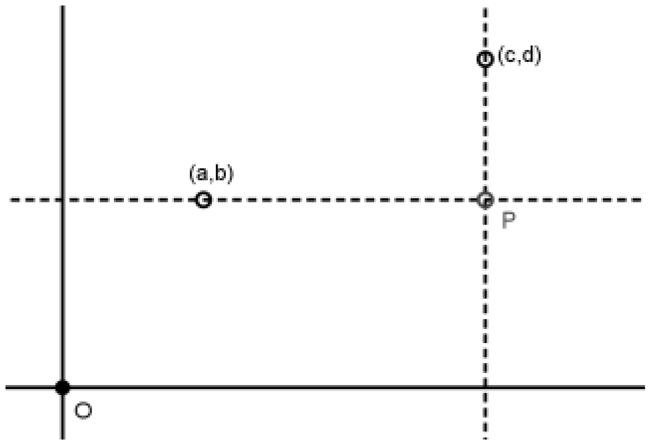
Problemas Propuestos

Problema 1. En la figura, las rectas punteadas son paralelas a los ejes coordenados. Hay un punto de coordenadas *(a,b)* y un punto de coordenadas *(c,d)*.

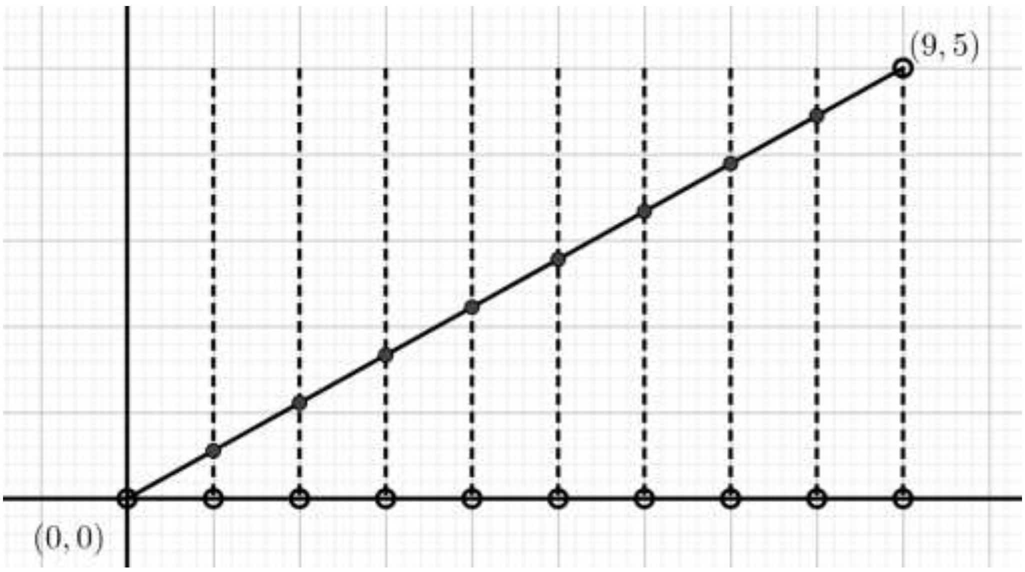


Hallar las coordenadas del punto *P*.

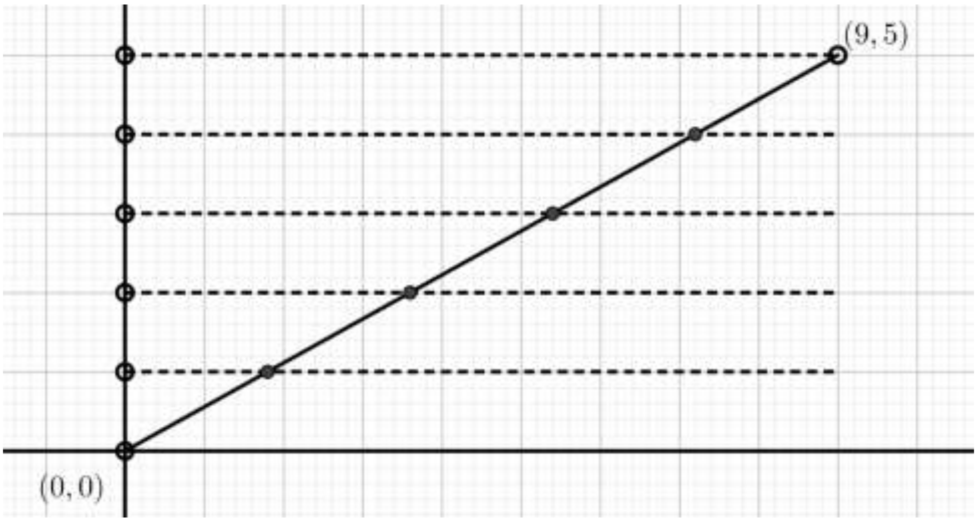
Solución: Notar que los puntos sobre una línea recta vertical tienen todos ellos el mismo valor en su primera coordenada. Así mismo, los puntos sobre una línea recta horizontal tienen todos ellos el mismo valor en su segunda coordenada. En consecuencia, las coordenadas del punto *P* son *(c,b)*.

Problema 2. ¿Cuántos puntos en el segmento *(0,0)*, *(9,5)* tiene al menos una de sus coordenadas enteras?

Solución: Los diez puntos marcados en el segmento de la siguiente figura, tienen su primera coordenada igual a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Los puntos restantes del segmento no tienen la primera coordenada con un valor entero.

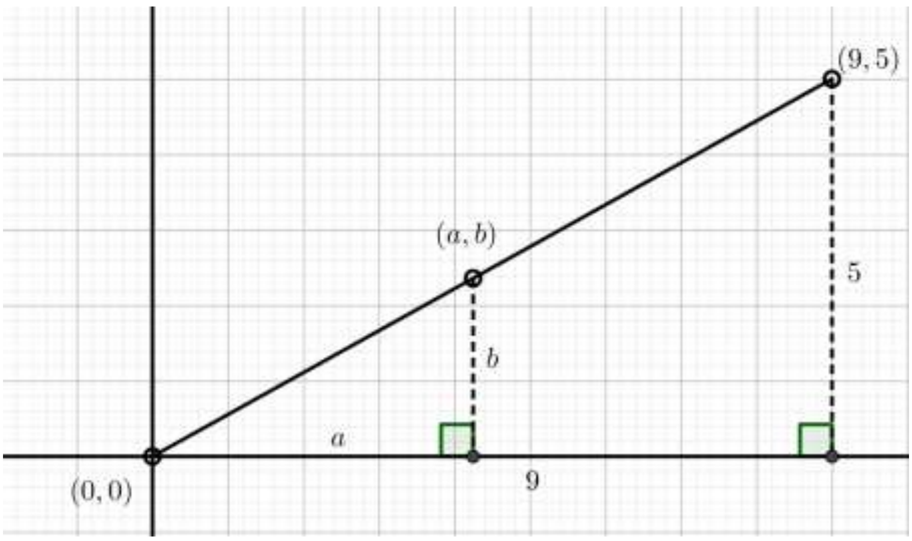


Del mismo modo, vemos en la figura que sigue, que sólo los puntos marcados en el segmento tienen la segunda coordenada con valor entero.



Salvo los extremos del segmento, los puntos marcados sobre el segmento tienen sólo una de sus coordenadas con valores enteros. En consecuencia hay *14* puntos con al menos una de sus coordenadas con valor entero.

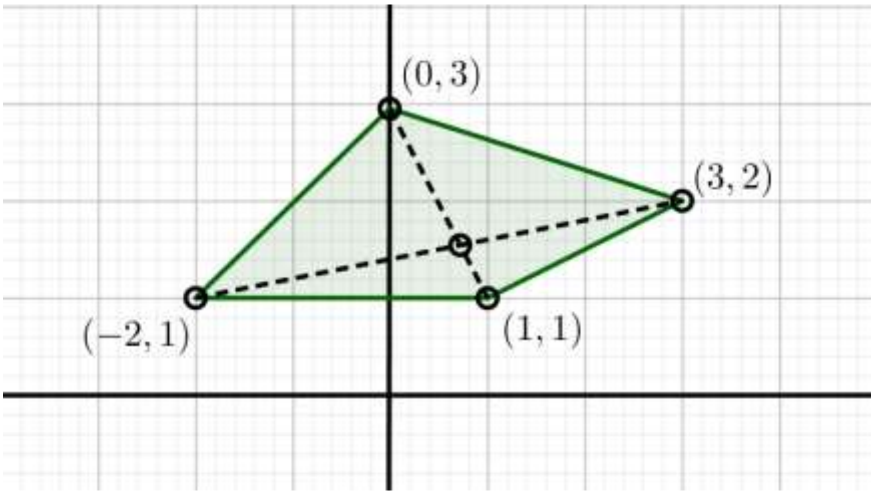
Para justificar que sólo los extremos del segmento son puntos con sus dos coordenadas enteras, notemos que pueden formarse dos triángulos rectángulos semejantes como muestra la siguiente figura:



De la semejanza resulta $\frac{a}{b}=\frac{9}{5}$, debiendo ser $a<9$ y $b<5$, pero la fracción $\frac{9}{5}$ es irreducible, es decir que no se puede representar con números enteros $a<9$ y $b<5$.

Problema 3. Hallar las coordenadas del punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero cuyos sucesivos vértices son los puntos de coordenadas *(1,1), (3,2), (0,3), (-2,1)*.

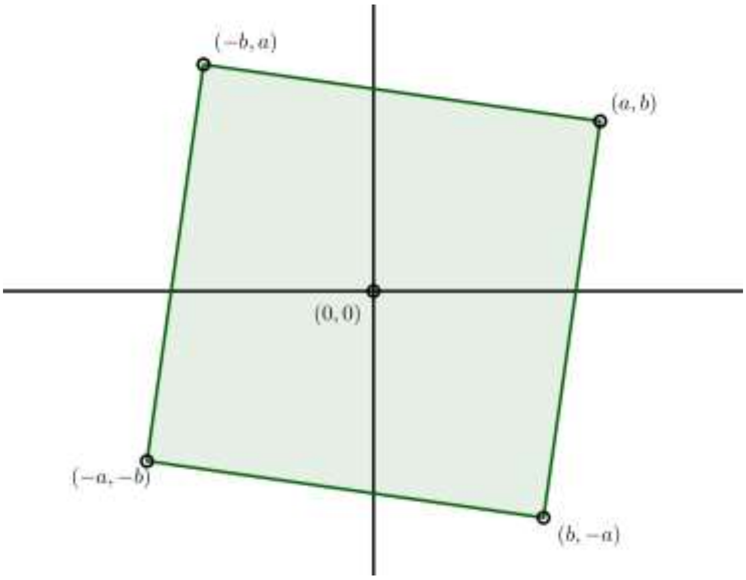
Solución: Ver el Problema 20 de la Nota 6.



Problema 4. ¿Qué clase de cuadrilátero es el que tiene por vértices los puntos *(100,210),*

(-210,100), (-100,-210) y *(210,-100)*?

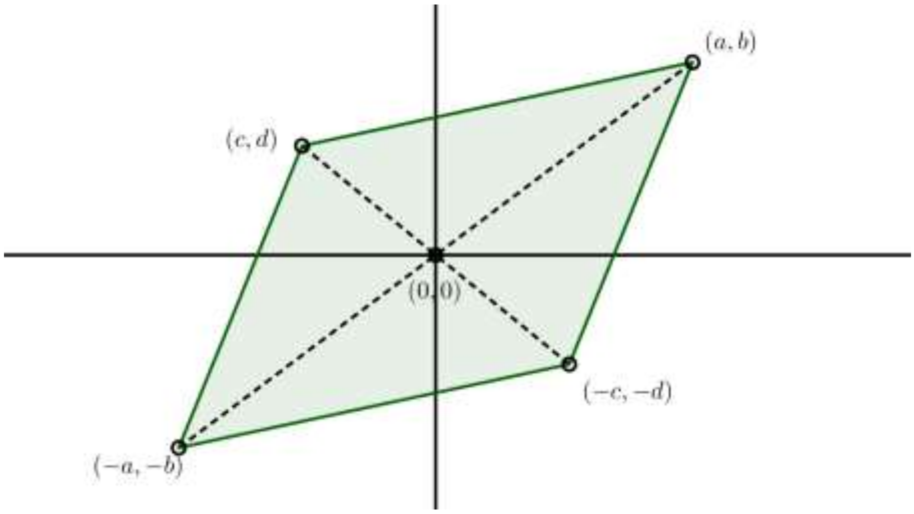
Solución: Un cuadrado. Usando el Problema 21 de la Nota 6, vemos cómo son las coordenadas de un punto *(a,b)* luego de rotarlo sucesivamente 90° en sentido antihorario.



Problema 5. ¿Qué clase de cuadrilátero es el que tiene por vértices los puntos *(100,210),(-21,10),*

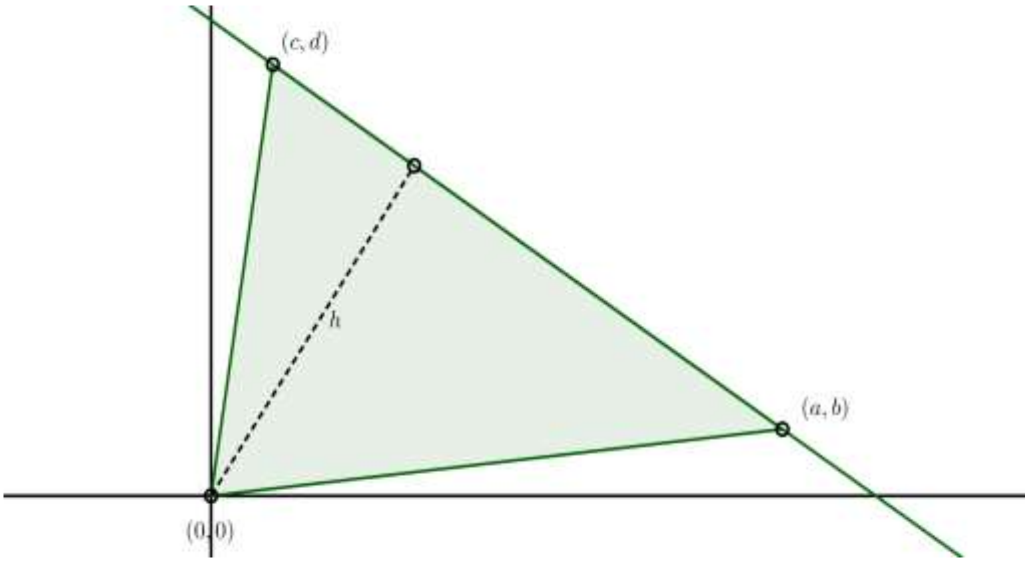
(-100,-210) y *(21,-10)*?

Solución: Un paralelogramo. Si los vértices opuestos son simétricos respecto del origen de coordenadas, entonces las diagonales se cortan en sus puntos medios, es decir, en el origen de coordenadas.



Problema 6. ¿La recta que pasa por los puntos *(-9,20)* y *(20,-8)* corta a la circunferencia con centro en *(0,0)* y radio *8*?

Solución: Para que una circunferencia de radio *r*, con centro en el origen, corte a la recta que pasa por los puntos *(a,b)* y *(c,d)*, es necesario y suficiente que *r* sea mayor que la altura *h* del triángulo de vértices *(0,0), (a,b), (c,d)*, tal como se indica en la figura a continuación.



Según el Problema 10 de la Nota 6, el área del triángulo *(0,0),(20,-8),(-9,20)* puede calcularse como:

$$\frac{1}{2}\det\begin{bmatrix} 20 & -8 \\ -9 & 20 \end{bmatrix} = 164$$

El lado del triángulo que une *(20,-8)* con *(-9,20)* mide:

$$\sqrt{\left(20-(-9)\right)^2+\left(-8-20\right)^2}=\sqrt{1625}$$

La altura correspondiente a este lado será:

$$\frac{2\times 164}{\sqrt{1625}}$$

Para que la circunferencia corte a la recta, este número debe ser menor que 8, pero eso no ocurre.

Problema 7. La recta *l* pasa por *(1,3)* y *(7,2)* y la recta *m* por *(15,-3)* y *(9,-1)*. ¿Son rectas paralelas?

Solución: La resta *l* es paralela al vector $(1,3)-(7,2)=(-6,1)$. La recta m es paralela al vector $(15,-3)-(9,-1)=(6,-2)$. Claramente los vectores $(-6,1)\,y\,(6,-2)$ no son proporcionales. Luego, las rectas no son paralelas.

Problema 8. Hallar el área del triángulo con vértices en (*100,75) (81,32) (0,0)*. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras hay en este triángulo?

Solución: El área puede calcularse como:

$$\frac{\left|\det\begin{bmatrix}100 & 75\\ 81 & 32\end{bmatrix}\right|}{2}=1437,5$$

Calculamos los puntos de coordenadas enteras que hay en el borde o contorno del triángulo siguiendo el procedimiento dado en el Problema 36 de la Nota 6.

En el interior del lado de vértices *(0,0)* y *(100,75)* hay dos puntos de coordenadas enteras que son *(20,15)* y *(4,3)*. En el interior del lado de vértices *(100,75)* y *(81,32)*, hay tantos puntos de coordenadas enteras como en el interior del segmento de vértices *(0,0) (19,43)*, pero en el interior de este segmento no hay puntos de coordenadas enteras.

Finalmente, en el interior del lado de vértices *(0,0)* y *(81,32)* no hay puntos de coordenadas enteras.

Se tiene entonces *5* puntos de coordenadas enteras en el borde del triángulo. Denotando con *I* el número de puntos en el interior del triángulo, por la fórmula de Pick dad en el apéndice de la Nota 6, el área del mismo es:

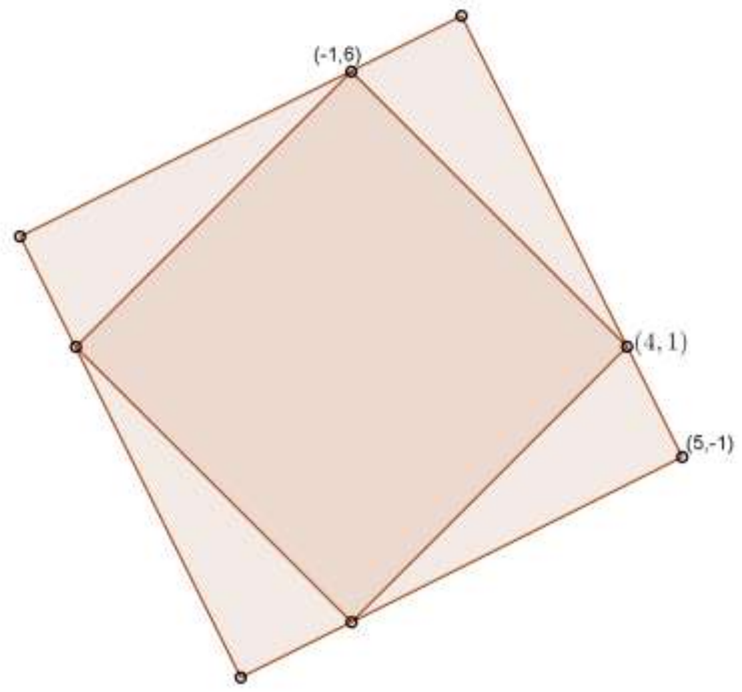
$$I+\frac{5}{2}-1=1437,5$$

En el interior del triángulo hay *1436* puntos de coordenadas enteras, de modo que hay *1441* puntos de coordenadas enteras en el triángulo.

Problema 9. Hallar el área del triángulo cuyos vértices son *(1,-2,0), (1,1,3)* y *(3,4,1)*.

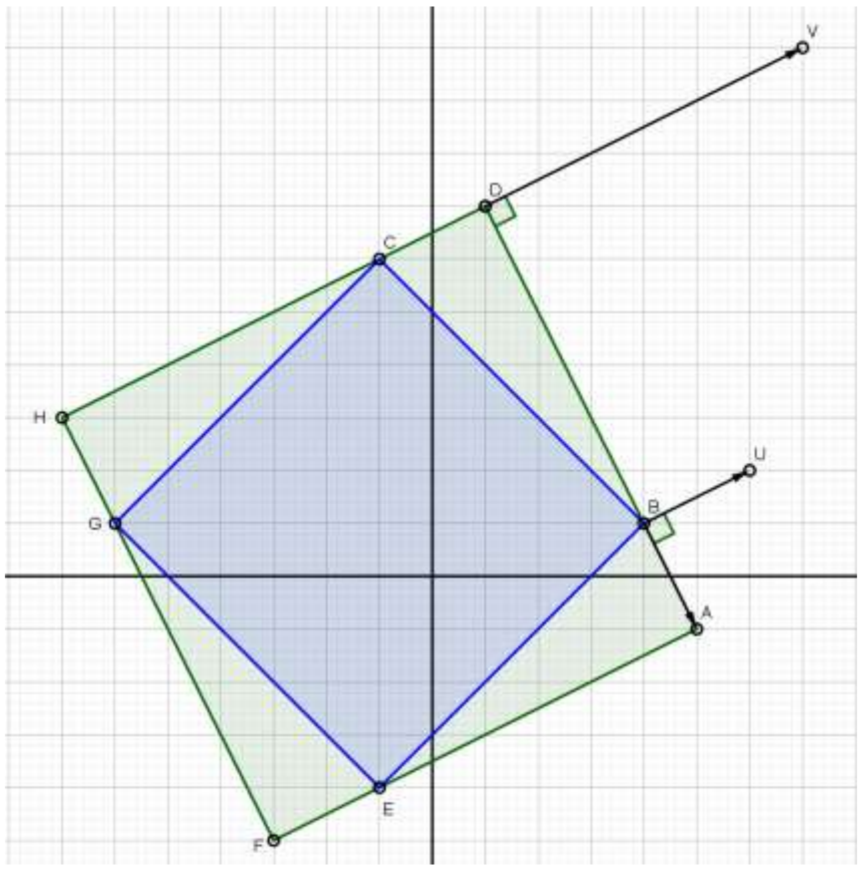
Solución: Los lados del triángulo miden $\sqrt{18}$, $\sqrt{17}$ y $\sqrt{41}$. Usando la fórmula de Herón, se puede obtener el área igual a $\frac{3\sqrt{33}}{2}$.

Problema 10. En la figura hay dos cuadrados, uno de ellos está inscripto en el otro. Puede observarse las coordenadas de tres vértices.



Hallar las coordenadas de los restantes vértices de los cuadrados.

Solución: Graficando en la cuadrícula veremos cómo obtener las coordenadas de todos los vértices.



El punto auxiliar *U* se obtiene rotando *A* 90° alrededor de *B* en sentido antihorario. El vértice *D* se obtiene como *C+U-B*. El punto *V* se obtiene rotando *B* 90° alrededor de *D* en sentido antihorario. El vértice *E* se obtiene como *A+D-V*. El vértice *F* se obtiene como *E+B-U,* el vértice *G* se obtiene como *F+D-B* y el vértice H se obtiene como *G+B-A*.

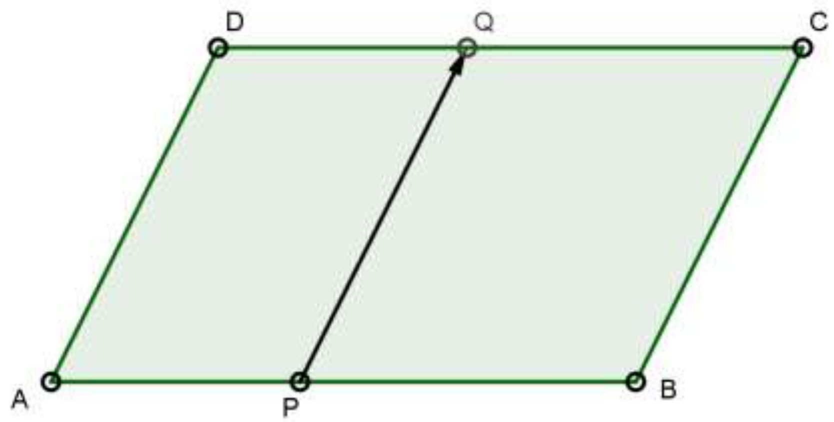
Resulta D = (1,7), E=(-1,-4), F=(-3,-5), G=(-6,1) y H=(-7,3).

Problema 11. De ser posible, construir un cuadrado cuyos vértices tengan coordenadas enteras y que en el contorno del mismo haya exactamente:

1. 12 puntos de coordenadas enteras.
2. 14 puntos de coordenadas enteras.
3. 19 puntos de coordenadas enteras.

Solución: Notemos primero que si un paralelogramo tiene sus vértices con coordenadas enteras, entonces en cada lado del paralelogramo hay la misma cantidad de puntos con coordenadas enteras que en el lado opuesto al mismo.

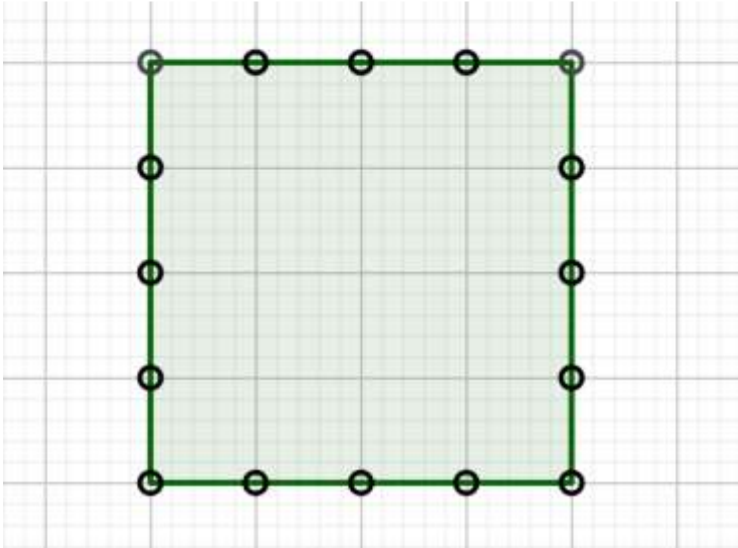
Si *ABCD* son los sucesivos vértices de un tal paralelogramo, cada punto *Q* en el lado *CD* pueden obtenerse como *P+D-A* donde *P* es un ponto en el lado *AB*.



Es claro que si *P* tiene coordenadas enteras, *Q* también y recíprocamente. Se concluye que en el borde de un paralelogramo con vértices en la cuadrícula entera hay un número par de puntos de la cuadrícula. Esto dice que el punto 3 del problema no es posible.

Si además *ABCD* es un cuadrado, cada punto *Q* del lado *AD* puede ser obtenido girando *90°* alrededor de *A* un punto *P* del lado *AB*. De esto surge que el número de puntos de la cuadrícula en el borde del cuadrado es múltiplo de *4*. Esto dice que el punto 2 del problema no es posible.

Finalmente, el punto 1 del problema es posible, como lo muestra la figura a continuación.



Problema 12. Un cuadrado tiene sus vértices de coordenadas enteras y en el contorno hay exactamente *24* puntos de coordenadas enteras. ¿El centro del cuadrado, tiene coordenadas enteras?

Solución: Del análisis del problema precedente, surge que en cada lado del cuadrado, hay *7* puntos con coordenadas enteras.

Problema 13. Hallar la ecuación del plano bisector del segmento de vértices *(1,2,0)* y *(1,1,1)*.

Solución: Este plano se forma con los puntos (x,y, z) que equidistan de los vértices del segmento, es decir:

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2$$

O bien, operando:

$$y-z=1$$

Problema 14. Usando como vértices los puntos del espacio cuyas coordenadas toman los valores *1* ó *-1*, construir dos tetraedros regulares.

Solución: Los puntos que tienen un número par de coordenadas positivas, equidistan entre si.

$$(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$$

Estos son los vértices de un tetraedro.

Solución: Los puntos que tienen un número impar de coordenadas positivas, equidistan entre si.

$$(-1,-1,-1),(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)$$

Estos son los vértices de otro tetraedro.

Problema 15. Las coordenadas de cuatro vértices de un cubo son *(1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,-1)* y

(-1,1,-1), hallar las coordenadas de los cuatro vértices restantes.

Solución: Estos puntos son los vértices de uno tetraedros regulares dados en el problema precedente, el Problema 14. El cubo es necesariamente el cubo circunscripto, que se obtiene trasladando cada arista con el vector que lleva el punto medio de la misma al punto medio de la arista opuesta.

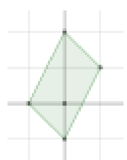
Los vértices restantes son:

$$\begin{aligned}
(1,1,-1) &= (1,1,1) + (0,0,-2) \\
(-1,-1,-1) &= (-1,-1,1) + (0,0,-2) \\
(1,-1,1) &= (1,-1,-1) + (0,0,2) \\
(-1,1,1) &= (-1,1,-1) + (0,0,2)
\end{aligned}$$

Problema 16: Hallar el volumen de la pirámide cuyos vértices tienen coordenadas:

(1,1,0), (0,2,0), (-1,0, 0), (0,-1,0), (1,2,1)

Solución: La base de la pirámide tiene por vértices a los cuatro puntos que están en el plano z = 0.



El área de la base en 3 y la altura es 1, ya que (1,2,1) está a distancia 1 del plano $z = 0$. De modo que el volumen de la pirámide es 1.