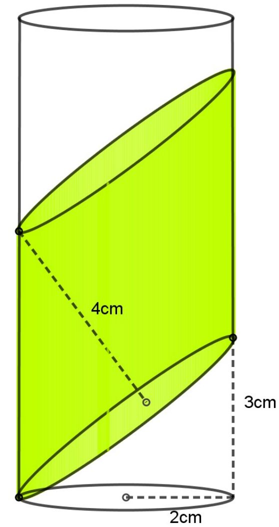
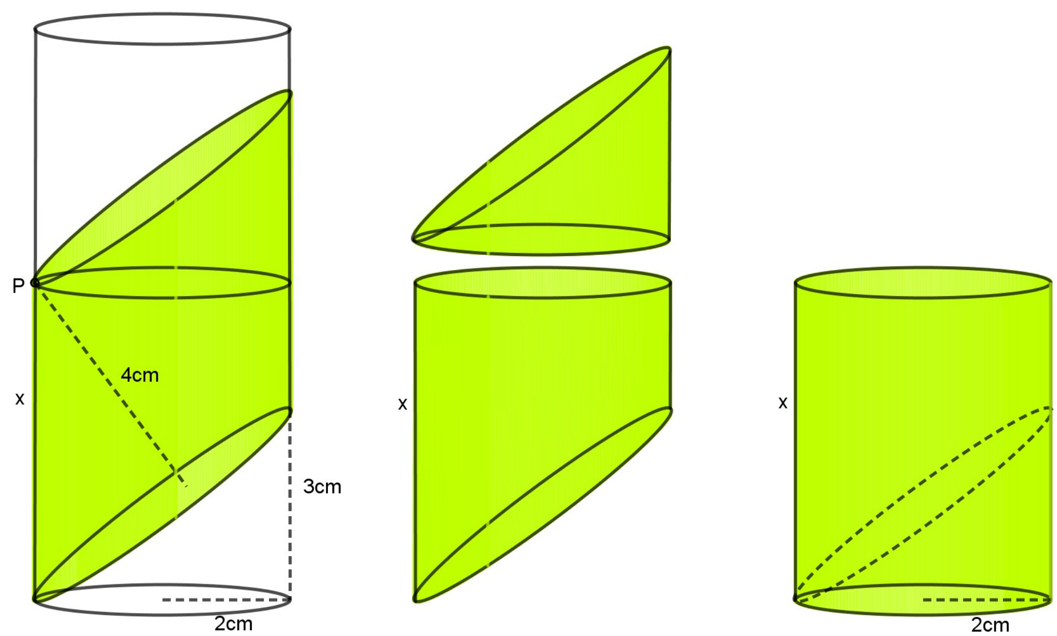
Problemas Propuestos

1. Dos planos paralelos, a *4cm* de distancia uno del otro y con la inclinación indicada en la figura, seccionan un cilindro de *2cm* de radio en su base.

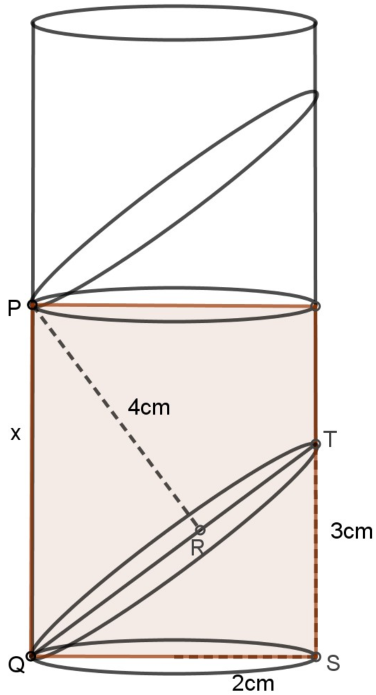


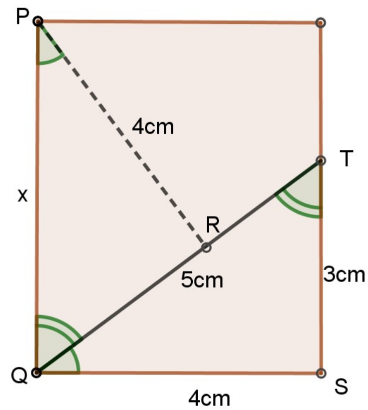
Hallar el volumen del cuerpo limitado por ambas secciones.

Solución: En la primer figura se observa que seccionando el cuerpo con el plano paralelo a la base del cilindro que pasa por el punto *P* se obtiene una cuña cilíndrica que es igual a la que se encuentra debajo del cuerpo, en la base del cilindro.



La segunda figura ilustra la situación. Moviendo esta cuña a la parte inferior del cuerpo se arma el cilindro mostrado en la tercera figura. Su volumen es mismo que el del cuerpo considerado. Para calcularlo basta hallar el valor de *x*, altura del cilindro.

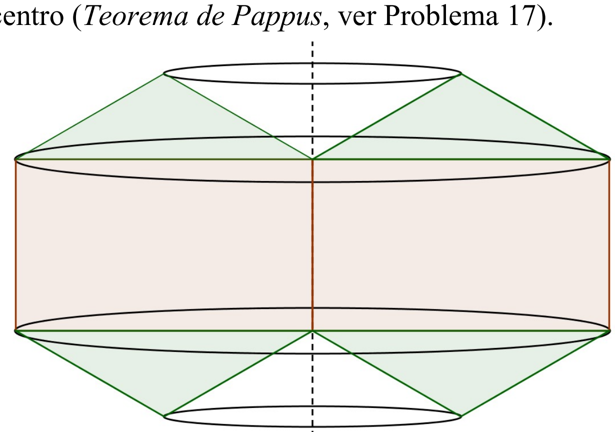




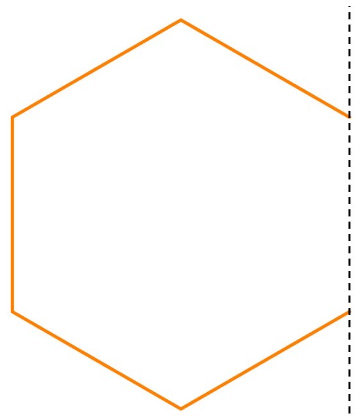
Seccionando el cilindro con el plano que contiene al eje del cilindro y al diámetro *QS* de la base, destacamos el rectángulo de lados *PQ* y *QS*. En el triángulo rectángulo *QTS*, por Pitágoras la hipotenusa *QT* mide *5cm*. Por ser los triángulos *PQR* y *QTS* semejantes, se obtiene la relación $\frac{x}{5}=\frac{4}{4}=1$, es decir $x=5cm$. El volumen del cuerpo es $\left(\pi\times 2^2\times 5\right)cm^3=20\pi cm^3$.

Problema 2. Se hace rotar un hexágono regular de *1cm* de lado alrededor de uno de sus lados. Hallar el área y el volumen del cuerpo generado.

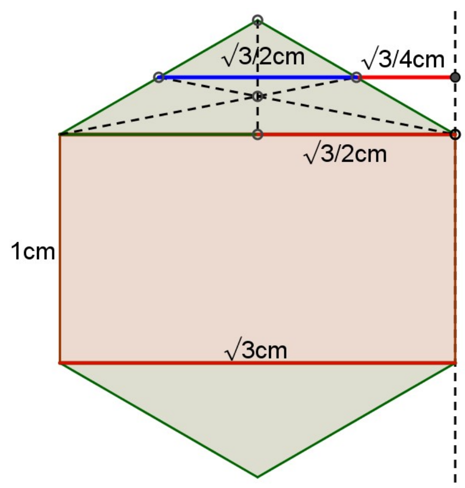
Solución: El hexágono puede descomponerse en un rectángulo y dos triángulos; al hacer girar el hexágono el rectángulo genera un cilindro y los triángulos dos cuerpos idénticos con un volumen igual al área del triángulo por la longitud de la circunferencia que describe el baricentro (*Teorema de Pappus*, ver Problema 17).



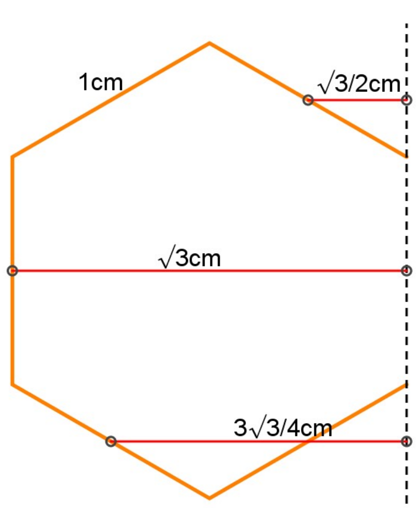
Para encontrar el área, tengamos en cuenta que el cuerpo se obtiene al hacer girar la poligonal destacada en la figura siguiente:



Con las observaciones anteriores, los datos en la figura siguiente son suficientes para calcular el área A y el volumen V solicitados. En el triángulo superior de esta figura se han trazado las medianas para determinar la posición del baricentro.



El área, según se expone en los Problemas 17 y 18, puede obtenerse con los datos indicados en la siguiente figura:



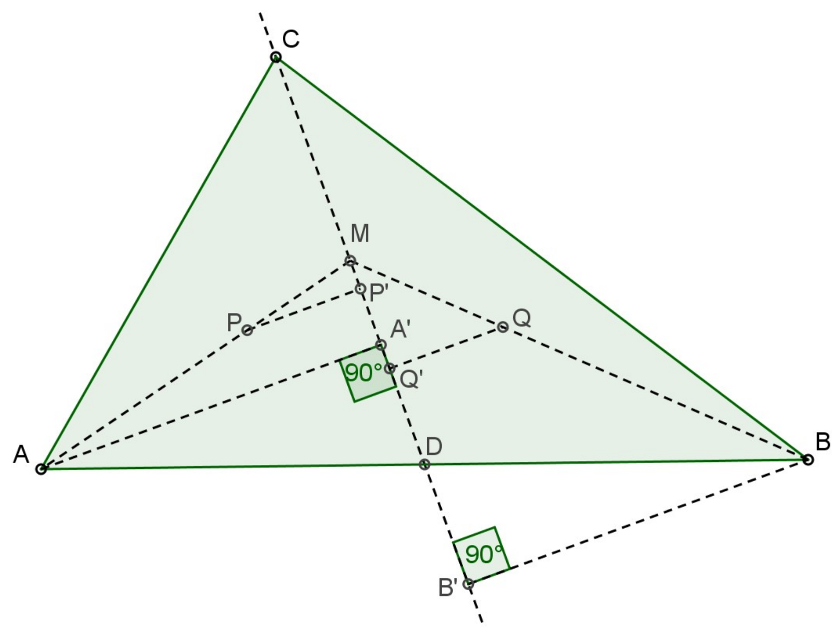
Resulta $A=\left(1\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\times 2\pi cm^2 = 7\sqrt{3}\pi cm^2$.

Por otra parte, dado que el área de cada uno de los triángulos es $\frac{\sqrt{3}}{4}cm^2$, el volumen es:

$$V=\left(\pi\times\left(\sqrt{3}\right)^2\times 1+2\times 2\pi\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)cm^3=\frac{9}{2}\pi cm^3$$

Problema 3. Una mediana de un triángulo descompone al mismo en dos triángulos. Si estos triángulos giran alrededor de dicha mediana, se obtienen dos cuerpos; el volumen de uno de ellos es *30cm*^{3}. Hallar el volumen del otro cuerpo.

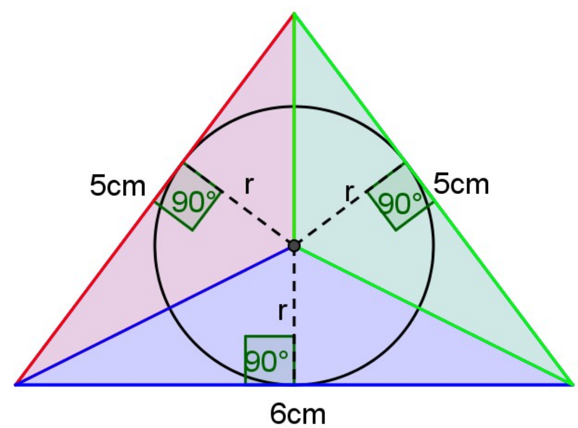
Solución: En el triángulo *ABC* de la siguiente figura, la mediana *CD* determina los triángulos *ADC* y *DBC* de igual área. Si *P* y *Q* son los respectivos baricentros, podemos mostrar que las distancias de *P* y *Q* a la recta *CD* son iguales.



Estas distancias son las longitudes de los segmentos *PP'* y *QQ'* dados en la figura.
Ambos triángulos tiene igual área. Los triángulos rectángulos *ADA'* y *BDB'* son semejantes y sus hipotenusas tienen la misma longitud, es decir son iguales. Luego *AA'* y *BB'* tienen igual longitud. Como el baricentro de un triángulo divide a las medianas en la relación *2:1*, se tiene que *MB = 3MQ* y como los triángulos *QMQ'* y *BMB'* son semejantes, resulta *BB' = 3QQ'*; análogamente se verifica *AA' = 3PP'*. Se concluye que *PP' = QQ'*.
Por el *Teorema del Centroide de Pappus* encontramos que el volumen del cuerpo obtenido al girar el triángulo *ADC* alrededor de *CD* es el mismo que el volumen del cuerpo obtenido al girar el triángulo *BCD* alrededor de *CD*.
En el caso del problema considerado, ambos volúmenes miden *30cm*^{3}.

Problema 4. Hallar el área de la esfera inscripta en el cono de *4cm* de altura y *3cm* de radio en la base.

Solución: Considerando una sección del cono y la esfera por un plano que contenga al eje del cono, se obtiene una circunferencia inscripta en un triángulo isósceles, cuyos lados iguales son generatrices del cono, es decir miden *5cm* (por Pitágoras).



El radio de la esfera coincide con el radio de dicha circunferencia. Para encontrarlo descomponemos el triángulo antes mencionado en tres triángulos con un vértice común que es el incentro de dicho triángulo (punto de intersección de las bisectrices). El área del triángulo es $12cm^2$, también es la suma de las áreas de los tres triángulos:

$$\left(\frac{6r}{2}+\frac{5r}{2}+\frac{5r}{2}\right)cm^2 = 8rcm^2$$

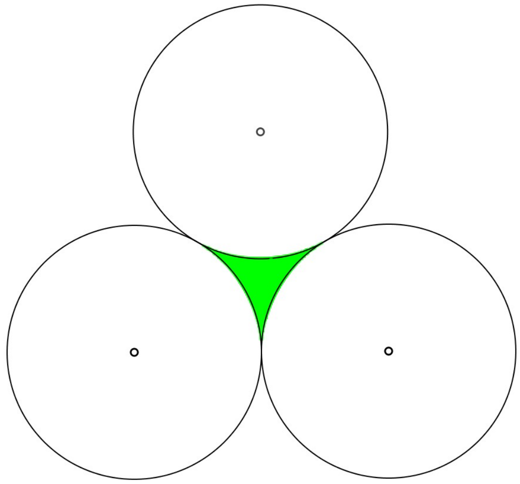
Luego $r = \frac{3}{2}cm$ con lo cual el área de la esfera es $9\pi cm^2$.

Problema 5. Tres caños cilíndricos de iguales dimensiones hacen contacto dos a dos, a lo largo de una generatriz. Por la cavidad limitada por estos caños se hará pasar una pieza que puede ser:

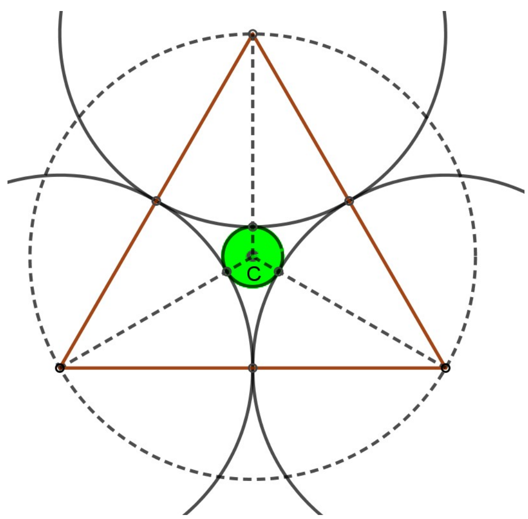
a) Cilíndrica.
b) Un prisma triangular con base regular.
c) Material de amalgama.

Hallar el volumen máximo de la pieza en cada caso si los caños tienen *1m* de diámetro por *2m* de longitud.

Solución: La sección normal de la cavidad está dada por la región sombreada de la figura.

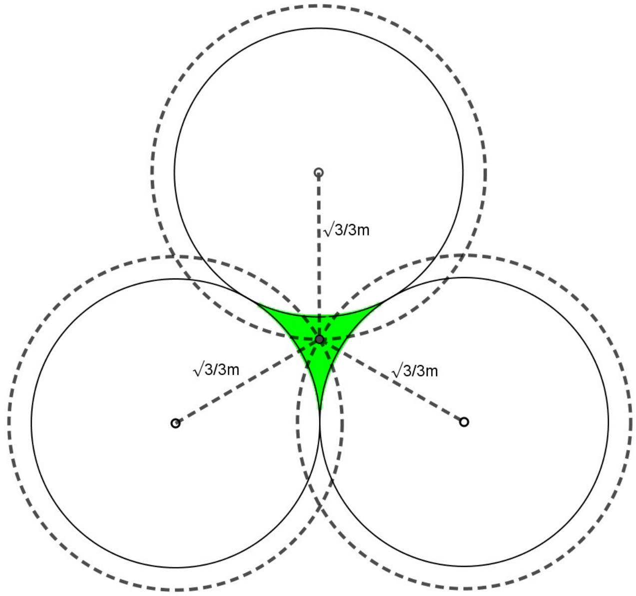


a) Los centros de las tres circunferencias son los vértices de un triángulo equilátero de *1m* de lado. El centro de la circunferencia C dada en la figura



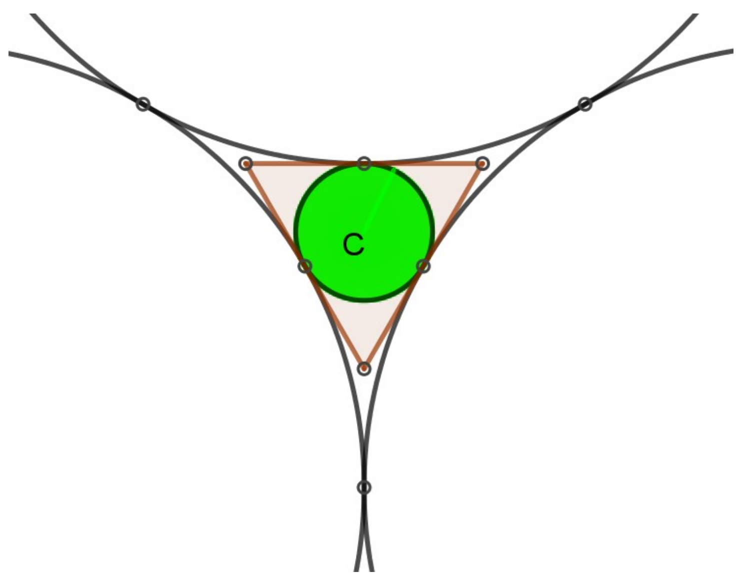
es el circuncentro de dicho triángulo y C es tangente a las tres circunferencias. Por lo tanto su radio r puede obtenerse como el radio de la circunferencia circunscripta al triángulo menos el radio de los caños. El radio de la circunscripta es dos tercios de la altura, es decir $\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)m=\frac{\sqrt{3}}{3}m$, de modo que $r=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)m$.

Ninguna circunferencia de radio mayor que r puede ser incluida en la región sombreada, ya que su centro estaría a una distancia mayor que $\frac{\sqrt{3}}{3}m$ de los centros de las tres circunferencias, pero no hay un punto es estas condiciones.



En conclusión, C es la circunferencia de mayor área que puede ser incluida en la región sombreada. El volumen máximo de la pieza es $\left(\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 \times 2\right)m^3 = \pi\left(\frac{7-4\sqrt{3}}{6}\right)m^3$.

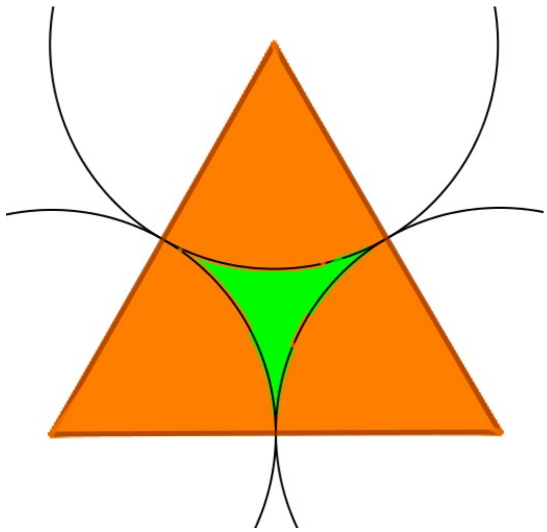
b) El triángulo equilátero de mayor área que puede ser incluido en dicha región, es el triángulo circunscripto a C cuyos lados están sobre las tangentes comunes a C y cada una de las tres circunferencias.



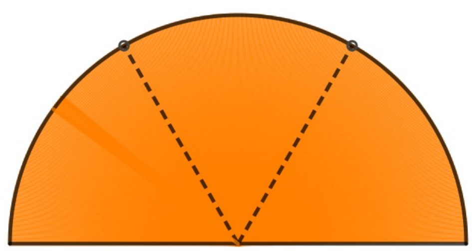
Esto es así, porque si un triángulo equilátero está incluido en la región, su circunferencia inscripta también lo está y su radio debe ser menor o igual que radio de C. La altura h del triángulo circunscripto es $3r$, dado que el incentro coincide con el baricentro. Por otra parte, es $h=\frac{\sqrt{3}}{2}l$ donde l es el lado del triángulo, luego el área del triángulo es $\frac{l\times h}{2}m^2=3\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)^2 m^2=\frac{7\sqrt{3}-12}{4}m^2$.

En este caso el volumen máximo de la pieza es: $\frac{7\sqrt{3}-12}{2}m^3$.

c) Basta con determinar el área de la región, diferencia entre el área del triángulo y el área de los tres sectores circulares iguales.



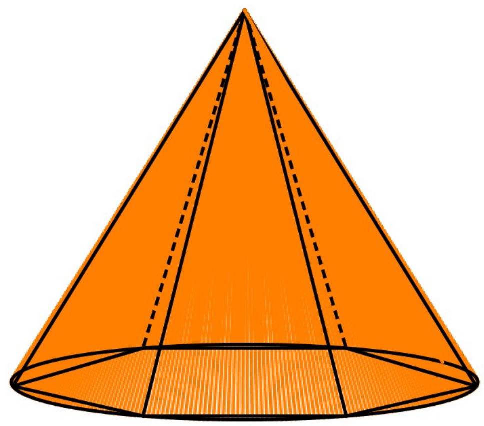
Los sectores totalizan un área igual a la de un semicírculo de *1m* de diámetro.



Luego el área de la región es $\left(\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)m^2=\frac{2\sqrt{3}-\pi}{8}m^2$, el volumen máximo en este caso es $\frac{2\sqrt{3}-\pi}{8}m^2$

Problema 6. Una pirámide recta de *4cm* de altura y con un hexágono regular en la base de *3cm* de lado gira alrededor de su eje. ¿Cuál es el volumen del cuerpo obtenido? ¿Cuál es el área?

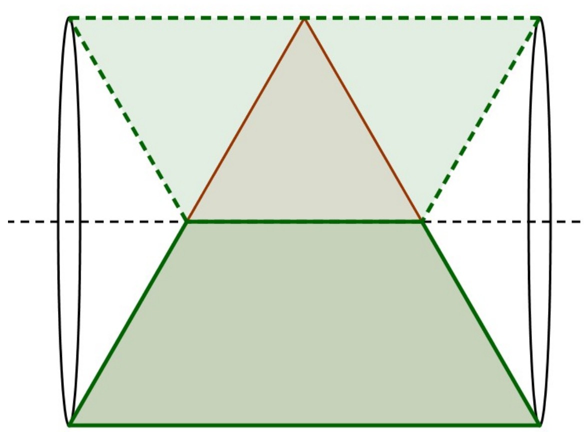
Solución: El cuerpo generado es un cono con un círculo de radio *3cm* en la base, *4cm* de altura y *5cm* de generatriz.



En consecuencia, usando Pappus, el volumen es $\left(\frac{1}{3}\pi\times 3^2\times 4\right)cm^3 = 12\pi cm^3$ y el área es $\left(\pi\times 3^2+5\times 2\pi\times\frac{3}{2}\right)cm^2 = 24\pi cm^2$.

Problema 7. Un triángulo equilátero de *6cm* de lado gira alrededor de una base media. Calcular el volumen y el área del cuerpo obtenido.

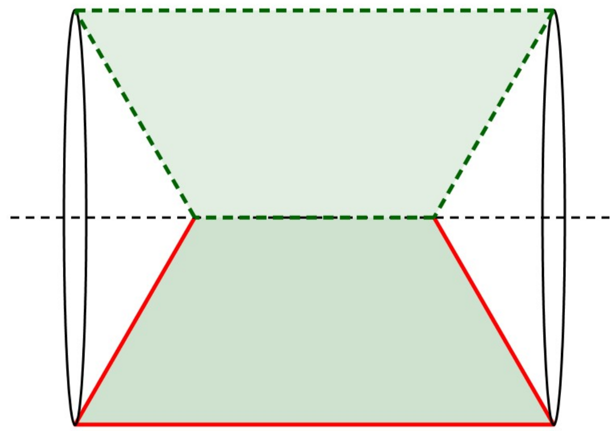
Solución: El cuerpo generado puede obtenerse haciendo girar sólo el trapecio a un lado de la base media.



Como se aprecia en la figura precedente, el volumen puede obtenerse como el volumen de un cilindro menos el volumen de dos conos. Las alturas de estos conos suman una longitud igual a la mitad de la base del triángulo, en consecuencia los conos totalizan un volumen igual a 1/6 del volumen del cilindro, de nodo que el cuerpo generado tiene por volumen a 5/6 del volumen del cilindro. El volumen del cilindro es:

$$\left(\pi\left(3\sqrt{3}\right)^2\times 6\right)cm^3 = 162\pi cm^3$$

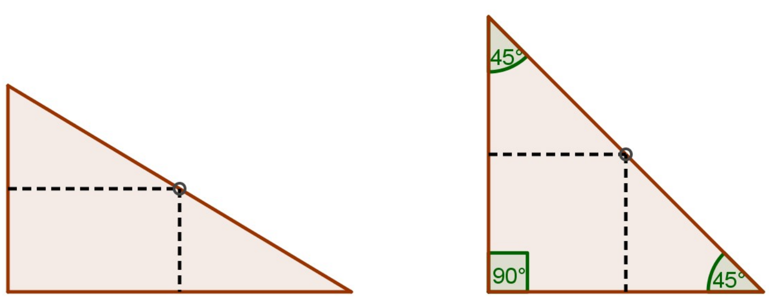
y el volumen del cuerpo resulta $135\pi cm^3$.
Para el cálculo del área, podemos usar el método de la poligonal expuesto en el Problema 17 de la Nota 5.



El área es: $\left(2\pi\times 6\times\frac{3\sqrt{3}}{2}+2\left(2\pi\times 3\times\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\right)cm^2 = 27\sqrt{3}\pi cm^2$.

Problema 8. Un triángulo rectángulo gira alrededor de cada uno de sus catetos generando dos cuerpos de igual volumen. Hallar los ángulos del triángulo.

Solución: Para que los volúmenes sean iguales, en virtud de Pappus, el centro de la hipotenusa debe equidistar de los catetos.



Volúmenes distintos　　　　Igual volumen

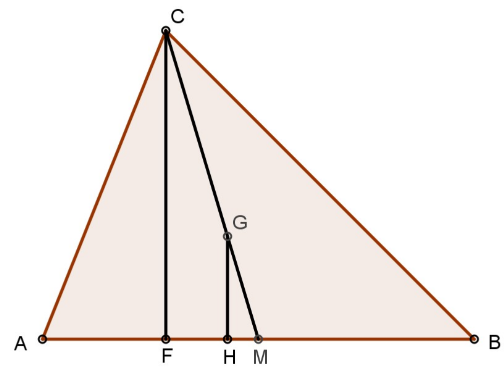
Esto sucede sólo si los catetos son iguales, es decir, se trata de un triángulo isósceles y sus ángulos miden 45º,45º y 90º.

Problema 9. Un triángulo rectángulo de *3cm, 4cm* y *5cm* de lados, gira alrededor de su hipotenusa. Hallar el volumen del bicono generado.

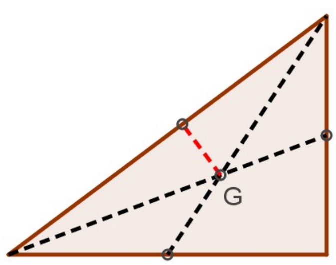
Solución: Observemos previamente la siguiente propiedad:

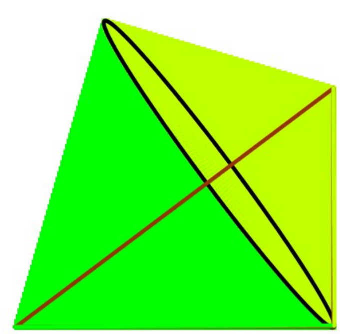
En todo triángulo ABC la distancia desde su baricentro a uno de los lados del triángulo es igual a un tercio de la altura correspondiente.

En la figura, G es el baricentro del triángulo ABC, CM es la mediana y CF es la altura correspondientes a lado AB. Dado que $CM = 3GM$ y los triángulos CFM y GHM son semejantes, resulta $CF = 3GH$.



En el presente problema, calculamos la altura h sobre la hipotenusa teniendo en cuenta que el área del triángulo es: $\frac{3\times 4}{2}cm^2 = \frac{5\times h}{2}cm^2$, o sea $h = \frac{12}{5}cm$. Luego la distancia desde el baricentro a al hipotenusa es $\left(\frac{1}{3}\times\frac{12}{5}\right)cm = \frac{4}{5}cm$.



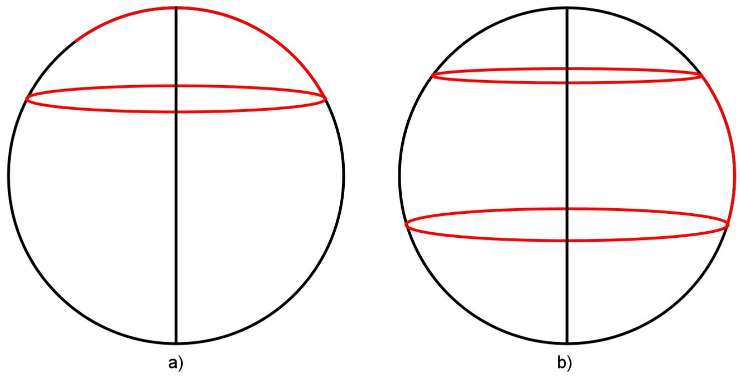


Finalmente, el volumen del bicono es $\left(6\times\pi\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)cm^3 = \frac{96\pi}{25}cm^3$.

Problema 10. Un arco de circunferencia gira alrededor de un diámetro de la circunferencia. Indicar cómo usaría las fórmulas de esta nota para calcular el área de la superficie generada, según los distintitos casos que puedan presentarse.

Solución: Hay dos casos;
a) el arco corta al diámetro

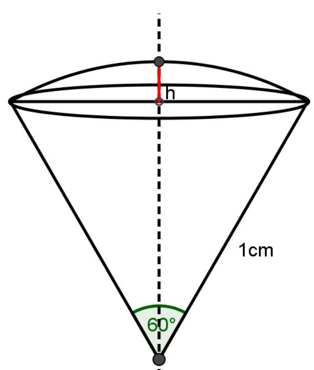
b) el arco no corta al diámetro.



En el caso a) se genera la superficie lateral de un casquete esférico, y el área se calcula directamente con la fórmula.
En el caso b) se genera una superficie esférica que también puede ser obtenida como diferencia de superficies laterales de dos casquetes esféricos, consecuentemente, el área de la superficie generada es diferencia de áreas laterales de casquetes esféricos.

Problema 11. Un sector circular de radio *1cm* y 60^o de ángulo central, gira alrededor de su bisectriz. Hallar el área y volumen del cuerpo obtenido.

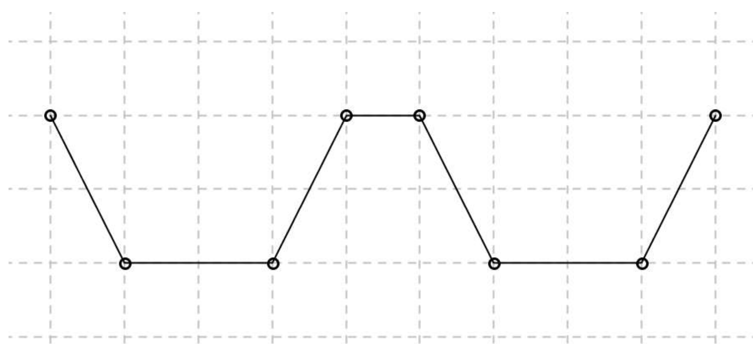
Solución: El cuerpo es un cono unido a un casquete esférico.



El área lateral del cono es $\left(1\times\frac{1}{2}\times 2\pi\right)cm^2 = \pi cm^2$; el área lateral del casquete es $\left(2\pi\times 1\times\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)cm^2 = \left(2-\sqrt{3}\right)\pi cm^2$. Luego el área del cuerpo obtenido es $\left(3-\sqrt{3}\right)\pi cm^2$.

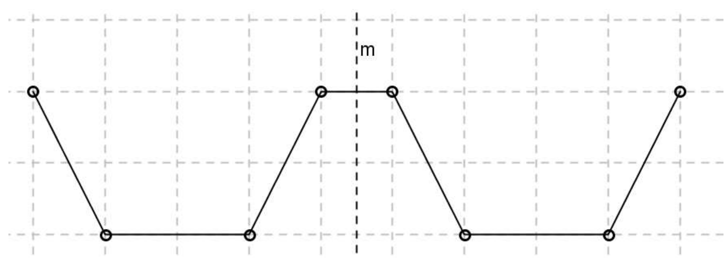
El volumen del cono $\left(\frac{1}{3}\times\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)cm^3=\frac{\sqrt{3}}{24}\pi cm^3$. El volumen del casquete es $\left(\frac{1}{3}\pi\times\frac{2-\sqrt{3}}{2}\times\frac{4+\sqrt{3}}{2}\right)cm^3=\frac{5-2\sqrt{3}}{12}\pi cm^3$, de modo que el volumen del cuerpo es $\frac{10-3\sqrt{3}}{24}\pi cm^3$.

Problema 12. Calcular la cantidad de aluminio necesario para hacer una flanera cuyo perfil muestra la figura donde cada cuadrito es de *5cm* de lado.

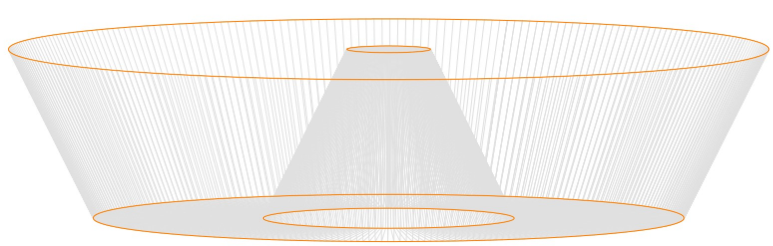


¿Cuál será su capacidad?

Nota: La superficie de la flanera se obtiene al hacer girar la poligonal dada alrededor de la recta *m*.



La siguiente figura ilustra la situación planteada.



Solución: El área puede obtenerse usando el Teorema de Pappus como en el Problema 18 de esta nota. El volumen como diferencia de troncos de conos.

El área es: $2\pi\left(\frac{5}{2}\times\frac{5}{4}+5\sqrt{5}\times 5+10\times\frac{25}{2}+5\sqrt{5}\times 20\right)cm^2=\left(\frac{1025}{4}+250\sqrt{5}\right)\pi cm^2$.

El volumen es:

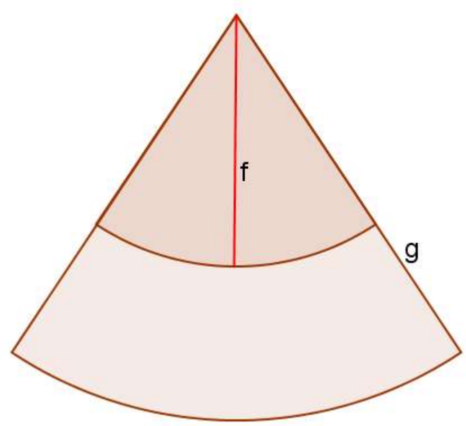
$$\frac{1}{3}\pi\times 10\times\left(\left(\frac{45}{2}\right)^2+\frac{45}{2}\times\frac{35}{2}+\left(\frac{35}{2}\right)^2\right)-\frac{1}{3}\pi\times 10\times\left(15^2+15\times 5+5^2\right)=2937{,}5\pi cm^3$$

Problema 13. Se tiene un rectángulo de *12cm* de perímetro. Si se gira alrededor de uno de sus lados se obtiene un cilindro cuyo volumen es el doble del que se obtendría si se girara alrededor del otro lado. Hallar el área del rectángulo.

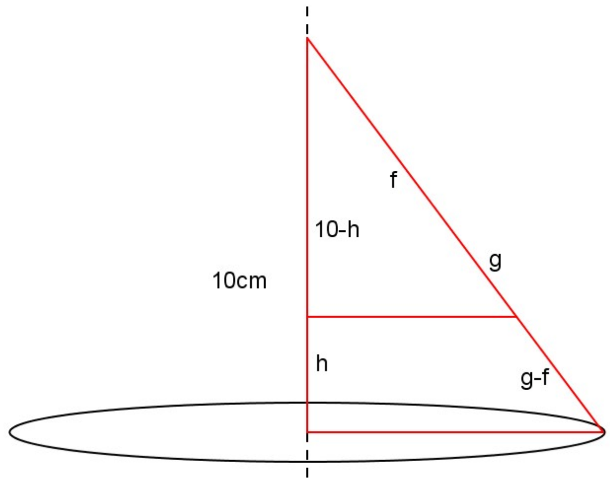
Solución: Si a y b son los lados del rectángulo, b mayor o igual que a, los volúmenes de los cuerpos generados al girar alrededor de b y a respectivamente son πab^2 y $\pi a^2 b$. Dado que el cociente entre los volúmenes es *2*, resulta $b=2a$. Teniendo en cuenta que el perímetro *12cm*, los lados del rectángulo miden *4cm* y *2cm*. Su área es $8cm^2$.

Problema 14. ¿A qué altura debe seccionarse un cono, de *10cm* de altura, con un plano paralelo a su base para obtener dos cuerpos de igual área lateral?

Solución: Si desarrollamos el cono, queda un sector circular cuyo radio es la generatriz g del cono.

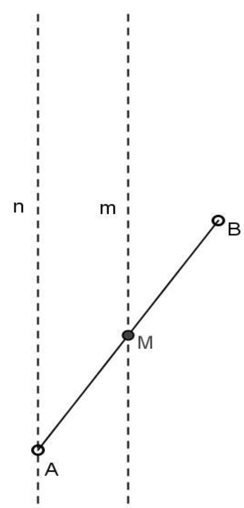


La sección con el plano dejará en la parte superior un cono con generatriz f cuya área lateral es la mitad del área total. Si α es el ángulo del sector circular, las áreas laterales de los cono son respectivamente $\frac{\alpha\times g^2}{2}$ y $\frac{\alpha\times f^2}{2}$. Como una es el doble de la otra, del cociente entre ambas resulta $g^2=2f^2$ o sea $f=\frac{\sqrt{2}}{2}g$. Si h es la altura a la que hay que seccionar el cono para obtener igual área lateral, teniendo en cuenta la generación del cono:

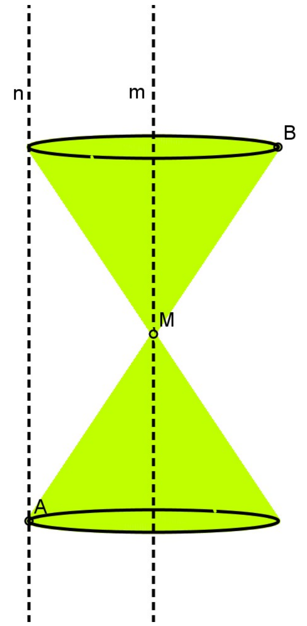


se tiene la relación $\frac{h}{10}=\frac{g-f}{g}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ de modo que $h=5\left(2-\sqrt{2}\right)cm$.

Problema 15. Las rectas *m* y *n* son paralelas y *m* pasa por el punto medio *M* del segmento *AB*. Si se gira el segmento *AB* alrededor de la recta *m*, se obtiene una superficie de $20cm^2$ ¿Qué área tendrá la superficie obtenida al girar *AB* alrededor de la recta *n*?



Solución: Al girar *AB* alrededor de *m* se obtiene un bicono simétrico donde cada cono tiene $10\ cm^2$ de área.



Las dimensiones de la generatriz y radio del cono generado por *AB* girando alrededor de *n* son el doble de las del cono generado por *BM* girando alrededor de *m*. En consecuencia, el área buscada es $\left(4\times10\right)cm^2 = 40cm^2$.