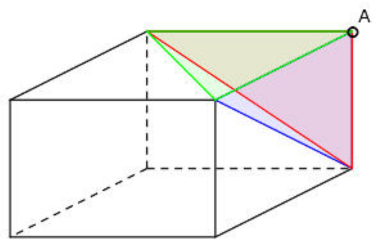
Nota4: Soluciones problemas propuestos

Problema 1. ¿Cuántos triángulos rectángulos se pueden formar que tengan sus vértices en vértices de una caja?

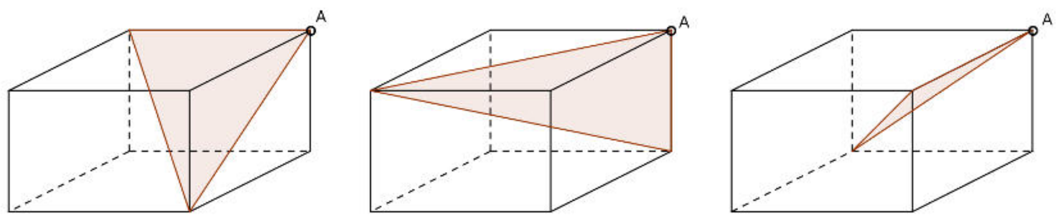
Solución: Consideremos primero todos aquellos triángulos rectángulos que tengan el ángulo recto en el vértice *A* destacado en la figura. Estos triángulos pueden ser agrupados en dos tipos:

i) Los tres triángulos cuyos catetos son aristas que concurren en el vértice *A*.



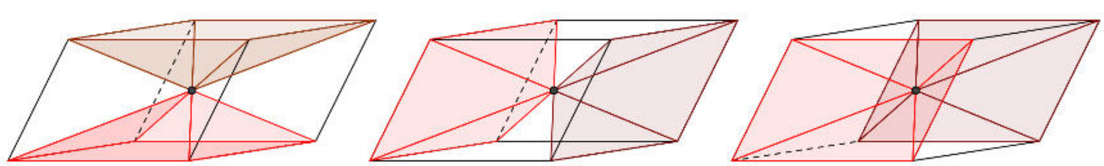
Dado que hay ocho vértices en la caja, se pueden formar *24* triángulos de este tipo.

ii) Los tres triángulos cuyos catetos están dados por una arista y una diagonal, en la cara perpendicular a dicha arista, que concurren en *A*. Este caso se ilustra en las figuras a continuación:



Dado que hay ocho vértices en la caja, se pueden formar *24* triángulos de este tipo.
En conclusión, se pueden obtener *48* triángulos rectángulos.

Problema 2. ¿Un paralelepípedo tiene centro?
Solución: Si, es el punto de intersección de las diagonales interiores. El paralelepípedo puede ser descompuesto en tres pares de pirámides donde, en cada par, una pirámide es simétrica de la otra respecto del centro. La figura ilustra la situación.



Dado que un punto cualquiera del paralelepípedo pertenece a una pirámide de las consideradas previamente, es claro que su simétrico respecto del centro, pertenece a la pirámide del mismo par.

Problema 3. Un paralelepípedo (o prisma) de *200grs*. es seccionado por un plano que pasa por su centro. ¿Cuánto pesa cada parte?

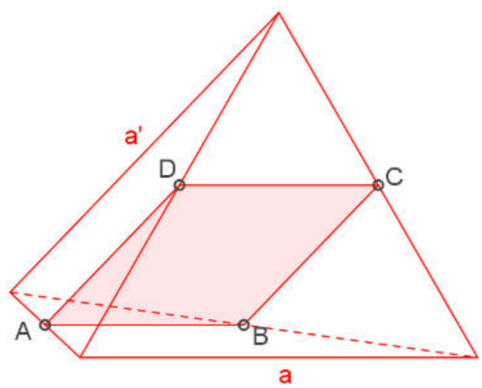
Solución: Cada parte pesa *100grs.* debido a que cualquier plano que pase por el centro, divide al paralelepípedo en dos cuerpos iguales. Como el prisma tiene centro, vale el mismo resultado.

Problema 4. Un paralelepípedo de *200grs.* es seccionado por un plano que contiene los centro de dos caras opuestas.¿Cuánto pesa cada parte?

Solución: Cada parte pesa *100grs.* ya que un plano que contenga los puntos medios de dos caras opuestas, necesariamente contiene al centro del paralelepípedo, pues éste es el punto medio de los centros de las caras opuestas.

Problema 5. ¿Qué figura es la sección de un tetraedro regular por el plano paralelo a dos aristas opuestas que pasa por el punto medio de una de las aristas no paralela al plano?

Solución: La figura sombreada está determinada por los puntos medios *A,B,C,D* de las aristas del tetraedro distintas de *a* y *a'*. Los segmentos *AB* y *CD* son paralelos a la arista *a*, por ser bases medias de las caras del tetraedro que tienen en común la arista *a*. Luego



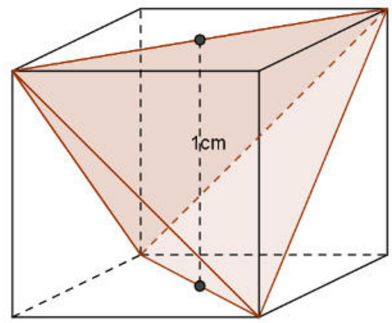
los segmentos *AB* y *CD* son paralelos, de igual longitud y determinan un plano al que pertenece el paralelogramo *ABCD*. Del mismo modo, los segmentos *AD* y *BC* son paralelos, de igual longitud y además de igual longitud que *AB*, dado que *a* y *a'* tiene la misma longitud.

Teniendo en cuenta que aristas opuestas en un tetraedro regular son perpendiculares, los ángulos de la figura *ABCD* son rectos. Se concluye que es un cuadrado.

Para finalizar, notemos que el plano que contiene al cuadrado *ABCD* es paralelo a *a* y *a'* y pasa por el punto medio de una artista distinta de *a* y *a'*, es decir, es el plano del enunciado.

Problema 6. La distancia entre los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular es *1cm*. Hallar el volumen y el área del tetraedro.

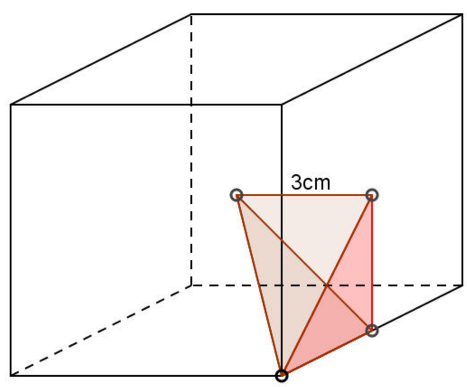
Solución: El paralelepípedo circunscripto a un tetraedro regular es un cubo. En nuestro caso, el cubo es de *1cm* de arista, con lo cual el volumen del tetraedro es $\frac{1}{3}cm^3$.



Por otra parte, las aristas del tetraedro miden $\sqrt{2}cm$, y así, el área es $4\times\frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}^2}{4}cm = 2\sqrt{3}cm^2$.

Problema 7. El centro de un cubo, el centro de una cara, el centro de una arista en la cara y un vértice de esta arista son los vértices de un tetraedro. ¿Cuál es el volumen de este tetraedro si el cubo es de arista *6cm*? ¿Cuál es el área? ¿Cuánto miden sus aristas?

Solución: Tomamos como base del tetraedro a la cara coloreada con rojo en la figura.

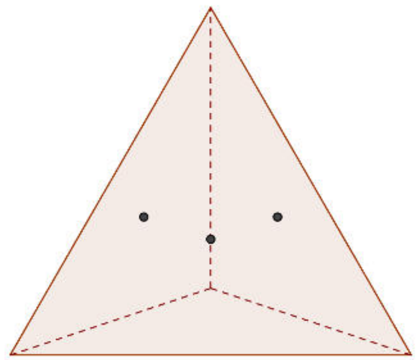


Esta cara es un triángulo rectángulo cuyos catetos miden *3cm*, luego su área es $\frac{9}{2}cm^2$ y dado que la altura correspondiente mide también *3cm*, el volumen del tetraedro es $\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}\times 3cm^3 = \frac{9}{2}cm^3$.

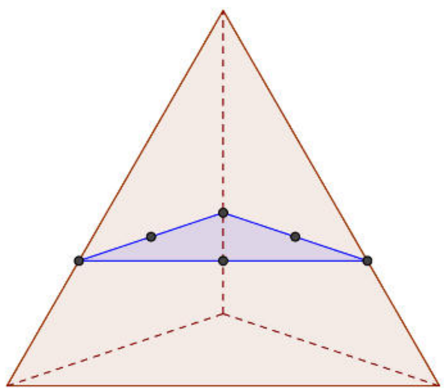
Hay tres aristas de *3cm*, dos aristas de $3\sqrt{2}cm$ y una arista de $3\sqrt{3}cm$ y como todas las caras del tetraedro son triángulos rectángulos, el área es:

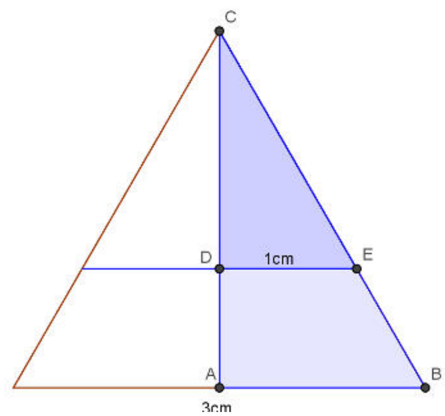
$$\frac{1}{2}\left(3\times3+3\times3+3\times3\sqrt{2}+3\times3\sqrt{2}\right)cm^2 = \left(9+9\sqrt{2}\right)cm^2$$

Problema 8. Un plano pasa por los centros de tres de las caras de un tetraedro regular de *3cm* de arista. Hallar el área y el perímetro de la sección determinada en el tetraedro por este plano.



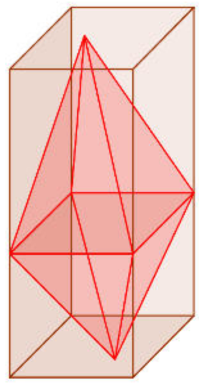
Solución: De acuerdo con la figura precedente, por cada centro trazamos una paralela a la arista que comparten la base y la cara que contiene al centro, obteniendo la primera de las siguientes figuras.





En ella observamos que la sección buscada es un triángulo equilátero. La longitud del lado de este triángulo, puede ser calculada usando la semejanza de los triángulos ABC y DEC, donde AC es la mediana por C de una cara del tetraedro. Dado que $CD = \frac{2}{3}AD$ entonces $DE = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}\times\frac{3}{2} = 1$. Por lo tanto el lado del triángulo equilátero mide *2cm*, su área es igual a $\left(\frac{1}{2}\times 2\times 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)cm^3 = \sqrt{3}cm^3$ y su perímetro es *6cm*.

Problema 9. La base de la bipirámide es paralela a las caras opuestas de la caja de $21cm^3$ que la contiene, conforme muestra la figura.



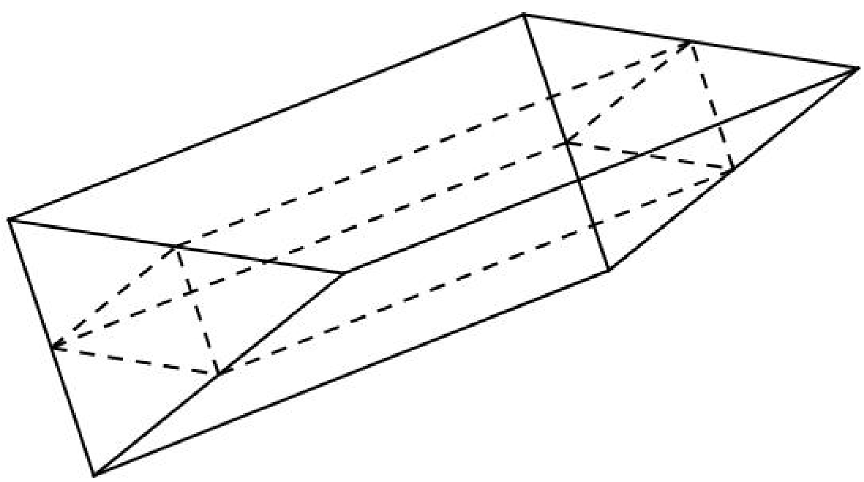
Hallar el volumen de la bipirámide.

Solución: La base común de las pirámides secciona a la caja en dos cajas de volúmenes *V* y *V'*. Cada una de éstas contiene una pirámide cuyo volumen es igual a un tercio de su volumen. En consecuencia, el volumen de la bipirámide es:

$$\frac{1}{3}V+\frac{1}{3}V'=\frac{1}{3}\left(V+V'\right)=\frac{1}{3}\times 21cm^3=7cm^3\,.$$

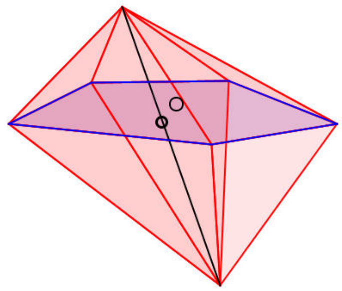
Problema 10. De un listón de madera con base triangular se desea fabricar un listón cuatro veces más largo ¿Cómo cortamos? (un listón es un prisma recto)

Solución: Realizando cortes longitudinales sobre las bases medias de las caras en los extremos del listón,

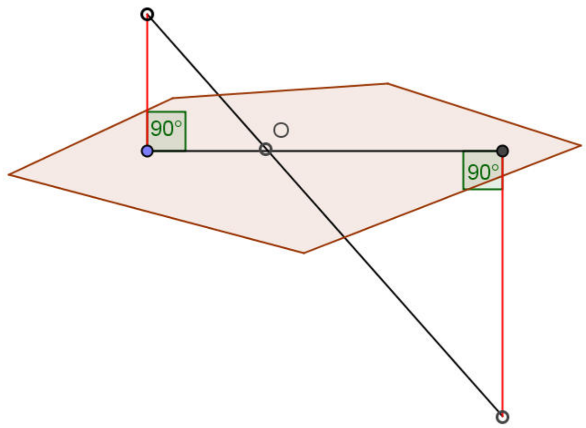


se obtienen cuatro listones idénticos que pueden ser unidos para forma un listón cuatro veces más largo que el original.

Problema 11. En la bipirámide de base pentagonal el segmento que une los vértices superior e inferior es cortado en el punto *O* por la base en la relación 1:2. Si el volumen de la bipirámide es $12cm^3$ ¿cuál es el volumen de cada pirámide?

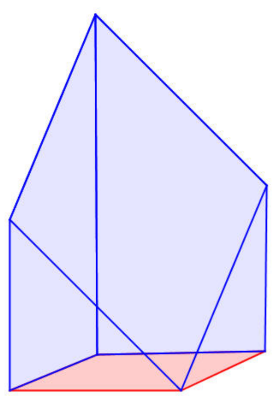


Solución: Las alturas de las pirámides, destacadas en color rojo en la siguiente figura, están en la misma relación 1:2.

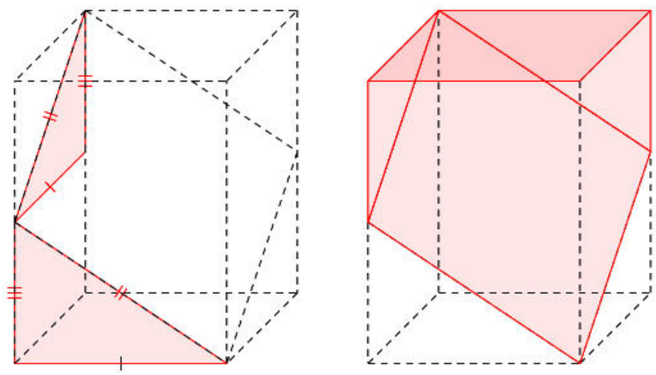


Dado que las pirámides comparten la base, sus volúmenes están en la misma relación que sus alturas, es decir el volumen de la pirámide en la parte inferior es el doble que el volumen de la pirámide en la parte superior. De este modo, se tiene que los volúmenes de las pirámides son $8cm^3$ y $4cm^3$ respectivamente.

Problema 12. Un listón (prisma recto) de madera de base cuadrada de *1cm* de lado, se ha seccionado de modo que quedó la pieza de la figura, con una cara con forma de rombo y *4cm* de altura. Hallar el volumen de la pieza.

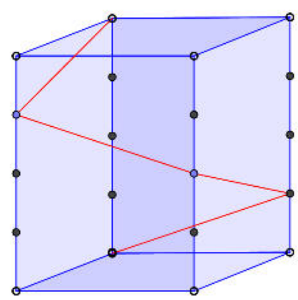


Solución: Con dos piezas idénticas, como la dada en la figura, se puede formar un paralelepípedo rectangular de $1cm \times 1cm \times 4cm$ cuyo volumen es $4cm^3$, por lo tanto el volumen de la pieza es $2cm^3$. Para ver esto, notemos que dos vértices del rombo están a *2cm* de altura, como surge de la igualdad de los triángulos rectángulos marcados en la primera figura.

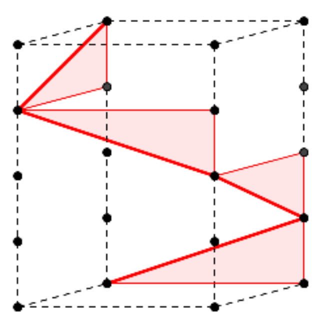


La segunda figura, muestra la pieza idéntica a la dada en la parte superior del listón.

Problema 13. Las aristas laterales, de *4cm*, de una caja de base rectangular, de *2cm* por *3cm*, están divididas en *4* partes iguales. ¿Cuál es la longitud de la poligonal que muestra la figura?

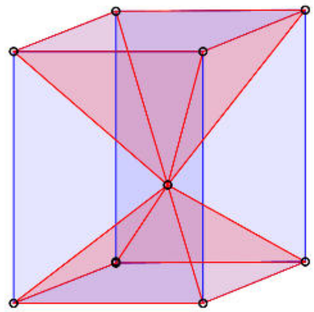


Solución: Los segmentos en la poligonal son hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos miden según el caso: 1 y 2 centímetros y 1 y 3 centímetros. La siguiente figura ilustra la situación.



Por el Teorema de Pitágoras, sus mediadas son $\sqrt{5}cm$ y $\sqrt{10}cm$, de manera que la longitud de la poligonal es $2\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)cm$.

Problema 14. De una pieza con forma de caja se retiran las dos pirámides rojas que muestran la figura, una de *5cm*^{3} y la otra de *7cm*^{3}. Hallar el volumen de la caja.



Solución: La suma de las alturas de las pirámides es igual a la altura de la caja y sus bases tienen igual área. Luego, entre ambas pirámides totalizan un volumen igual a un tercio del volumen de la pieza con forma de caja. El volumen buscado es $3\times(5+7)cm^3 = 36cm^3$.

Problema 15. Los pies de tres las alturas de un tetraedro caen sobre los circuncentros de las caras correspondientes. Determinar los ángulos de las caras del tetraedro.

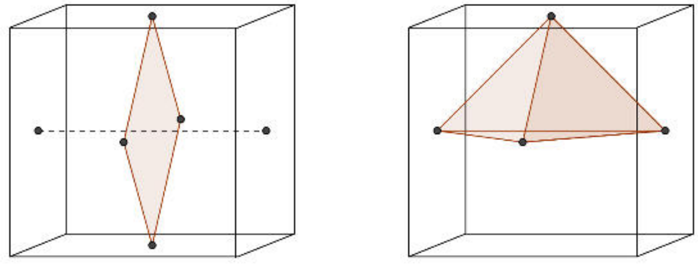
Solución: El circuncentro de cada cara, está en la recta perpendicular a dicha cara, dada por la intersección de los planos bisectores de sus lados. En consecuencia, cada vértice equidista de los tres restantes, pero esto sólo es posible si todas la aristas son iguales, o bien, si las caras son triángulos equiláteros. En conclusión, los ángulos son de 60º.

Problema 16. Si un cuerpo con centro se secciona con un plano que no pase por su centro, las partes obtenidas tienen áreas distintas y volúmenes distintos.

Solución: Sea P el plano de la sección. El plano paralelo a P que pasa por el centro, descompone al cuerpo en dos cuerpos de igual área e igual volumen. Luego, las partes obtenidas por P no pueden tener igual área ni igual volumen.

Problema 17. Cuatro centros de caras de un cubo de *1cm* de arista, son los vértices de un tetraedro ¿Cuál es el volumen de este tetraedro?

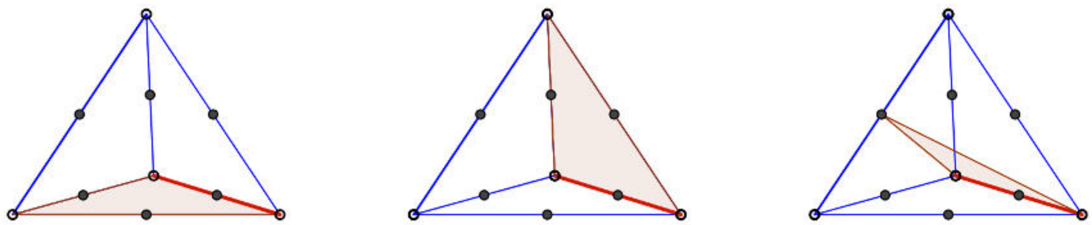
Solución: Dado que hay seis centros en total, en los cuatro centros elegidos como vértices del tetraedro, uno debe ser el opuesto de otro. Los dos centros restantes están dados por los extremos de un lado del cuadrado que se forma con los cuatro centros restantes.



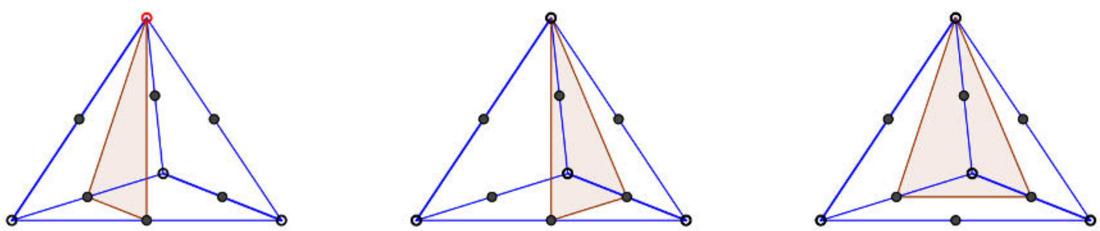
En la primera figura están marcados los seis centros, un centro y su opuesto unidos por un segmento y los cuatro restantes como vértices del cuadrado al que hicimos referencia. En la segunda figura se muestra uno de los tetraedros posibles según el enunciado. Es claro que todos los tetraedros tienen las mismas dimensiones siendo el volumen común igual a $\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\right)cm^3=\frac{1}{24}cm^3$.

Problema 18. ¿Cuántos planos distintos pueden ser determinados eligiendo tres puntos entre los vértices de un tetraedro y los puntos medios de sus aristas?

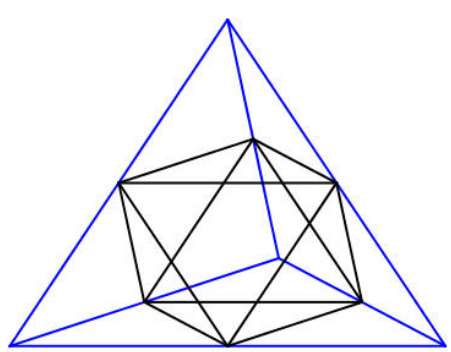
Solución: Si el plano contiene una arista, está sobre una cara del tetraedro o el plano está determinado por dicha arista y el punto medio de la arista opuesta. Las figuras ilustran este hecho.



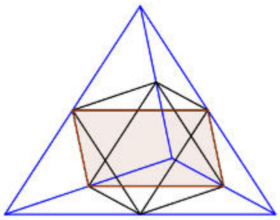
Dado que el tetraedro tiene *4* caras y *6* aristas, hay *10* planos en esta situación.
Si no contiene ninguna arista, pero contiene un vértice hay tres planos por vértice, lo que hace un total de *12* planos.

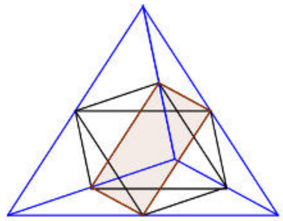


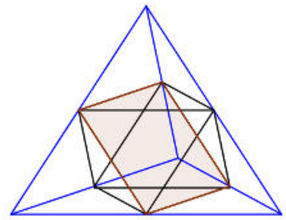
Si no contiene aristas ni vértices, entonces el plano está determinado por tres puntos medios de aristas. Estos *6* puntos medios son los vértices de un poliedro.



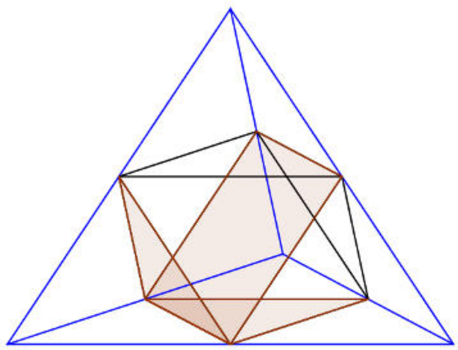
Este poliedro puede ser visto, de tres maneras distintas, como bipirámide cuya base es un paralelogramo.





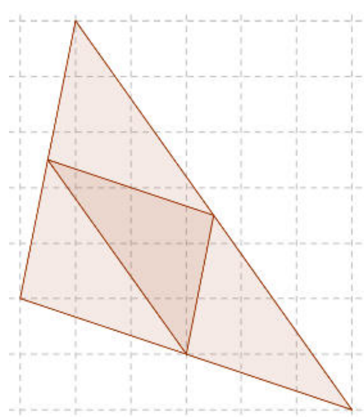


Notar que en cada vértice del poliedro concurren *4* aristas, de modo que dados *3* vértices hay *2* que pertenecen a una arista. Luego, en este caso, cada plano contiene una arista, y está sobre una cara del poliedro o sobre la base de una bipirámide.



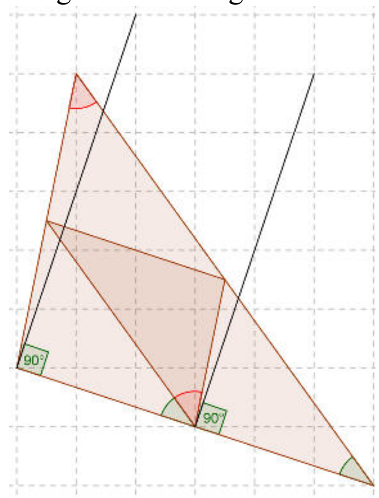
De las *8* caras del poliedro, *4* están sobre las caras del tetraedro y los respectivos planos ya fueron contados. Quedan 4 caras del poliedro y las 3 bases de las bipirámides.
En total hay *4+6+12+4+3 = 29* planos.

Problema 19. El triángulo de la figura tiene sus vértices sobre nodos (son los puntos donde se cortan las líneas horizontales con las líneas verticales de la cuadrícula) del papel cuadriculado

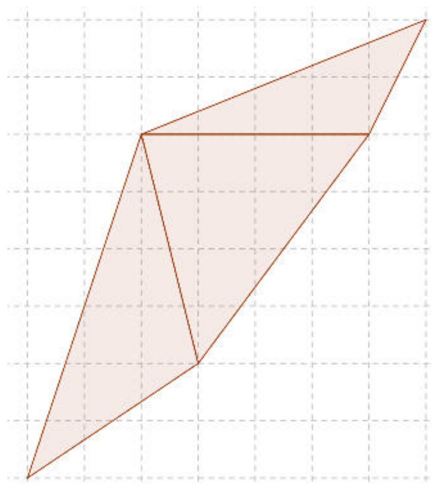


Los puntos medios de los lados del triángulo dan lugar a una descomposición del mismo en cuatro triángulos. ¿Puede ser esta figura el desarrollo de un tetraedro?
Sugerencia: Papel y tijera.

Solución: No, la razón se basa en el siguiente hecho:
En cada vértice de un tetraedro concurren tres ángulos, la suma de las medidas, de dos ellos, es mayor que la medida del ángulo restante.
En nuestro caso, los tres vértices del triángulo deberían unirse para formar un vértice del tetraedro, pero la suma de dos ángulos del triángulo es menor que el ángulo restante.

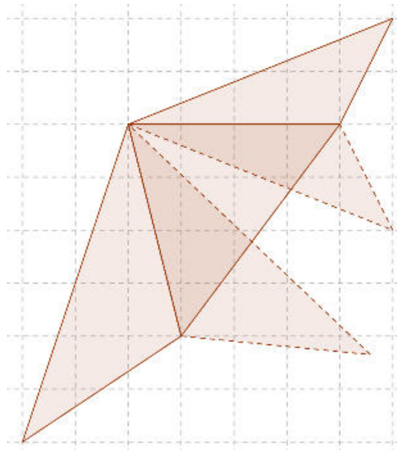


Problema 20. Los triángulos de la figura tienen sus vértices sobre nodos del papel cuadriculado.



¿Puede ser esta figura el desarrollo de las caras laterales de una pirámide triangular?
Sugerencia: Papel y tijera.

Solución: No, como en el problema anterior, no se cumple la desigualdad indicada.

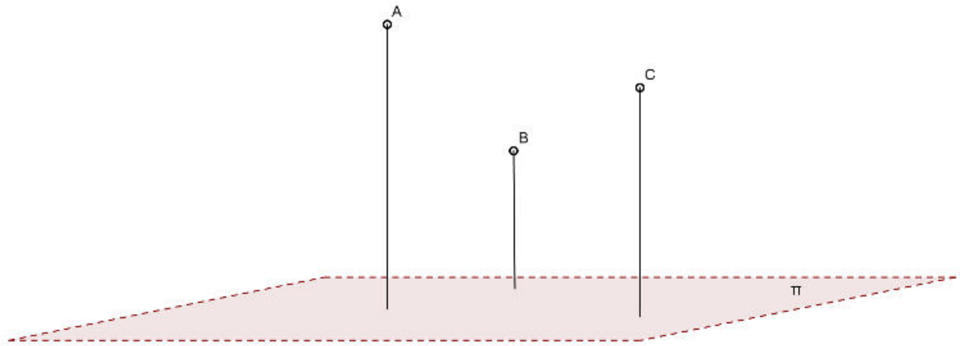


Problema 21. ¿Puede justificar las afirmaciones siguientes?

1. *Dos rectas distintas concurrentes son coplanares.*
2. *Dos rectas distintas en el espacio son: paralelas, concurrentes o alabeadas.*
3. *Las aristas opuestas en un tetraedro determinan rectas alabeadas.*
4. *Un punto y una recta en el espacio son coplanares.*
5. *Dados en el espacio una recta y un punto que no pertenezca a la recta, existe un único plano que contiene al punto y a la recta.*
6. *Si una recta l está en un plano P, una recta m no está en P y l y m se cortan en el punto Q, entonces m y P se cortan en el punto Q.*

Solución: 1. Se justifica usando los enunciados dados en el apéndice:
Por tres puntos no alineados del espacio pasa un único plano.
Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que pasa por esos puntos está contenida en el plano.
Sean m y n las dos rectas que concurren en el punto P. Consideremos un punto Q en m y un punto R en n, ambos distintos de P. Los puntos P, Q y R no están alineados, por lo tanto determinan un único plano que incluyen a m y n.
2. Según la definición, si las rectas no son paralelas, se cortan o no son coplanares, es decir, son concurrentes o no son coplanares. Pero dos rectas dos rectas no coplanares son necesariamente alabeadas.
3. Si no fueran rectas alabeadas, estas rectas serían coplanares. Dado que cada una de ellas tiene dos vértices del tetraedro, los cuatro vértices del tetraedro serían coplanares.
4. Si el punto está en la recta, cualquier plano que contenga a la recta contiene al punto, hay infinitos. Si el punto no está en la recta, tomando dos puntos de ésta y el punto exterior, se determina un único plano que contiene a la recta y al punto.
5. Resuelto en el punto 4.
6. La recta m y el plano P se cortan en el punto Q, como m no está en P, P y m se cortan en un único punto que es Q.

Problema 22. Sobre el plano horizontal π hay tres columnas de distintas alturas cuyos extremos superiores son A, B, C. Si P, Q y R son los respectivos puntos de intersección de las rectas AB, BC, y CA con el plano π, hallar el área del triángulo de vértices PQR.



Solución: Si los puntos A, B, C están alineados, entonces $P = Q = R$ y el área es cero. Si A, B, C no están alineados, determinan un único plano ψ y P, Q y R están en la intersección de π y ψ, es decir P, Q y R están alineados y el área también es cero.