coordenados y las rectas que pasan por *R*, perpendiculares a los ejes, delimitan un cuadrado, dado que las coordenadas de *R* son iguales.



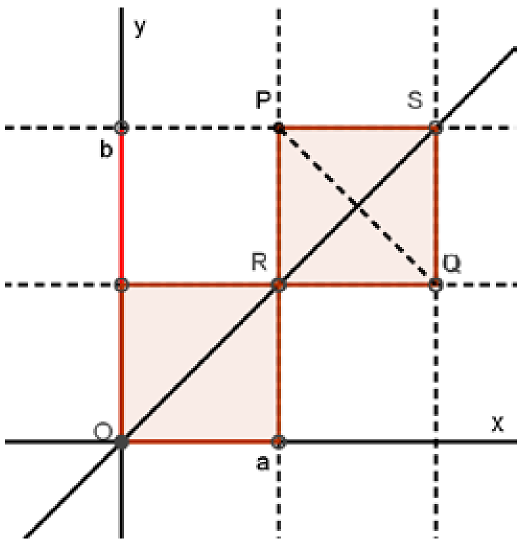


Para hallar el punto simétrico de $P = (a, b)$ respecto de la recta $x = y$, podemos realizar la siguiente construcción.

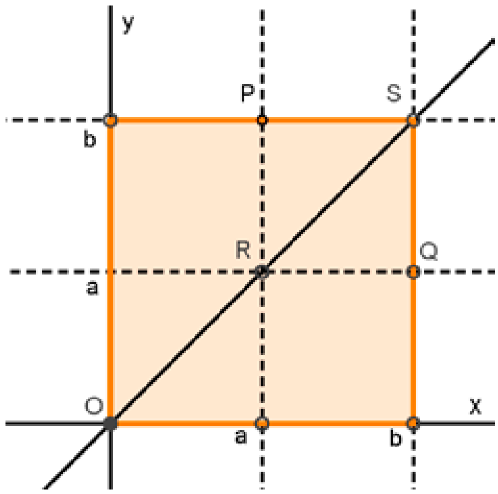
Por el punto P trazamos rectas paralelas a los ejes coordenados que cortan a la recta $x = y$ en los puntos S y R; por estos puntos, trazamos paralelas a los ejes que se cortan en el punto Q, tal como muestra la figura.



De los cuadrados sombreados en la figura, surge que Q es el punto simétrico de P (dado que las diagonales de un cuadrado son perpendiculares y se cortan en sus puntos medios) y que la segunda coordenada de Q es a.



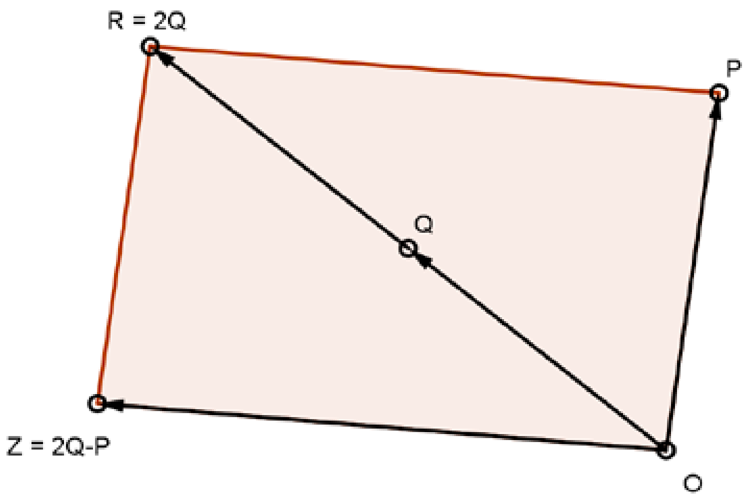
Del cuadrado sombreado, a continuación, se tiene que la primera coordenada de Q es b.



Se concluye que $Q = (b, a)$.

El punto simétrico de P respecto de la recta $x = -y$ se obtiene por un procedimiento análogo al anterior y sus coordenadas son $(-b, -a)$.

iv) Para obtener el punto simétrico de $P = (a, b)$ respecto del centro $Q = (c, d)$, podemos hacer la siguiente construcción. Sea O el origen de coordenadas. Consideremos el paralelogramo que tiene por vértices a O, P y $R = 2Q$ y por una diagonal al segmento OR.



El simétrico de P respecto de Q es el cuarto vértice Z del paralelogramo mencionado (ver Problema 4), es decir, $Z = R - O + P = R - P$, o bien $Z = 2Q - P$. Dado que las coordenadas de $2Q$ son $(2c, 2d)$, las coordenadas del punto simétrico son $(2c - a, 2d - b)$.

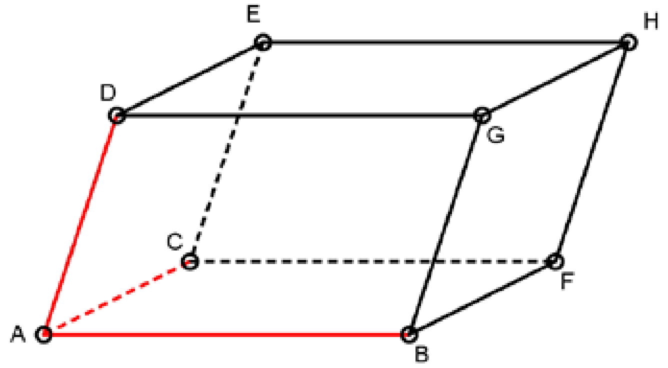
En conclusión, la expresión del punto simétrico de P respecto de Q está dada por:

$$2Q - P$$

Problema 22 Tres aristas de un paralelepípedo están dadas por los segmentos AB, AC y AD, donde $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (0, 1, 1)$ y $D = (1, 2, 2)$. Hallar todos los vértices del paralelepípedo.

Solución

Dado que las aristas dadas concurren en el vértice A de la figura siguiente,



podemos obtener los vértices restantes usando la expresión para el cuarto vértice de un paralelogramo, esto es:

$$E = D + C - A,\ F = B + C - A,\ G = B + D - A$$

y

$$H = E + G - D = (D + C - A) + (B + D - A) - D = B + C + D - 2A.$$

Se tiene:

$$E = (1, 2, 2) + (0, 1, 1) - (1, 1, 1) = (0, 2, 2),\ F = (1, 2, 1) + (0, 1, 1) - (1, 1, 1) = (0, 2, 1),$$

$$G = (1, 2, 1) + (1, 2, 2) - (1, 1, 1) = (1, 3, 2) \text{ y } H = (1, 2, 1) + (0, 1, 1) + (1, 2, 2) - 2(1, 1, 1) = (0, 3, 2).$$

Problema 23 Calcular el volumen del paralelepípedo del Problema 22.

Solución

Si trasladamos el paralelepípedo para que el vértice (1, 1, 1) quede en el origen de coordenadas (0, 0, 0), las aristas generadoras del paralelepípedo serán los vectores dados por:

(1, 2, 1) – (1, 1, 1) = (0, 1, 0), (0, 1, 1) – (1, 1, 1) = (–1, 0, 0) y (1, 2, 2) – (1, 1, 1) = (0, 1, 1).

El volumen está dado por el valor absoluto del determinante de la matriz:

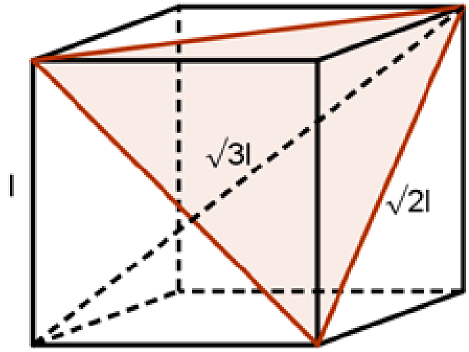
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

que es igual a 1.

Problema 24 ¿Cuánto mide una diagonal interior de un cubo que tiene entre sus vértices a los puntos (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1)?

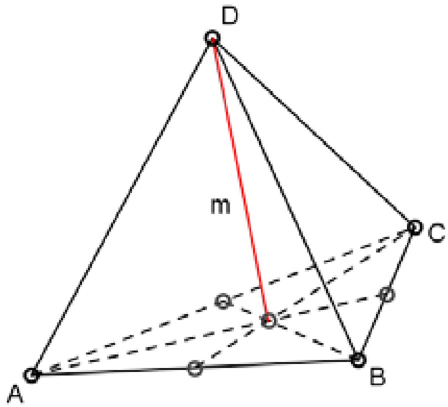
Solución

La distancia entre dos vértices de un cubo de lado l es l si ambos determinan una arista, es $\sqrt{2}l$ si determinan una diagonal de una cara del cubo y es $\sqrt{3}l$ si determinan una diagonal interior del cubo. La distancia entre dos cualesquiera de los puntos dados es $\sqrt{2}$; en consecuencia, los tres vértices determinan un triángulo equilátero. Esto sucede solo si los lados del triángulo son diagonales de caras del cubo, de modo que es $\sqrt{2} = \sqrt{2}l$; luego, la arista del cubo mide l y cada diagonal interior mide $\sqrt{3}$.

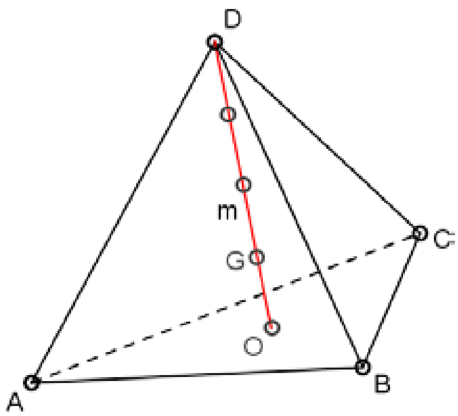


Problema 25 Expresar vectorialmente el baricentro G del tetraedro $ABCD$ en términos de sus vértices.

Aclaración: Las medianas de un tetraedro son los cuatro segmentos que unen un vértice con el baricentro de la cara opuesta.



La figura ilustra la mediana m que une el vértice D con el baricentro de la cara ABC. Es conocido que las medianas de un tetraedro se cortan en un punto llamado el baricentro del tetraedro. El baricentro divide a las medianas en la relación 3:1.



La figura muestra la posición del baricentro G en la mediana m del tetraedro $ABCD$.

Solución

El baricentro G se encuentra en el segmento que une D con el baricentro O de la cara ABC, de modo que la relación $DG{:}GO$ es 3:1. Teniendo en cuenta el Problema 16, se tiene:

$$G = \frac{1}{4}D + \frac{3}{4}O$$

Del mismo modo, dado que O divide a las medianas en la relación 2:1, resulta:

$$O = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{A+B+C}{3}$$

Finalmente, el baricentro G tiene la expresión vectorial dada por:

$$G = \frac{A+B+C+D}{4}$$

es decir, es el promedio de los vértices.

Problema 26

Decidir si los cuatro puntos de coordenadas (1, 1, 1), (1, 0, 1), (–1, 2, 3) y (0, –2, 4) son coplanares.

Solución

Para que no sean coplanares, deben generar un paralelepípedo cuyo volumen es distinto de cero. Este volumen está dado por el valor absoluto de la matriz cuyas filas coinciden con las diferencias (1, 0, 1) – (1, 1, 1) = (0, –1, 0), (–1 ,2, 3) – (1, 1, 1) = (–2, 1, 2) y (0, –2, 4) – (1, 1, 1) = (–1, –3, 3):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Como el volumen es 4, los puntos no son coplanares.

Problema 27

Hallar la ecuación del plano π que pasa por los puntos no alineados (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1).

Solución

Un punto (x, y, z) estará en el plano π solo en el caso de que (x, y, z), (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1) sean coplanares, es decir que el determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

sea cero. Luego, la ecuación de π está dada por $-x - y - z + 2 = 0$ o equivalentemente $x + y + z = 2$.

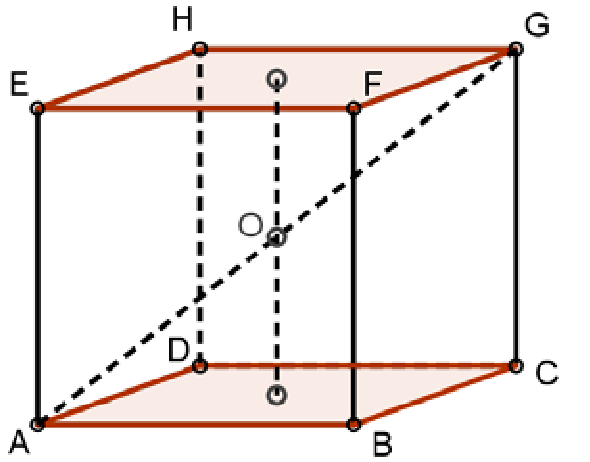
Problema 28

Dado el cubo $ABCDEFGH$, hallar expresiones vectoriales para:

1. el centro del cubo,
2. los centros de sus caras,
3. los centros de sus aristas.

Solución

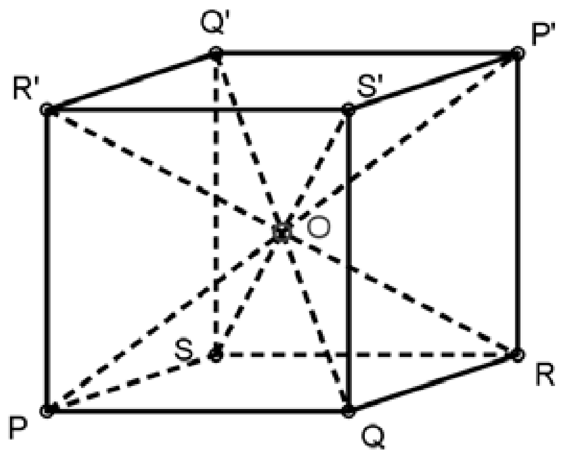
1. El centro O del cubo puede obtenerse de muchas maneras, por ejemplo: como el punto medio de una diagonal interior, como el punto medio del segmento que une el centro de una cara con el centro de la cara opuesta, etcétera.



Pero también es el promedio de sus ocho vértices:

$$(A + B + C + D + E + F + G + H) \ / \ 8$$

Para establecer esto, asociamos cada vértice con su opuesto formando pares indicados con P,P', Q,Q', R,R' y S,S'. Las sumas $A + B + C + D + E + F + G + H$ y $P + P' + Q + Q' + R + R' + S + S'$ coinciden.



Por otra parte, el centro O del cubo es:

$$\frac{P+P'}{2} = \frac{Q+Q'}{2} = \frac{R+R'}{2} = \frac{S+S'}{2}$$

o bien:

$$2O = P + P' = Q + Q' = R + R' = S + S'$$

De modo que $A + B + C + D + E + F + G + H = 8O$.

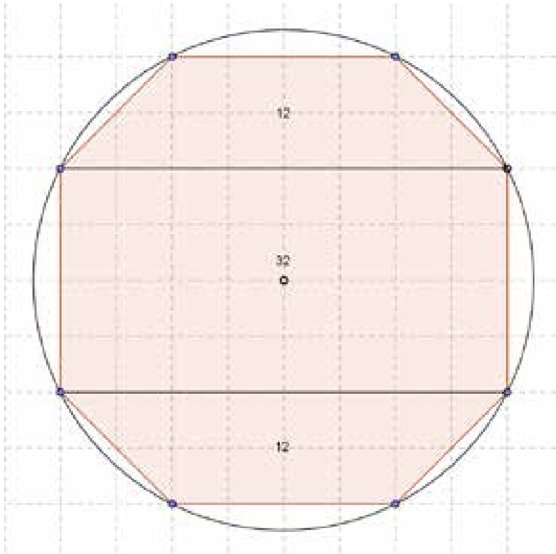
2. Los centros de las caras son el promedio de los vértices de la cara, o los puntos medios de las diagonales de las caras. En este caso es necesario conocer qué vértices del cubo son los vértices de una de sus caras y promediarlos. Por ejemplo, si *ABCD* es una cara, su centro es $(A + B + C + D) / 4$.

3. Para los centros de las aristas es necesario saber qué vértices del cubo la determinan, por ejemplo, si *AE* es una arista, su centro es $(A + E) / 2$.

Problema 29 En el plano cartesiano, hallar el área del polígono cuyos vértices son los vectores de longitud $\sqrt{20}$ y de coordenadas enteras.

Solución

La longitud de un vector de coordenadas (m, n) es $\sqrt{m^2+n^2}$; para que esta longitud sea $\sqrt{20}$, debe ser $m^2 + n^2 = 20$, lo que ocurre solo si $m^2 = 16$ y $n^2 = 4$ o $m^2 = 4$ y $n^2 = 16$. Las soluciones son los ocho vértices del polígono: $(\pm 4, \pm 2)$ y $(\pm 2, \pm 4)$. Estos son todos los puntos de coordenadas enteras en la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{20}$.



El área es 56, lo que puede verse si se descompone el polígono en un rectángulo de 8 × 4, de área 32, y dos trapecios de bases 8 y 4 y de altura 2, de área 12 cada uno.

Problema 30 ¿Hay vectores en el plano de longitud $\sqrt{33}$ y coordenadas enteras? ¿Y en el espacio?

Solución

Las preguntas equivalen a decidir si las ecuaciones $x^2 + y^2 = 33$ o $x^2 + y^2 + z^2 = 33$ tienen soluciones enteras. Los cuadrados enteros menores que 33 son 0, 1, 4, 9, 16, 25. No hay solución para el plano, pero sí para el espacio, por ejemplo (1, 4, 4).

Problema 31 Si tres vértices de un paralelogramo tienen coordenadas enteras, entonces el cuarto vértice también tiene coordenadas enteras. Ver el mismo problema si se cambia coordenadas enteras por coordenadas racionales.

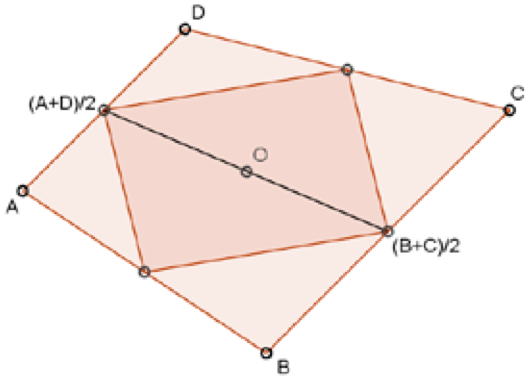
Solución

Ver expresión del cuarto vértice dada en el Problema 5.

Problema 32 Hallar las coordenadas del centro O del paralelogramo de Varignon del cuadrilátero cuyos vértices tienen coordenadas $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(0, 5)$ y $(-2, 1)$.

Solución

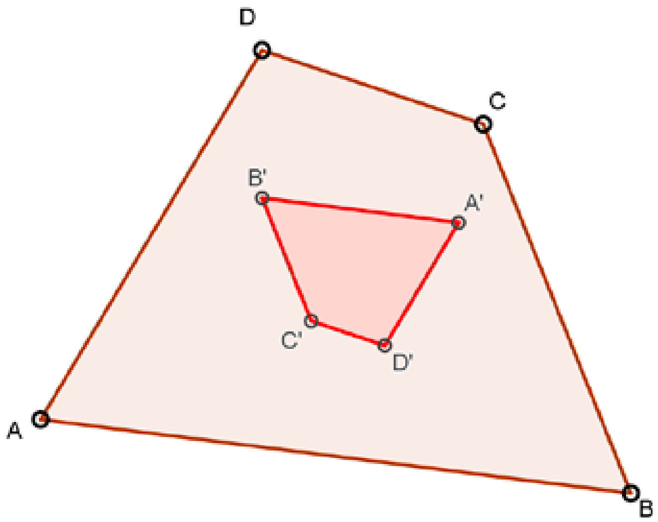
Observemos que en cualquier cuadrilátero *ABCD* el centro de su paralelogramo de Varignon es el punto medio de cualquiera de sus diagonales, por ejemplo, como muestra la figura.



Entonces $O = ((A + D) / 2 + (B + C) / 2) / 2 = (A + B + C + D) / 4$.

En el caso del problema, las coordenadas de O son $(1/2, 3)$.

Problema 33 El cuadrilátero cuyos vértices $A'B'C'D'$ son los cuatro baricentros de los triángulos *BCD, ACD, ABD, ABC*, que se forman con vértices del cuadrilátero *ABCD*, es homotético con *ABCD*. Hallar el centro y la razón de la homotecia correspondiente.



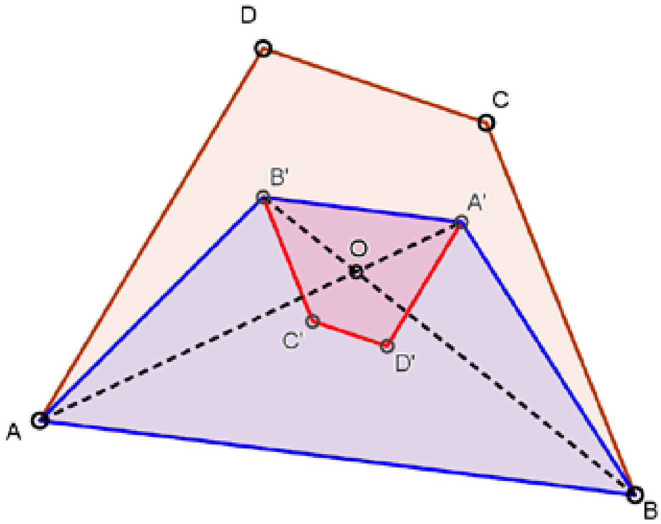
Solución

Teniendo en cuenta la expresión del baricentro dada en el Problema 19, resulta:

$$A' - B' = \frac{B+C+D}{3} - \frac{A+C+D}{3} = -\frac{1}{3}(A-B)$$

de modo que $A'B'$ es paralelo a AB.

En consecuencia, hay una homotecia que transforma AB en $A'B'$, cuyo centro O es el punto de intersección de los segmentos AA' y BB'.



Como $A'B'O$ es semejante a ABO con $AB = 3A'B'$, se tiene que $AO = 3A'O$; luego, de acuerdo con el Problema 16, obtenemos el centro O de la homotecia:

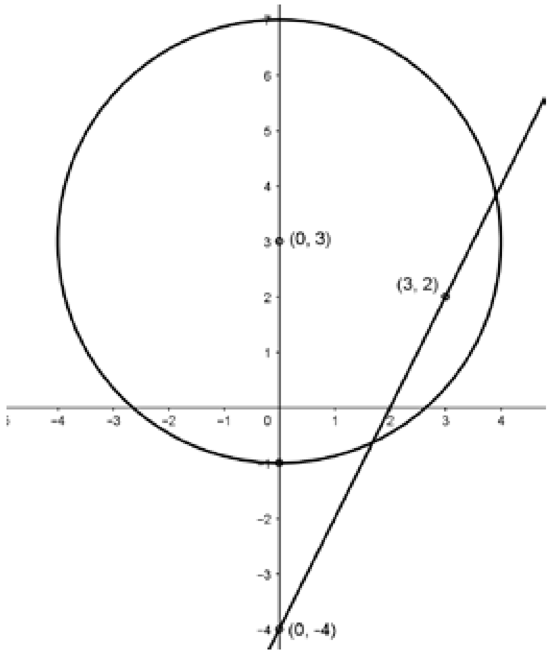
$$O = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}A' = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}\left(\frac{B+C+D}{3}\right) = \frac{A+B+C+D}{4}$$

La homotecia con centro O y razón $\frac{1}{3}$ transforma un punto X en $\frac{40-X}{3} = \frac{A+B+C+D-X}{3}$, es decir, transforma A en $A' = \frac{B+C+D}{3}$, B en $B' = \frac{A+C+D}{3}$, C en $C' = \frac{A+B+D}{3}$ y D en $D' = \frac{A+B+C}{3}$.

Problema 34 Un móvil se desplaza sobre la recta determinada por los puntos $A = (3, 2)$, $B = (0, -4)$ y otro móvil sobre la circunferencia de radio 4 con centro en $O = (0, 3)$. ¿Pueden chocar? ¿En cuántos puntos?

Solución

Solo pueden chocar en los puntos de intersección de la recta con la circunferencia. En la figura, se observa que hay dos puntos en esta intersección.



Para comprobar este hecho en forma numérica, basta comprobar que la distancia entre la recta y el centro de la circunferencia es menor que su radio.

La distancia buscada coincide con el valor de la altura h, que parte del vértice O, del triángulo con vértices (0, −4), (3, 2) y (0, 3). Dado que el área del triángulo es:

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right) = 10,5$$

y que el lado AB mide:

$$\sqrt{(3-0)^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{45} = 6,7082$$

resulta:

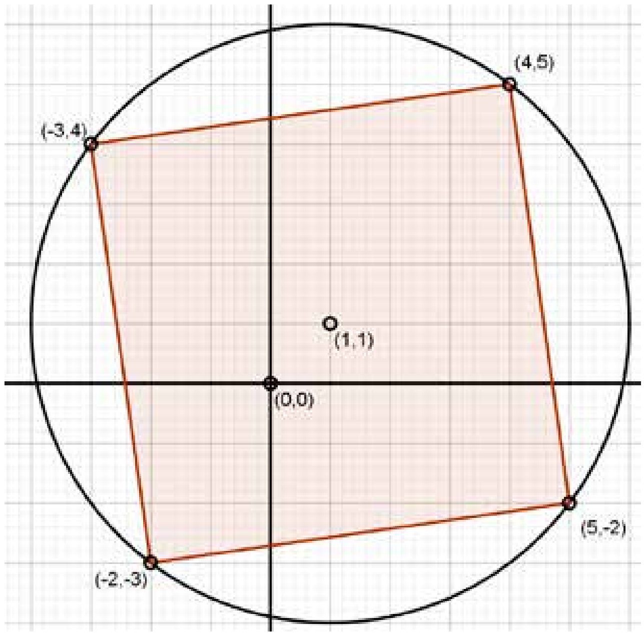
$$h = \frac{10,5}{\frac{1}{2}\times 6,7082} = \frac{21}{6,7082} = 3,1305 < 4$$

En consecuencia, hay dos puntos en la intersección.

Problema 35 Un cuadrado está inscripto en una circunferencia cuyo centro tiene coordenadas (1, 1). Si un vértice del cuadrado tiene coordenadas (4, 5), hallar las coordenadas de los vértices restantes.

Solución

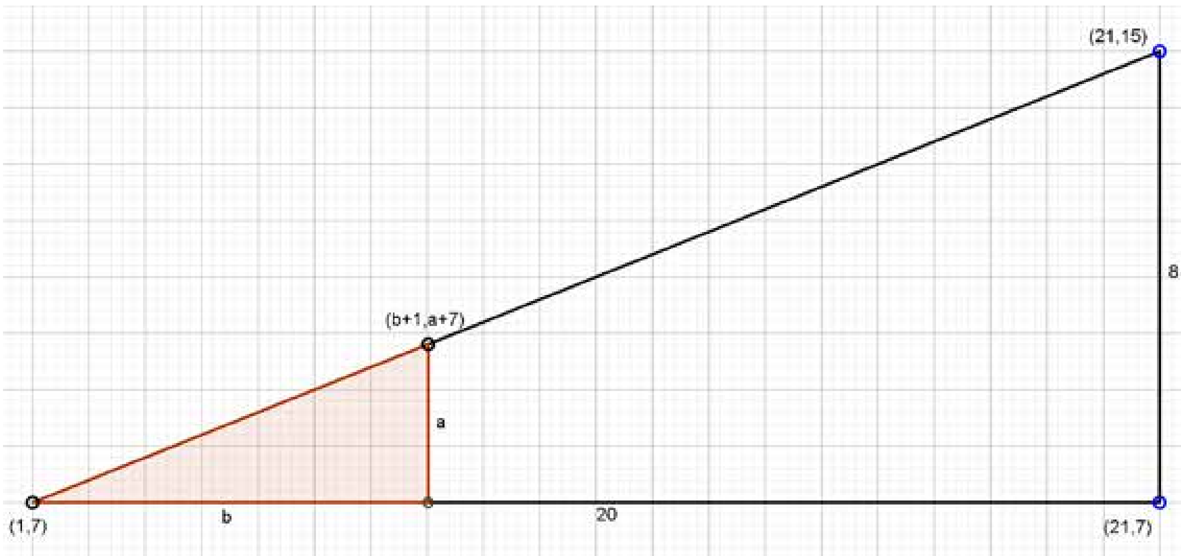
Al rotar el punto (4, 5) 90° en sentido horario alrededor del centro (1, 1), usando la expresión dada en el Problema 21 i), se obtiene otro vértice del cuadrado que es el (5, −2). Al rotar este 90° en sentido horario, alrededor del centro, se obtiene el vértice (−2, −3) y análogamente se obtiene el vértice (−3, 4).



Problema 36 ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en el segmento de extremos (1, 7),(21, 15)?

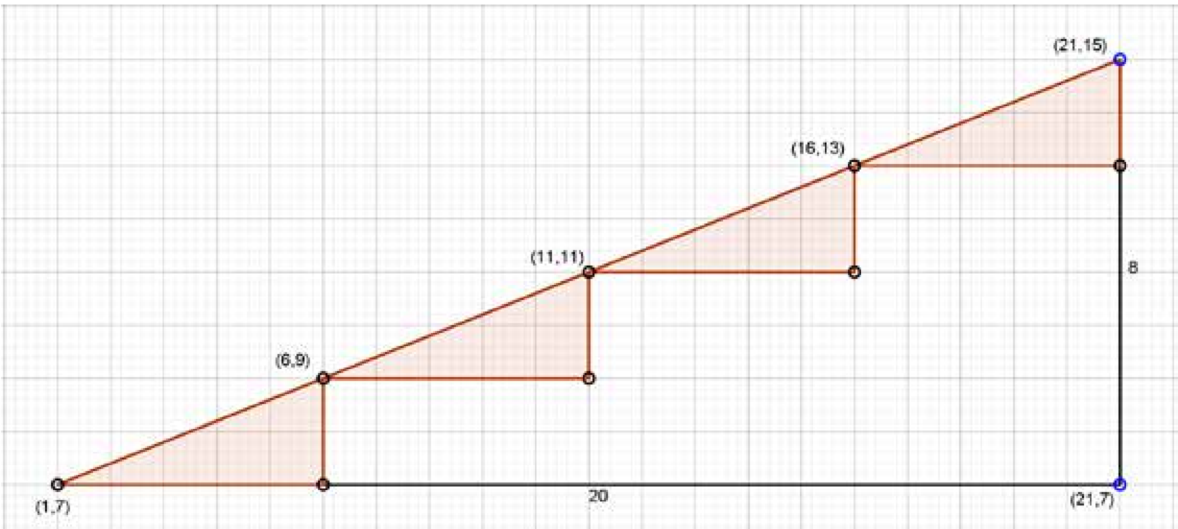
Solución

Consideramos el triángulo rectángulo *ABC*, donde *A* = (1, 7), *B* = (21, 7) y *C* = (21, 15). *ABC* se obtiene trazando una paralela al eje X por *A* y una paralela al eje Y por *C*; estas rectas concurren en el punto *B*.



Tal como se muestra en la figura, cada punto *P* del segmento *AB* determina un triángulo rectángulo de catetos *a* y *b* que es semejante a *ABC*. De allí la relación $\frac{a}{b} = \frac{8}{20}$, o bien $a = \frac{8b}{20} = \frac{2}{5}b$.
Las coordenadas de *P* son (*b* + 1, *a* + 7). Para que *P* tenga coordenadas enteras, *a* y *b* deben ser enteros. De la relación $a = \frac{2}{5}b$ se sigue que *b* es un múltiplo de 5 menor o igual que 20, de donde *b* = 0, 5, 10, 15, 20.

En consecuencia, (1, 7), (6, 9), (11, 11), (16, 13), (21, 15) son los 5 puntos de coordenadas enteras del segmento *AC*.



¿Puede calcular fácilmente el número de puntos de coordenadas enteras en el segmento (1, 7),(101, 47)?

Problema 37 Tres vértices de un cuadrado tienen coordenadas enteras, un lado tiene exactamente 5 puntos de coordenadas enteras. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en el contorno del cuadrado?

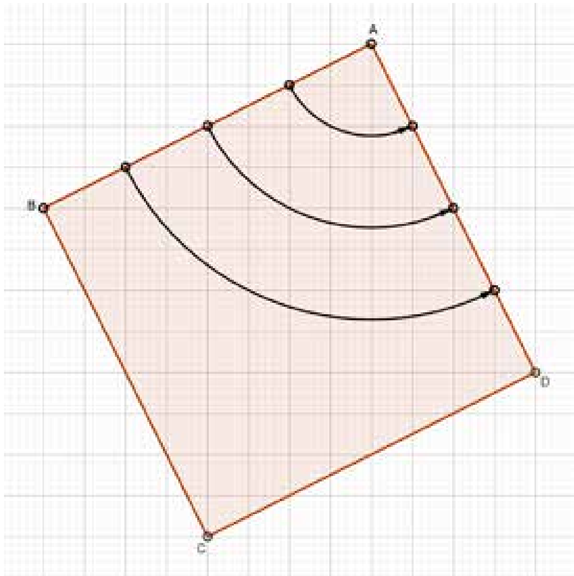
Solución

Si tres vértices del cuadrado tienen coordenadas enteras, entonces sus cuatro vértices tendrán sus coordenadas enteras (ver Problema 31).

Teniendo en cuenta el Problema 21 i), el punto que se obtiene al rotar (c, d) 90° en sentido horario alrededor de (a, b) es $(a - b + d, a + b - c)$ y en sentido antihorario $(a - d + b, b - a + c)$.

En consecuencia, si los puntos dados tienen coordenadas enteras, los puntos rotados también.

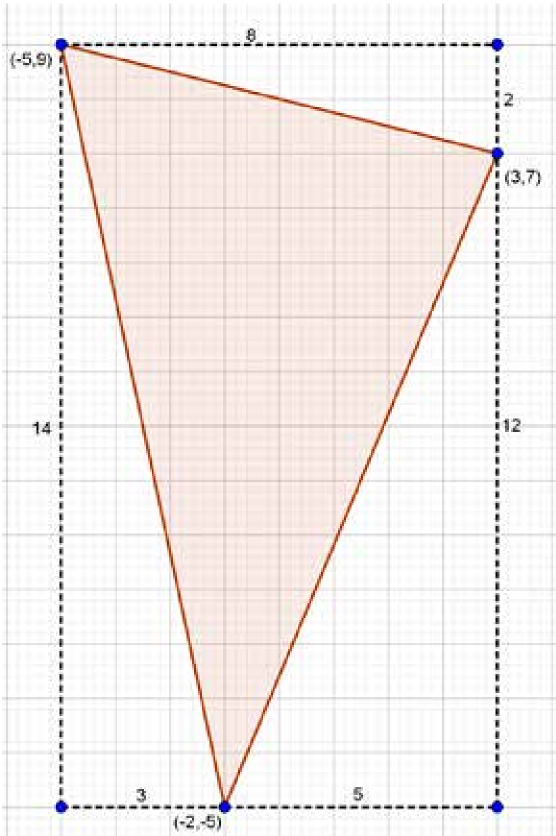
Volviendo al problema, si un lado del cuadrado tiene exactamente cinco puntos de coordenadas enteras, entonces todos los lados tienen exactamente cinco puntos de coordenadas enteras. Para ver esto, consideremos un cuadrado *ABCD* con sus vértices de coordenadas enteras y cinco puntos de coordenadas enteras en el lado *AB*. En el interior de *AB* hay tres puntos de coordenadas enteras, rotando estos puntos 90° alrededor del vértice *A*, como muestra la figura, se obtiene tres puntos de coordenadas enteras en el interior del lado *AD*.



No puede haber otros puntos de coordenadas enteras en el interior del lado *AD*; de lo contrario, podríamos obtener más puntos de coordenadas enteras en el interior del lado *AB*, rotando los puntos del lado *AD* 90° en sentido horario alrededor de *A*. Con similares argumentos se puede establecer que en cada lado *BC* y *CD* hay exactamente cinco puntos de coordenadas enteras.

Se concluye que hay 16 puntos de coordenadas enteras en el contorno del cuadrado.

Problema 38 ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en el triángulo de vértices (3, 7),(−2, −5), (−5, 9)?



Solución

Se resolverá el problema calculando el área del triángulo de dos maneras, una por determinantes y otra con la fórmula de Pick.

Por una parte, el área es:

$$\frac{1}{2}\left(\det\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} -5 & 9 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right)=53$$

Por otra parte:

$$I+\frac{C}{2}-1=53$$

donde *I* es el número de puntos de coordenadas enteras en el interior del triángulo y *C* es el número de puntos de coordenadas enteras que hay en el contorno del triángulo.

Para calcular *C* procedemos como se hizo en el Problema 36.

En el interior del lado (–5, 9),(3, 7) hay un punto, el (–1, 8). En el interior de los otros lados no hay puntos de coordenadas enteras; en consecuencia, $C = 4$. Reemplazando este valor en la fórmula de Pick, se tiene:

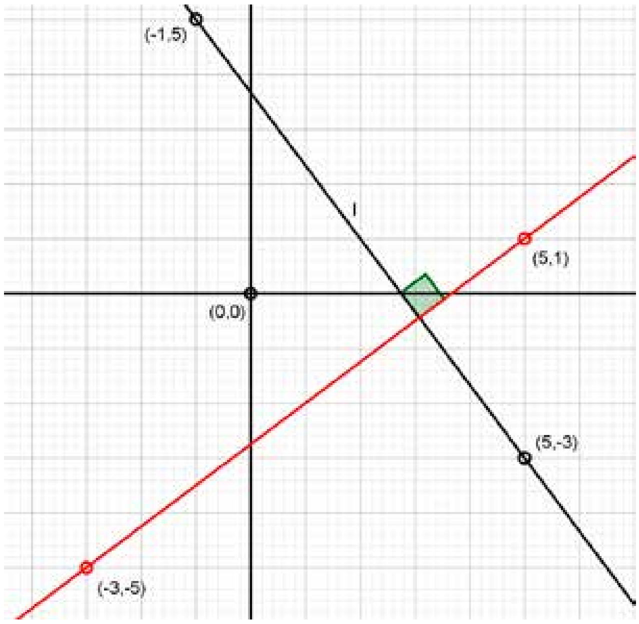
$$I = 53 - \frac{C}{2} + 1 = 53 - 2 + 1 = 52$$

Hay 56 puntos de coordenadas enteras en este triángulo.

Problema 39 La recta l pasa por los puntos (5, –3) y (–1, 5). Indicar dos puntos tales que la recta que los una sea perpendicular a l.

Solución

Los puntos (–3, –5) y (5, 1) se obtienen al rotar los puntos dados 90° en sentido horario alrededor del origen. Luego, la recta que los une es el resultado de efectuar la misma rotación a la recta l.



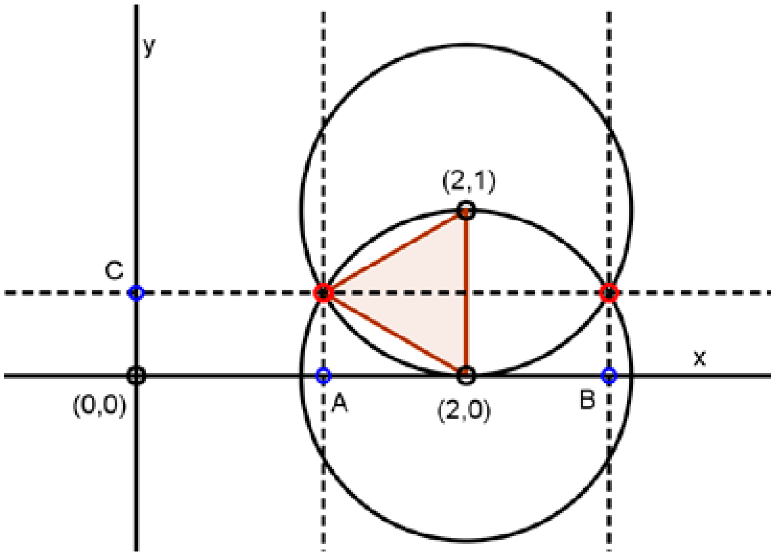
Problema 40 Dos vértices de un triángulo equilátero son (2, 0) y (2, 1); hallar las coordenadas posibles del tercer vértice.

Solución

El tercer vértice está en la intersección de las circunferencias de radio 1 y centro (2, 0) y (2, 1), respectivamente.

Los lados del triángulo miden 1. El lado de vértices (2, 0) y (2, 1) es paralelo al eje Y; dado que el tercer vértice se encuentra en la mediatriz de dicho lado, la segunda coordenada del tercer vértice es $\frac{1}{2}$.

La primera coordenada coincide con la primera coordenada de A o de B.



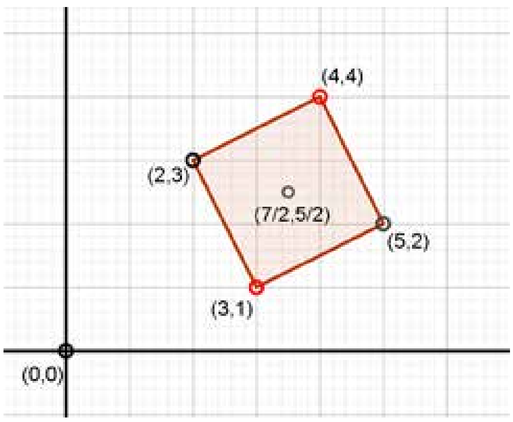
Como la altura del triángulo equilátero de lado 1 es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, dicha coordenada es $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$ o $2+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 41 (5, 2) y (2, 3) son los vértices de una diagonal de un cuadrado. Hallar las coordenadas de los vértices restantes.

Solución

El punto medio M de la diagonal considerada es $\frac{(5,2)+(2,3)}{2}=\left(\frac{7}{2},\frac{5}{2}\right)$. Rotando 90° los vértices dados alrededor de M, se obtienen los vértices restantes, esto es:

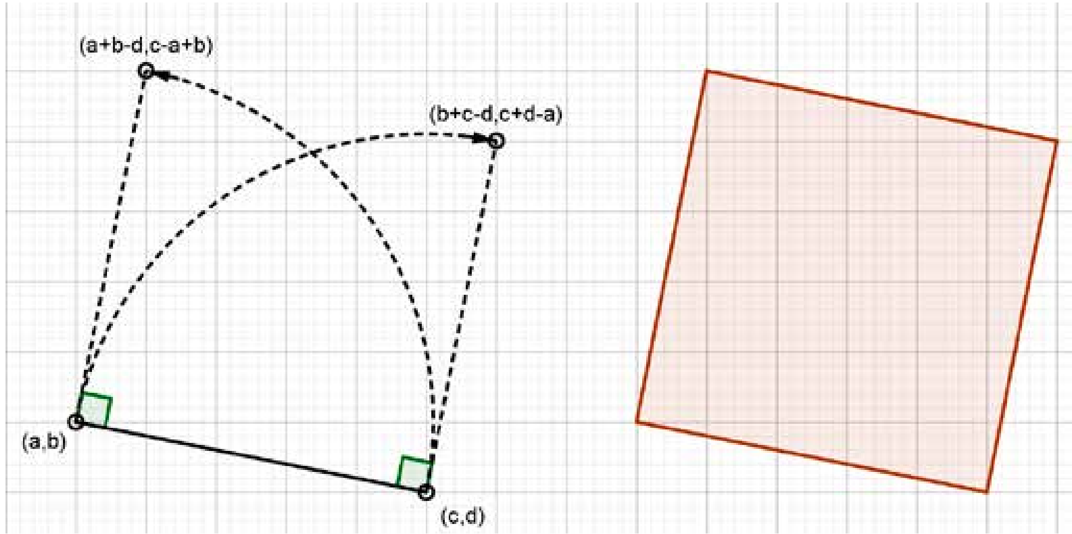
(5, 2) se transforma en $\left(2+\frac{7}{2}-\frac{5}{2},\frac{7}{2}+\frac{5}{2}-5\right)=(3,1)$ y (2, 3) en $\left(3+\frac{7}{2}-\frac{5}{2},\frac{7}{2}+\frac{5}{2}-2\right)=(4,4)$ (ver Problema 21 i).



Problema 42 Dos vértices en un lado de un cuadrado tienen coordenadas enteras; entonces, ¿todos los vértices tienen coordenadas enteras? ¿Ocurre lo mismo si los dos vértices están en una diagonal del cuadrado?

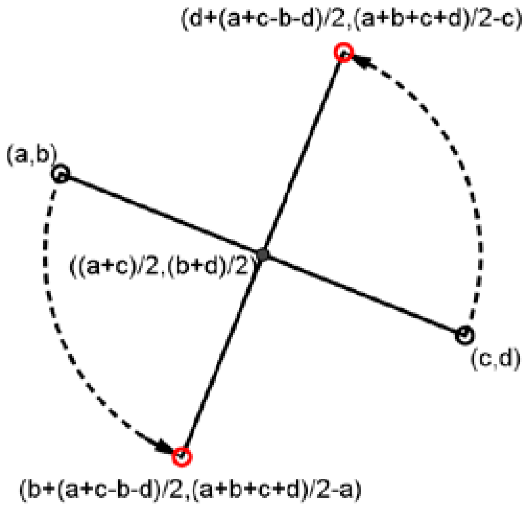
Solución

Si *(a, b)* y *(c, d)* son los vértices considerados, los vértices restantes pueden obtenerse al rotar 90° uno alrededor del otro en sentidos opuestos.



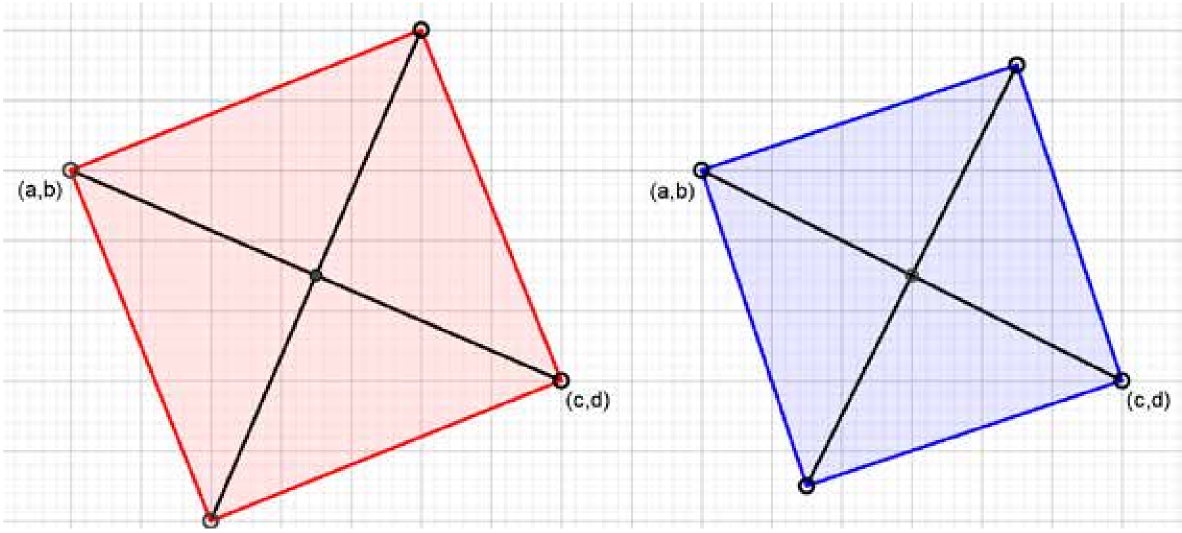
Rotando *(a, b)* alrededor de *(c, d)* en sentido horario se tiene $(b + c - d,\ c + d - a)$ y rotando *(c, d)* alrededor de *(a, b)* en sentido antihorario se tiene $(a + b - d,\ c - a + b)$ (ver Problema 21 i). En esta construcción, es claro que los cuatro vértices tienen coordenadas enteras. Hay otra posibilidad de obtener un cuadrado cambiando el sentido de las rotaciones efectuadas. En tal caso, los vértices son $(c + d - b,\ a - c + d)$ y $(d + a - b,\ a + b - c)$.

En relación con la segunda pregunta, los vértices del cuadrado no siempre tienen coordenadas enteras. En esta situación hay un único cuadrado cuyos vértices pueden obtenerse al rotar la diagonal 90° alrededor de su centro. Si *(a, b)* y *(c, d)* son los vértices de una diagonal, el centro de la misma es $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$ y los vértices obtenidos son: $\left(d+\frac{a+c-b-d}{2}, \frac{a+b+c+d}{2}-c\right)$ y $\left(b+\frac{a+c-b-d}{2}, \frac{a+b+c+d}{2}-a\right)$, o $\left(\frac{a+c-b+d}{2}, \frac{a+b-c+d}{2}\right)$ y $\left(\frac{a+c+b-d}{2}, \frac{-a+b+c+d}{2}\right)$.

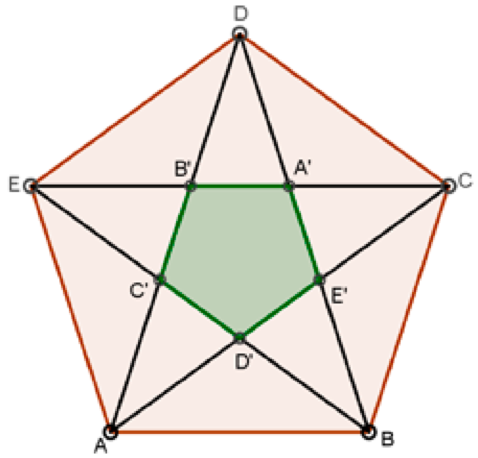


Para que las coordenadas de los vértices así obtenidos sean números enteros, es necesario que los números $a + c - b + d$, $a + b - c + d$, $a + c + b - d$ y $-a + b + c + d$ sean todos pares.

La figura ilustra un caso donde los vértices tienen coordenadas enteras y otro donde esto no sucede.



Problema 43 En la figura hay dos pentágonos regulares. Dadas las coordenadas de los vértices de uno de ellos, hallar las coordenadas de los vértices del otro.

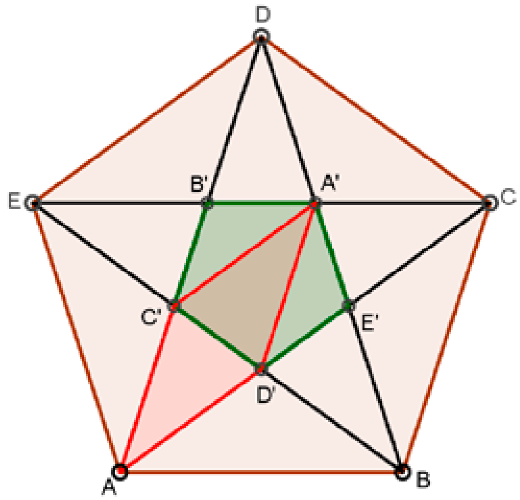


Solución

Usaremos reiteradamente que en un pentágono regular cada lado es paralelo a la diagonal con la que no comparte ningún vértice.

Dado que $ABA'E$ es un paralelogramo, resulta $A' = E + B - A$ (ver Problema 5). Esta expresión permite hallar las coordenadas de A' a partir de las coordenadas de E, B y A. Análogamente pueden obtenerse las coordenadas de B', C', D' y E'.

Por otra parte, el cuadrilátero $AD'A'C'$ de la figura es un paralelogramo, dado que $A'D'$ y AC' son paralelos a BC y que $A'C'$ y $D'A$ son paralelos a DE.

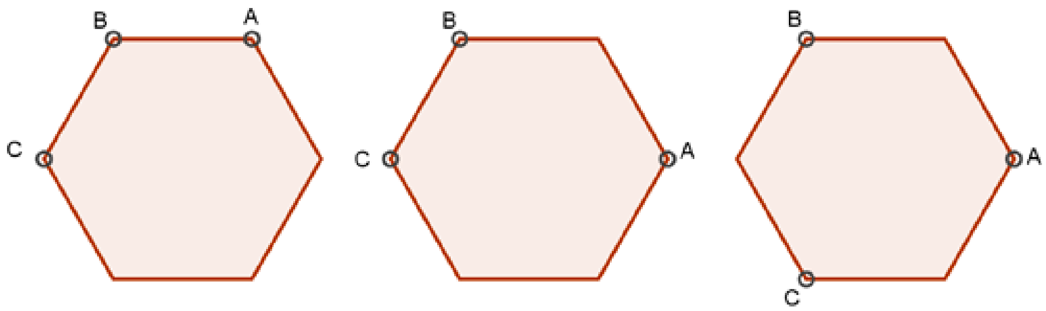


En consecuencia, $A = C' + D' - A'$. Análogamente pueden obtenerse las coordenadas de B, C, D y E.

Problema 44 Dados A, B y C, tres vértices del hexágono regular, encontrar la expresión de cada uno de los vértices restantes.

Solución

Se presentan tres situaciones que se ilustran en las figuras:

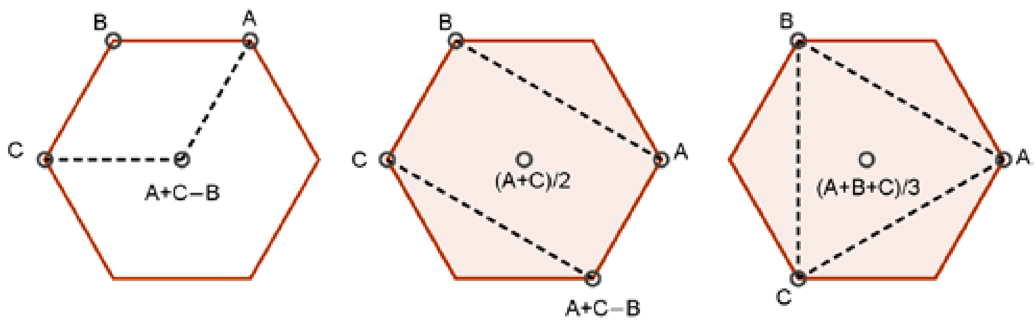


Usando la expresión vectorial para el cuarto vértice de un paralelogramo (ver Problema 5), podemos encontrar:

En el primer caso, el centro del hexágono dado por $A + C - B$.

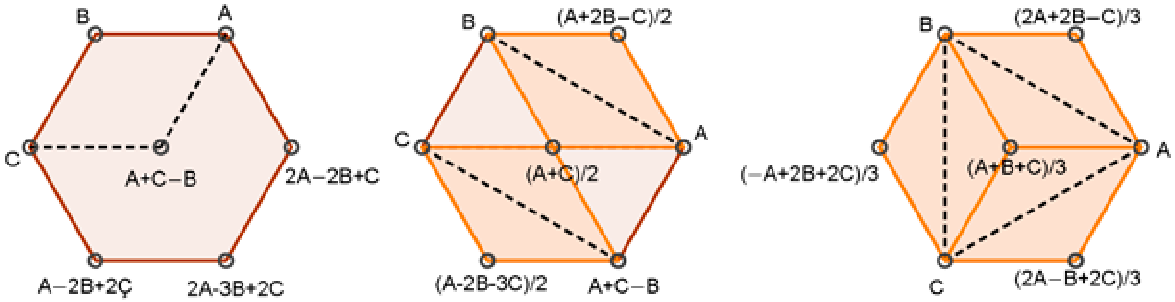
En el segundo caso, otro vértice del hexágono dado por $A + C - B$ y el centro del hexágono dado por $\dfrac{A+C}{2}$.

En el tercer caso, el centro del hexágono dado por $\dfrac{A+B+C}{3}$, que es a la vez el baricentro de ABC.



Primer caso Segundo caso Tercer caso

En el primer caso simetrizamos A, B y C respecto del centro $A + C - B$ para obtener los vértices restantes como $2(A + C - B) - A$, $2(A + C - B) - B$, $2(A + C - B) - C$. En el segundo y tercer caso, los vértices buscados se obtienen como cuarto vértice de un paralelogramo.

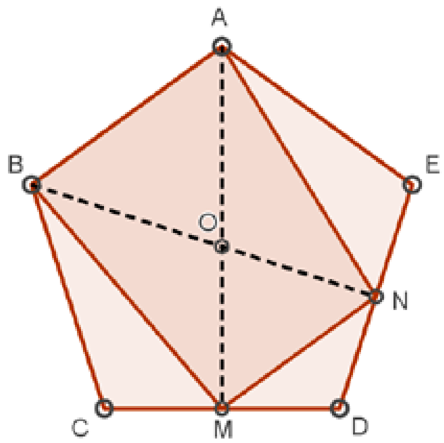


Primer caso — Segundo caso — Tercer caso

Problema 45 Hallar la expresión del centro de la circunferencia circunscripta al pentágono regular *ABCDE*.

Solución

El centro de la circunferencia circunscripta es el punto O de intersección de las mediatrices de los lados del pentágono.



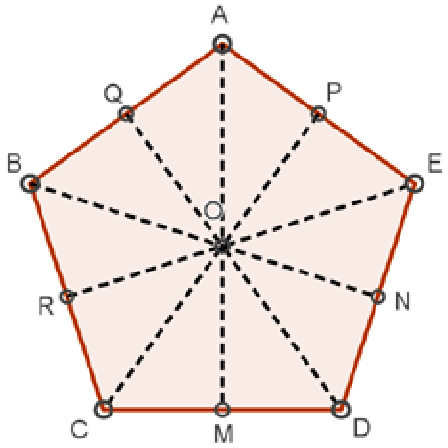
En la figura, $M = \dfrac{C+D}{2}$ es el punto medio de CD y $N = \dfrac{D+E}{2}$ es el punto medio de DE. El centro O es la intersección de las diagonales del trapecio isósceles $ABMN$ y, según el Problema 19, es:

$$O = \frac{\text{Área } BMN}{\text{Área } ABMN} A + \frac{\text{Área } ABN}{\text{Área } ABMN} M$$

Si l es la medida de los lados del pentágono y d la de las diagonales, entonces $MN = \dfrac{d}{2}$, y teniendo en cuenta que $ABMN$ es un trapecio, O puede expresarse como:

$$O = \frac{d}{d+2l} A + \frac{2l}{d+2l} M$$

Análogamente, podemos obtener cuatro expresiones más para O, usando además los puntos medios P, Q y R de los lados EA, AB y BC, respectivamente.



$$\frac{d}{d+2l}B+\frac{2l}{d+2l}N, \frac{d}{d+2l}C+\frac{2l}{d+2l}P, \frac{d}{d+2l}D+\frac{2l}{d+2l}Q, \frac{d}{d+2l}E+\frac{2l}{d+2l}R$$

Escribiendo O como el promedio de estas cinco expresiones, se tiene:

$$O=\frac{1}{5}\left(\frac{d}{d+2l}(A+B+C+D+E)+\frac{2l}{d+2l}\left(\frac{C+D}{2}+\frac{D+E}{2}+\frac{E+A}{2}+\frac{A+B}{2}+\frac{B+C}{2}\right)\right)$$

O bien:

$$O=\frac{A+B+C+D+E}{5}$$

En esta última expresión, solo intervienen los vértices del pentágono.

Problema 46 Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices tienen coordenadas (1, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 0) y (0, 1, 0).

Solución

Es un sexto del volumen del paralelepípedo generado por las diferencias:

$$(0, 0, 1) - (1, 1, 1) = (-1, -1, 0), (1, 0, 0) - (1, 1, 1) = (0, -1, -1), (0, 1, 0) - (1, 1, 1) = (-1, 0, -1)$$

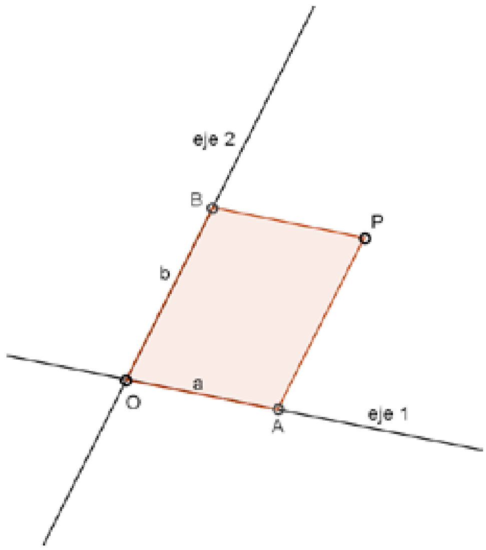
o sea:

$$\frac{1}{6}\times\left|\det\begin{pmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{3}$$

Las coordenadas

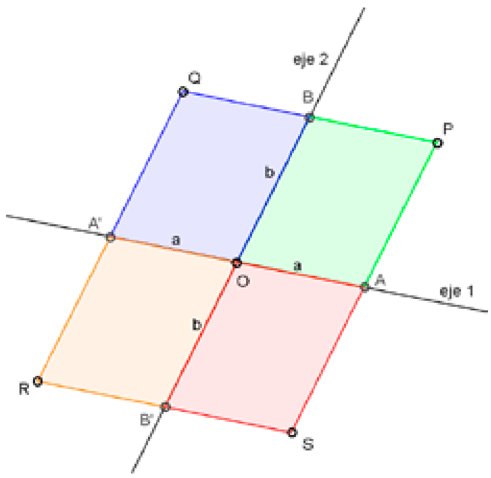
El concepto de coordenadas que vamos a introducir a continuación es atribuido al filósofo, matemático y físico francés René Descartes (1596-1650). Este concepto ha producido desde entonces una fructífera asociación entre los números y sus operaciones con la geometría.

Fijemos dos rectas en el plano, a las que llamaremos *ejes de coordenadas*, que se cortan en un punto *O*, al que llamaremos *origen de coordenadas*. Veamos una manera de identificar cada punto del plano con un par de números reales.



Dado un punto *P* en el plano, construimos el paralelogramo *OAPB* trazando por *P* paralelas a los ejes. El lado de este paralelogramo sobre el *eje 1* es de longitud *a* y el lado sobre el *eje 2* es de longitud *b*, estos dos valores se usarán para identificar a *P* mediante un par ordenado de números.

Es preciso observar que, de esta manera, cuatro puntos del plano determinarían el valor *a* sobre el *eje 1* y el valor *b* sobre el *eje 2*, tal como lo muestra la siguiente figura.



Los puntos *P, Q, R* y *S* determinan el valor *a* sobre el *eje 1* y el valor *b* sobre el *eje 2*. Es decir que a partir del par ordenado *(a, b)* no podríamos reconocer el punto con que se generó este par ordenado. Para evitar esta ambigüedad, vamos a orientar los ejes, para lo cual convenimos lo siguiente:

Sobre el eje 1 están ubicados los números reales, el cero sobre el punto O, los números positivos a la derecha de O, los números negativos a la izquierda de O. Sobre el eje 2 también están ubicados los números reales, el cero sobre el punto O, los números positivos hacia arriba de O, los números negativos debajo de O.

Con esta convención, los cuatro puntos *P, Q, R* y *S* quedan identificados con *(a, b), (–a, b), (–a, –b)* y *(a, –b)*. El par ordenado de números reales asignado de este modo a cada punto *P* del plano se llama *coordenadas* de *P* en el *sistema de coordenadas* prefijado, es decir, los dos ejes orientados, donde además se ha indicado cuál es el *eje 1* y cuál el *eje 2*.

El sistema de coordenadas usado con mayor frecuencia es el *sistema de coordenadas cartesianas*, donde los ejes son perpendiculares. Se dibuja el *eje 1* horizontal orientado de izquierda a derecha, es decir, los números negativos a la izquierda del cero y los positivos a la derecha. El *eje 2* será vertical y orientado desde abajo hacia arriba, o sea negativos debajo del cero y positivos arriba del cero.

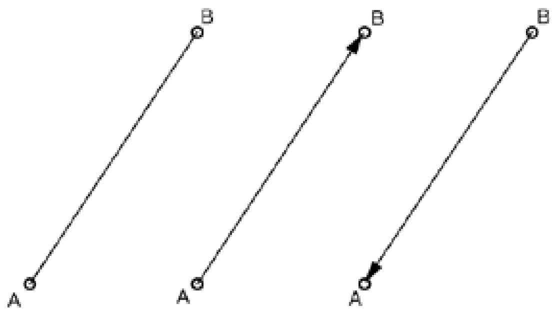
En forma similar, se pueden dar sistemas de coordenadas en el espacio. Para ello hay que dar tres ejes orientados indicando además el orden entre los ejes. En este caso, un *sistema de coordenadas cartesianas* es aquel que tiene los ejes perpendiculares entre sí. El más utilizado es aquel donde el tercer eje es una recta vertical.

Vectores

Los vectores y sus operaciones son muy apropiados para representar conceptos propios de la física como fuerza, resultante, velocidad, etcétera.

Aunque hay concepciones más generales, entenderemos por *vector* un *segmento orientado* en el plano, en el espacio o, incluso, sobre una recta. Un segmento *AB* está *orientado* cuando se ha fijado un vértice como vértice inicial y el otro como vértice final, es decir, se puede pensar que se está recorriendo el segmento en un sentido dado. Hay dos maneras de orientar el segmento *AB* para considerarlo un vector, una es que el vértice inicial sea *A*, notando el vector con $\overrightarrow{AB}$, o, por el contrario, que el vértice inicial sea *B*, notando en este caso $\overrightarrow{BA}$. La flecha en la parte superior de la notación ayuda a diferenciar vector de segmento. Correspone señalar que los segmentos notados con *AB* y con *BA* son lo mismo, esto no ocurre con los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$; si uno representa un recorrido sobre el segmento *AB*, el otro representa el recorrido opuesto; o bien, si uno es el viaje de ida, el otro será el viaje de vuelta.

La figura ilustra cómo graficaremos los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BA}$ asociados al segmento *AB*.



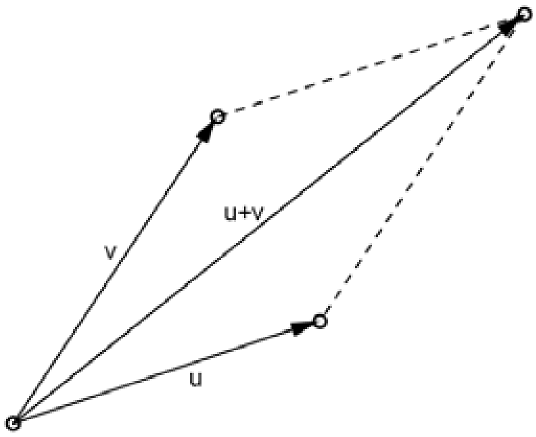
Abuso de lenguaje y notación

Si en un plano tenemos un sistema de coordenadas con origen *O*, cada punto *P* de este plano puede ser indicado por sus coordenadas *(a, b)* o pensado como un vector, el vector $\overrightarrow{OP}$. Abusando de la notación, se usa poner $P = (a, b)$ para significar que las coordenadas de P están dadas por el par (a, b); también, abusando del lenguaje, suele decirse “el vector p” o “el vector (a, b)” para referirse al vector $\overrightarrow{OP}$. Naturalmente, nos permitimos este tipo de incorrecciones con el objeto de exponer en forma más sintética, poniendo la atención sobre las ideas.

Lo mismo se aplica al espacio con un sistema de coordenadas con origen O; cada punto P puede ser indicado por sus coordenadas (a, b, c) o pensado como un vector, el vector $\overrightarrow{OP}$. Se usa $P = (a, b, c)$ para significar que las coordenadas de P están dadas por la terna ordenada (a, b, c), también se dice “el vector p” o “el vector (a, b, c)” para referirse al vector $\overrightarrow{OP}$.

Operaciones con vectores

Suma. Dos vectores con un mismo vértice inicial pueden ser sumados siguiendo una regla conocida como la *regla del paralelogramo*.



La figura precedente ilustra la suma de los vectores u y v que comparten el vértice inicial. Para hallar la suma, se construye un paralelogramo en el que dos de sus lados sean los segmentos que ocupan u y v, la suma $u + v$ es el vector sobre la diagonal del paralelogramo que tiene el mismo vértice inicial que u y v.

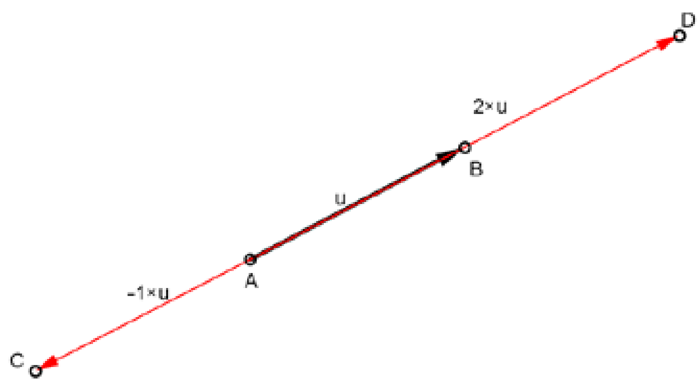
En el caso de contar con un sistema de coordenadas, es posible mostrar que:

$$\text{Si } u = (a, b) \text{ y } v = (c, d) \text{ entonces } u + v = (a + c, b + d)$$

O bien:

$$\text{Si } u = (a, b, c) \text{ y } v = (d, e, f) \text{ entonces } u + v = (a + d, b + e, c + f)$$

Multiplicación de un vector por un número. La multiplicación de un vector $u = \overrightarrow{AB}$ por un número λ es el vector con vértice inicial A, resultante de aplicar una homotecia de razón λ y centro A al segmento AB.



La figura muestra un vector $u = \overrightarrow{AB}$, el vector $-1 \times u = \overrightarrow{AC}$ y el vector $2 \times u = \overrightarrow{AD}$.

En el caso de contar con un sistema de coordenadas, es posible mostrar que:

$$\text{Si } u = (a, b) \text{ entonces } \lambda \times u = (\lambda \times a, \lambda \times b)$$

O bien:

$$\text{Si } u = (a, b, c) \text{ entonces } \lambda \times u = (\lambda \times a, \lambda \times b, \lambda \times c)$$

Observar que el conjunto de vértices finales de los múltiplos del vector $\overrightarrow{AB}$ recorren toda la recta que une A con B.

Homotecia

Usando las operaciones con vectores, la homotecia con centro C y razón r puede ser expresada vectorialmente en la forma siguiente; el punto P se transforma en:

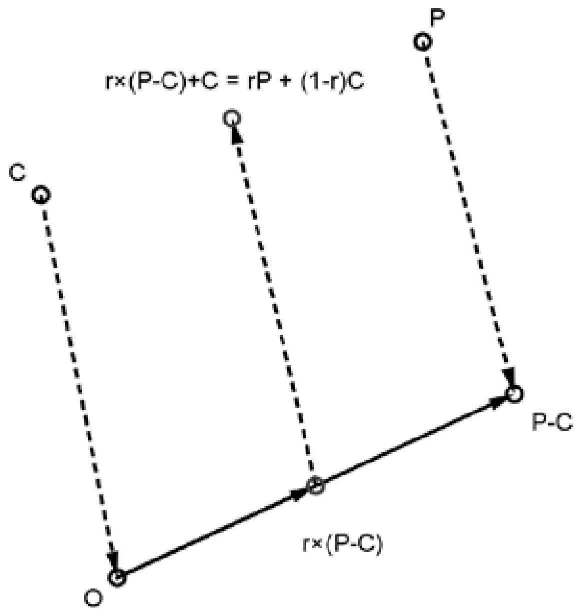
$$rP + (1 - r)C$$

Esta expresión puede justificarse considerando los tres movimientos que se indican a continuación:

i) Trasladar el par de puntos C,P de modo que C quede en el origen O de coordenadas.

ii) Multiplicar $P - C$ por r.

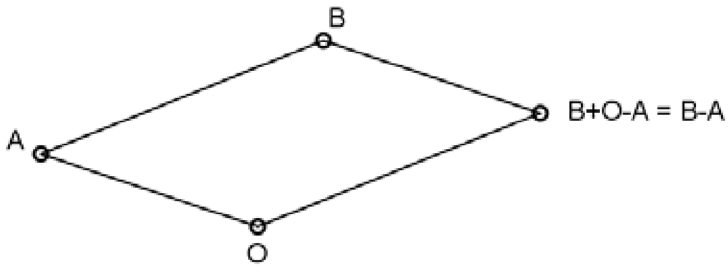
iii) Trasladar $r(P - C)$ sumándole C.



La figura ilustra el caso para $r = \frac{1}{2}$.

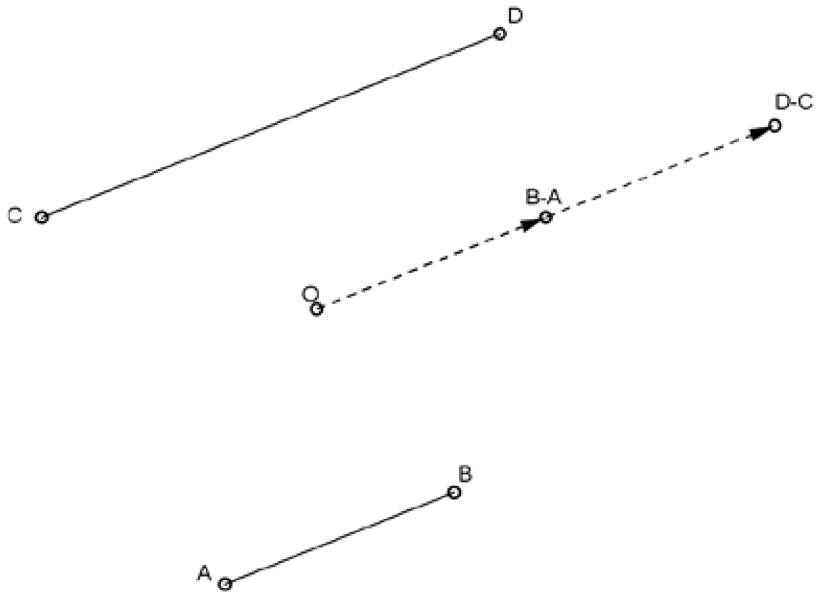
Paralelismo

En un plano con un sistema de coordenadas cartesianas de origen O, un segmento AB es paralelo al segmento de vértices O y $B - A$. Esto surge de la expresión para el cuarto vértice de un paralelogramo dada en el Problema 5 de esta nota.



Ahora podemos establecer la siguiente regla:

El segmento AB es paralelo al segmento CD si los vectores de origen O y extremos B – A y D – C, respectivamente, son uno múltiplo del otro.



Por ejemplo, los segmentos de extremos (5, 15),(10, 25) y (5, 5),(15, 25), ¿son paralelos?

Dado que (10, 25) – (5, 15) = (5, 10) y (15, 25) – (5, 5) = (10, 20), los segmentos son paralelos puesto que (10, 20) = 2 × (5, 10).

Esta regla es también válida en el espacio con un sistema de coordenadas cartesianas.

Por ejemplo, la recta que pasa por los puntos de coordenadas (10, 15, 30),(36, 75, 90) y la recta que pasa por (30, 35, 50),(43, 65, 80) son paralelas, ya que:

$$(36, 75, 90) - (10, 15, 30) = (26, 60, 60)$$
$$(43, 65, 80) - (30, 35, 50) = (13, 30, 30)$$
$$(26, 60, 60) = 2 \times (13, 30, 30)$$

Matrices y determinantes

Podríamos decir que una matriz es un casillero rectangular donde cada casilla alberga algún objeto. Por ejemplo, en el juego de la batalla naval, en cada casilla hay una parte de barco o agua, esto puede verse como una matriz cuadrada de 10 × 10.

Para nuestros propósitos, solo usaremos matrices numéricas de 2 × 2 o de 3 × 3, es decir, casilleros como los de la figura, donde cada casilla contiene un número real.

4	1
0	-2

1,4	-2	11
2	0	1
-0,3	-4	1

Las matrices no se presentarán en la forma precedente, sino con el formato del editor de ecuaciones que incluye el procesador de texto que utilizamos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz de 2 × 2:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es el número obtenido al resolver la expresión $ad - bc$.

El determinante de la matriz de 3 × 3:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

es el número obtenido al resolver la expresión $aei + bfg + cdh - bdi - ceg - afh$.

Área y volumen

Presentamos la propiedad que se estableció en el Problema 10 de la presente nota.

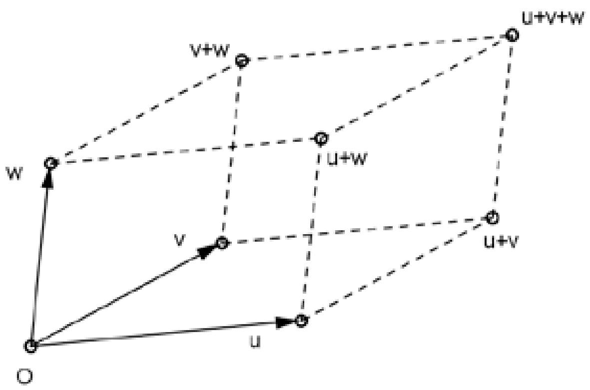
Si un paralelogramo, en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas, tiene por vértices: (0, 0), (a, b), (c, d), (a + c, b + d), entonces el área del paralelogramo es el valor absoluto del determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

es decir $|ad - bc|$.

Dados tres vectores u, v y w en el espacio, con un vértice inicial común O, se puede construir un paralelepípedo que tiene por vértices a O y los vértices finales de los vectores: u, v, w, $u + v$, $u + w$, $v + w$, $u + v + w$. Corresponde aclarar que si O, u, v y w son coplanares se obtendrá un paralelepípedo degenerado, es decir, aplanado.

La siguiente figura muestra la construcción donde las sumas se han realizado siguiendo la regla del paralelogramo.



El paralelepípedo así construido se llama *paralelepípedo generado por u, v, w.*

Una situación análoga al área del paralelogramo en el plano se da en el espacio. Enunciamos la misma sin demostración.

En el espacio con un sistema de coordenadas cartesianas, el volumen del paralelepípedo generado por (a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) es igual al valor absoluto del determinante de la matriz:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ejemplo: ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo generado por los vectores (1, 1, 0), (1, 0, 1) y (0, 1, 1)?

Solución: Es el valor absoluto del determinante:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

es decir, el volumen es 2.

Por otra parte, es posible usar el determinante para obtener el volumen del tetraedro *O, u, v, w.* Para esto basta observar que el volumen de un paralelepípedo es el área de la base por altura y la de un tetraedro es un tercio del área de la base por la altura. En nuestro caso, el área de la base *Ouv* del tetraedro es un medio del área de la base *Ou, u + v, v* del paralelepípedo y ambos tienen la misma altura respecto de dichas bases. En definitiva, el área de *O, u, v, w* está dada por:

$$\frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}$$

Ecuación de la recta

Sea *l* la recta que pasa por los puntos *(a, b)* y *(c, d)* del plano cartesiano. La condición para que un punto *(x, y)* pertenezca a *l* equivale a que el triángulo de vértices *(a, b), (c, d)* y *(x, y)* sea un triángulo degenerado en un segmento, de manera que su área debe ser igual a cero. Esto es que:

$$\det\begin{pmatrix} x-c & y-d \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = 0$$

O bien:

$$(b - d)x + (c - a)y = bc - ad$$

Ecuación del plano

En forma análoga a la ecuación de la recta tenemos la ecuación para el plano que pasa por tres puntos. Sea π el plano que pasa por tres puntos no alineados (a, b, c), (d, e, f) y (g, h, i). La condición para que un punto (x, y, z) pertenezca a π equivale a que el paralelepípedo generado por los vectores:

$$(x, y, z) - (a, b, c),\ (d, e, f) - (a, b, c) \text{ y } (g, h, i) - (a, b, c)$$

sea un paralelepípedo degenerado, es decir:

$$\det\begin{pmatrix} x-a & y-b & z-c \\ d-a & e-b & f-c \\ g-a & h-b & i-c \end{pmatrix} = 0$$

O bien:

$$(ie - ib - ce + bf + ch - fh)x + (ia - id - af + cd - cg + fg)y + (ae - ge - bd - ah + bg + dh)z =$$
$$= -ibd + iae - cge - afh + bfg + cdh$$

Estas ecuaciones, sea para la recta o el plano, se conocen como *ecuaciones implícitas*.

Fórmula de Pick

Si tomamos, en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas, todos los puntos que tengan sus coordenadas enteras, obtenemos un conjunto usualmente conocido como *la cuadrícula*. Un sector de la cuadrícula se ilustra en la siguiente figura.

Diremos que un segmento, polígono o poligonal está en la cuadrícula si sus vértices son puntos de la cuadrícula.

Los puntos de la cuadrícula también suelen llamarse *nodos*.

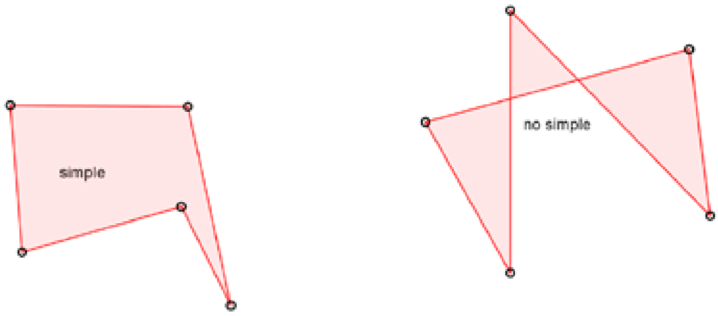
El matemático austríaco Georg Alexander Pick (1859-1942) demostró la siguiente expresión para el área de un polígono en la cuadrícula.

Sea P un polígono simple en la cuadrícula. Entonces, el área de P está dada por:

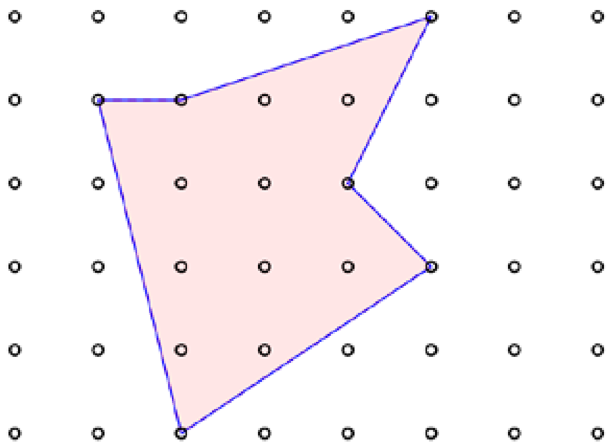
$$I+\frac{C}{2}-1$$

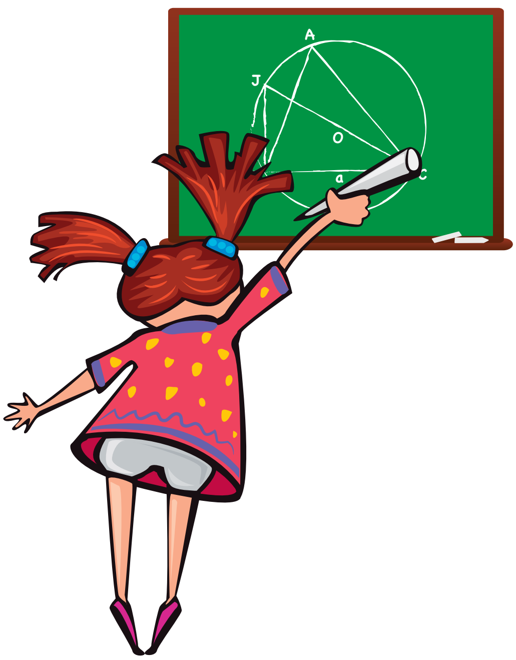
donde I es el número de nodos en el interior de P y C el número de nodos en el contorno de P.

Aclaración: Un polígono es simple cuando sus lados se cortan solo en los vértices.



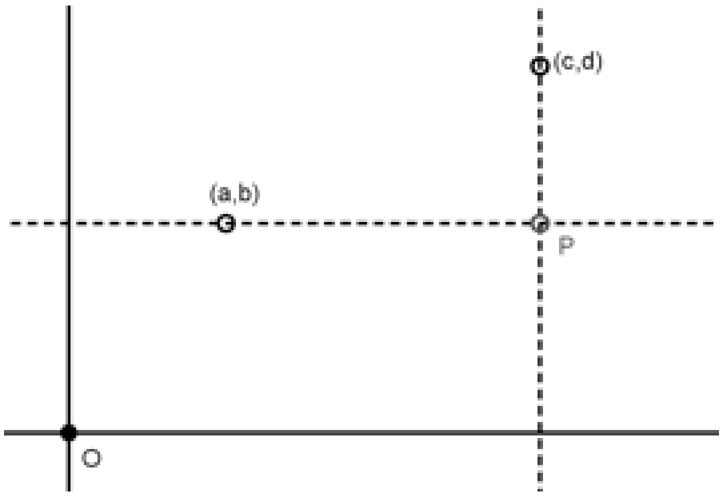
Ejemplo: El área del polígono que muestra la figura es $9+\frac{6}{2}-1=11$.





Problemas propuestos

1. En la figura, las rectas punteadas son paralelas a los ejes coordenados. Hay un punto de coordenadas *(a, b)* y un punto de coordenadas *(c, d)*.



Hallar las coordenadas del punto *P*.

2. ¿Cuántos puntos en el segmento (0, 0), (9, 5) tiene al menos una de sus coordenadas enteras?

3. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos sucesivos vértices son los puntos de coordenadas (1, 1), (3, 2), (0, 3), (-2, 1).

4. ¿Qué clase de cuadrilátero es el que tiene por vértices los puntos (100, 210), (–210, 100), (–100, –210) y (210, –100)?

5. ¿Qué clase de cuadrilátero es el que tiene por vértices los puntos (100, 210), (–21, 10), (–100, –210) y (21, –10)?

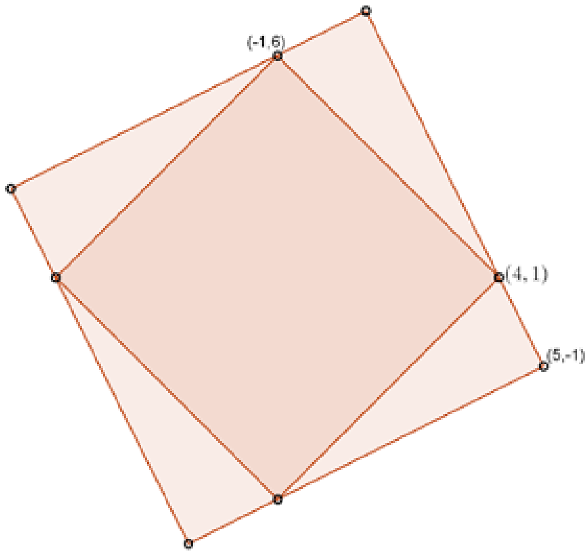
6. ¿La recta que pasa por los puntos (–9, 20) y (20, –8) corta a la circunferencia con centro en (0, 0) y radio 8?

7. La recta *l* pasa por (1, 3) y (7, 2) y la recta *m* por (15, –3) y (9, –1). ¿Son rectas paralelas?

8. Hallar el área del triángulo con vértices en (100, 75), (81, 32) y (0, 0). ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en este triángulo?

9. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son (1, −2, 0), (1, 1, 3) y (3, 4, 1).

10. En la figura hay dos cuadrados, uno de ellos está inscripto en el otro. Pueden observarse las coordenadas de tres vértices.



Hallar las coordenadas de los restantes vértices de los cuadrados.

11. De ser posible, construir un cuadrado cuyos vértices tengan coordenadas enteras y en cuyo contorno haya exactamente:

1. 12 puntos de coordenadas enteras,
2. 14 puntos de coordenadas enteras,
3. 19 puntos de coordenadas enteras.

12. Un cuadrado tiene sus vértices de coordenadas enteras y en el contorno hay exactamente 24 puntos de coordenadas enteras. ¿El centro del cuadrado tiene coordenadas enteras?

13. Hallar la ecuación del plano bisector del segmento de vértices (1, 2, 0) y (1, 1, 1).

14. Usando como vértices los puntos del espacio cuyas coordenadas toman los valores 1 o −1, construir dos tetraedros regulares.

15. Las coordenadas de cuatro vértices de un cubo son (1, 1, 1), (–1, –1, 1), (1, –1, –1) y (–1, 1, –1), hallar las coordenadas de los cuatro vértices restantes.

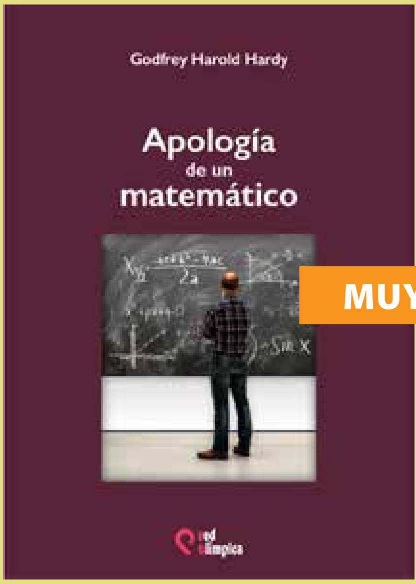
16. Hallar el volumen de la pirámide cuyos vértices tienen coordenadas:

(1, 1, 0), (0, 2, 0), (–1, 0, 0), (0, –1, 0), (1, 2, 1)

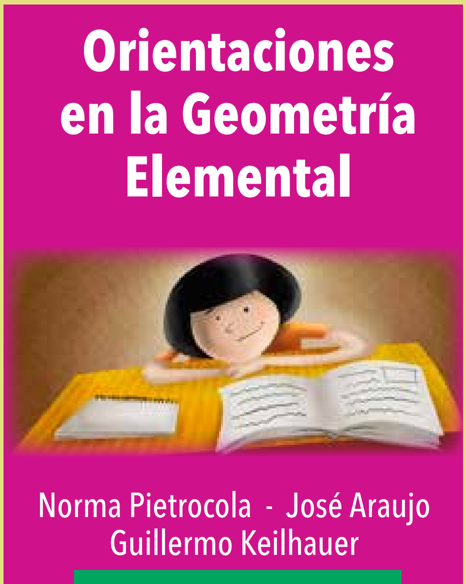
NOVEDADES DE LA RED OLÍMPICA

YA SALIÓ

Acaba de salir el último libro **Olimpíadas de Mayo XVII al XXIV**, que incluye los problemas propuestos en la competencia **entre los años 2011 y 2018**.
Como dicen sus autoras en el prólogo, este libro desafía al lector y lo invita a pensar por su cuenta.



MUY PRONTO



MUY PRONTO

Pedidos a fenchu@oma.org.ar
11 4826 8976 y (por WhatsApp) +54 9 11 5035 7537

red olímpica

En la Red Olímpica ya estamos realizando envíos de todos nuestros títulos a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery. ¡Hacé tu pedido!