Problemas propuestos

1. Hallar la altura del tetraedro que tiene por vértices a los puntos de coordenadas (1,1,1), (-1,-1,1), (1,-1,-1) y (-1,1,-1).

Solución: Puede observase que la distancia entre cada par de vértices es la misma, por lo que se trata de un tetraedro regular. El valor común de las alturas del tetraedro se obtendrá como la distancia desde el vértice (1,1,1) al plano π que pasa por los puntos (-1,-1,1), (1,-1,-1) y (-1,1,-1). Es claro que la ecuación de π es:

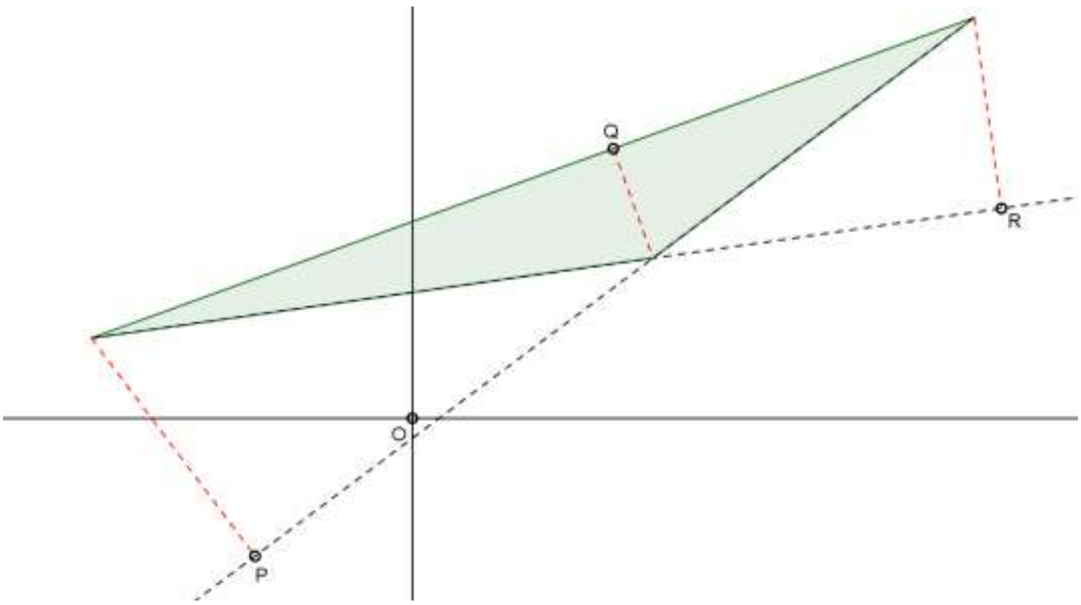
$$x+y+\mathrm{z}=-1$$

Usando la fórmula dada en la página 61, en el apéndice de la Nota 7 la distancia estará dada por:

$$\frac{|1\times1+1\times1+1\times1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

2. Hallar el pie de cada altura del triángulo en el plano cuyos vértices están dados por los puntos de coordenadas (3, 2), (–4, 1), (7, 5).

Solución: Usamos la fórmula de la proyección ortogonal dada en el de la Nota 7, página 58.



Resulta:

$$P=\left(-\frac{49}{25},-\frac{43}{25}\right),\ Q=\left(\frac{343}{137},\frac{461}{137}\right),\ R=\left(\frac{367}{50},\frac{131}{50}\right)$$

3. Hallar el pie de una altura del triángulo en el espacio cuyos vértices están dados por los puntos de coordenadas (2, 1, 2), (–3, -1, 1), (0, 2, 3).

Solución: Usamos la fórmula de la proyección ortogonal dada en el de la Nota 7, página 58. El pie de la altura tomada desde el vértice (2,1,2) es $\left(\frac{3}{22},\frac{47}{22},\frac{34}{11}\right)$.

4. Hallar las coordenadas del circuncentro del triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (9, 2), (8, 5) y (-3, 8).

Solución: Veamos primero la ecuación de la mediatriz de un segmento con vértices *(a,b)* y *(c,d).*
La condición que el punto *(x,y)* esté en dicha mediatriz, equivale a que se cumpla la igualdad:\

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(x-c)^2+(y-d)^2$$

Operando se obtiene:

$$(c-a)x+(d-b)y=\frac{\left(c^2+d^2\right)-\left(a^2+b^2\right)}{2}$$

Notemos que esta ecuación también puede ser escrita usando el producto escalar. En efecto, si notamos $u=(a,b), v=(c,d)\ y\ w=(x,y)$, la ecuación precedente equivale a:

$$\langle v-u,w\rangle=\frac{\langle v,v\rangle-\langle u,u\rangle}{2}$$

El punto de intersección de dos de las mediatrices, de lados del triángulo, será el incentro.
Las ecuaciones de las respectivas mediatrices de los lados (9,2)(8,5) y (8,5)(-3,8) son:

$$\begin{aligned}-.x+3y&=2\\11x-3y&=8\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema se obtiene que el incentro es el punto *(*1,1).

5. Hallar las coordenadas del ortocentro del triángulo del Problema 4.

Solución: Usaremos la propiedad enunciada en la solución del Problema 22 de la Nota 7, en la página 13. Teniendo en cuenta que el baricentro del triángulo es el promedio de los vértices, es decir $\left(\frac{14}{3},5\right)$, el ortocentro puede obtenerse como:

$$-\frac{1}{2}\left((1,1)-\left(\frac{14}{3},5\right)\right)+\left(\frac{14}{3},5\right)=\left(\frac{13}{2},7\right)$$

6. Hallar un pie de altura del tetraedro cuyos vértices son:

(1, 1, 1), (–1, –1, 1), (1, –1, –1), (–1, 1, –1)

Solución: En un tetraedro regular, el pie de una altura coincide con el baricentro de la cara correspondiente. En este caso, veremos que el segmento que une el vértices (1,1,1) con el baricentro de la cara (–1, –1, 1)(1, –1, –1) (–1, 1, –1) es la altura que parte de (1,1,1).
Calculamos el baricentro como el promedio de los vértices:

$$-\frac{1}{3}(1,1,1)$$

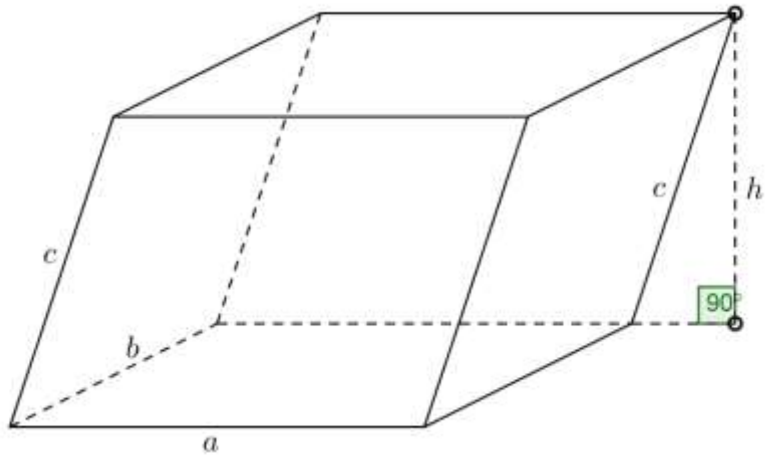
Para ver que el segmento que une (1,1,1) con $-\frac{1}{3}(1,1,1)$ es la correspondiente altura, hay que comprobar que dicho segmento es perpendicular a la cara. Trasladamos el tetraedro restando $-\frac{1}{3}(1,1,1)$ para establecer la perpendicularidad usando el producto escalar.

$$-\frac{4}{3}(1,1,1) \to -\frac{4}{3}(1,1,1)+\frac{1}{3}(1,1,1)=(0,0,0)$$
$$(1,1,1) \to (1,1,1)+\frac{1}{3}(1,1,1)=\frac{4}{3}(1,1,1)$$
$$(-1,-1,1) \to (-1,-1,1)+\frac{1}{3}(1,1,1)=\frac{2}{3}(-1,-1,2)$$
$$(1,-1,-1) \to (1,-1,-1)+\frac{1}{3}(1,1,1)=\frac{2}{3}(2,-1,-1)$$
$$(-1,1,-1) \to (-1,1,-1)+\frac{1}{3}(1,1,1)=\frac{2}{3}(-1,2,-1)$$

En la columna a la derecha, el producto escalar entre el vector $\frac{4}{3}(1,1,1)$ y los restantes da cero, esto significa que el segmento de vértices $\frac{4}{3}(1,1,1)$ y (0,0,0) es perpendicular al plano que pasa por los vértices $\frac{2}{3}(-1,-1,2), \frac{2}{3}(2,-1,-1), \frac{2}{3}(-1,2,-1)$ y, consecuentemente, el segmento de vértices (1,1,1) y $-\frac{1}{3}(1,1,1)$ es perpendicular al plano que pasa por los vértices (–1, –1, 1), (1, –1, –1), (–1, 1, –1).

7. Las aristas de un paralelepípedo miden *6 cm*, *9 cm* y *11 cm*.
   i) ¿Puede tener un volumen de *600 cm*^{3}?
   ii) Si su volumen es *594 cm*^{3}, hallar el área de cada cara del paralelepípedo.

Solución: El volumen de un paralelepípedo es menor o igual que el producto de las longitudes de tres de sus aristas concurrentes.



En la figura *a*, *b* y *c* indican las longitudes de las aristas del paralelepípedo. El volumen del paralelepípedo es área de la base por la altura *h*. El área de la base es menor o igual que *ab*, la altura *h* en menor o igual que *c*, luego el volumen es menor o igual que *abc*. Para valga la igualdad, las caras del paralelepípedo deben ser rectangulares.

En el problema, el volumen menor o igual que $6 \times 9 \times 11 = 594$.
La respuesta para *i)* es no. Para *ii)*, las caras deben ser rectangulares y, en tal caso, las áreas de sus caras son $54cm^2$, $66cm^2$ y $99cm^2$.

8. Hallar el volumen del paralelepípedo generado por (1, 2, 3), (2, –1, 2) y el producto vectorial
(1, 2, 3) × (2, –1, 2).

Solución: El área del paralelogramo generado por (1, 2, 3) y (2, –1, 2) es el módulo del producto vectorial (1, 2, 3) × (2, –1, 2) (ver comentario en la página 53 del de la Nota 7).
Por las propiedades del producto vectorial indicadas en la página 52 del de la Nota 7, el vector (1, 2, 3) × (2, –1, 2) es perpendicular al paralelogramo generado por (1, 2, 3) y (2, –1, 2), en consecuencia el volumen del paralelepípedo es el módulo del producto vectorial al cuadrado, esto es:

$$\left|(1,2,3)\times(2,-1,2)\right|^2 = \left|(7,4,-5)\right|^2 = 90$$

9. Hallar el pie de la altura de la pirámide cuyos vértices son los puntos de coordenadas (1, 1, 0),
(1, –1, 0), (–1, –1, 0), (–1, 1, 0), (7, 5, –9).

Solución: Los cuatro puntos al comienzo de la lista, son los sucesivos vértices de un paralelogramo, puesto que pueden ponerse en la forma *u,v,-u,-v* donde *u* y *v* son dos vectores no alineados. De modo que la pirámide tiene por base a dicho paralelogramo en el plano que pasa por (0,0,0), (1,1,0) y (1,-1,0).
Usamos la fórmula de proyección ortogonal dada en la página 59 del Apéndice de la Nota 7 para calcular el pie de la altura de esta pirámide:

$$(7,5,-9) - \frac{18}{4}(0,0-2) = (7,5,0)$$

Nota: *Es claro que, en este caso, la base de la pirámide se encuentra en el plano de ecuación z = 0. La proyección ortogonal sobre este plano transforma (x,y, z) en (x,y,0), lo que puede apreciarse geométricamente.*

10. ¿Sobre qué cara apoyaría el tetraedro, cuyos vértices son los puntos de coordenadas
(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0) y (1, 0, 0), para que alcance la menor altura posible?

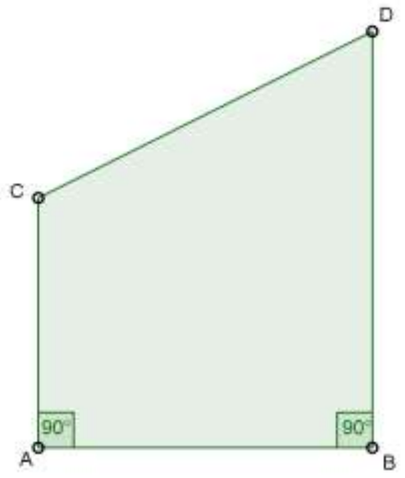
Solución: Naturalmente, sobre la cara de menor área. Enumeramos los puntos con 1,2,3,4 y usamos la fórmula de área dada en la página 54 del Apéndice de la Nota 7 para obtener los valores correspondientes:

$$123 \rightarrow \frac{1}{2}$$
$$124 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$134 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$234 \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es decir que se apoyaría sobre la cara con vértices (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0).

11. El segmento *AB* es la proyección del segmento *CD* sobre el plano π. ¿Cuándo ocurre que *AB* y *CD* tienen la misma longitud?

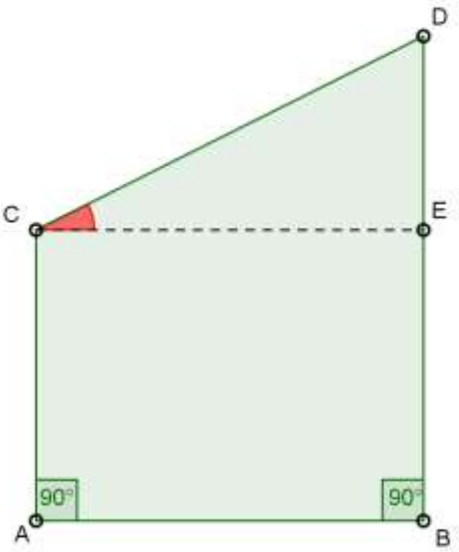
Solución: Las rectas *AC* y *BD* son paralelas, por ser ambas perpendiculares a π, también son perpendiculares al segmento *AB*, debido a que *AB* está en π.



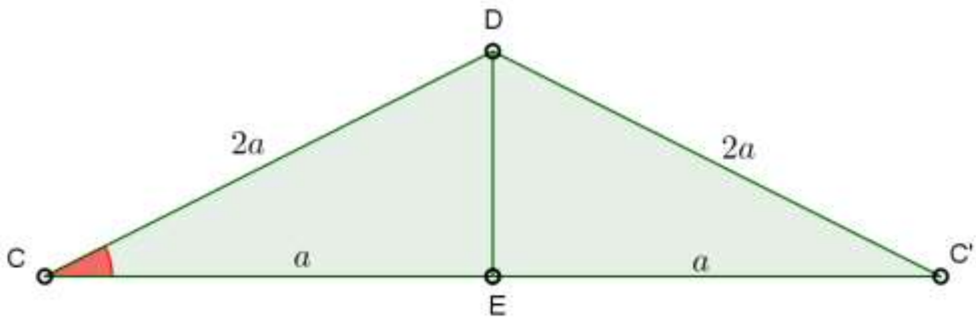
Es claro que la condición para que *AB* y *CD* tengan la misma longitud es que AB y CD sean paralelos.

12. ¿Qué ángulo debe haber entre un segmento y un plano para que la longitud de la proyección del segmento sobre el plano sea la mitad de la longitud del segmento?

Solución: El ángulo entre un segmento *AB* y un plano es el ángulo que forma el mismo con su proyección ortogonal *CD* sobre el plano.



En el triángulo rectángulo *CED* la longitud del cateto *CE* será la mitad de la longitud de la hipotenusa *CD*, sólo en el caso que el ángulo en el vértice *C* sea de *60º*. Para justificar esta última afirmación, observemos que si cumpliera la condición sobre las longitudes en el triángulo CED, simetrizando éste respecto de la recta *DE*, se puede formar un triángulo equilátero como muestra la figura:



donde *a* denota la longitud de *CE*.

13. Las proyecciones de un segmento sobre los planos coordenados tienen longitudes 3 cm, 4 cm y 5 cm. Hallar la longitud del segmento.

Solución: Supongamos que (a,b,c) y (d,e,f) son los extremos del segmento, entonces los extremos de las respectivas proyecciones son: (a,b,0),(d,e,o), (a,0,c),(d,0,f), (0,b,c),(0,e,f) y se verifica:

$$(d-a)^2+(e-b)^2=3^2$$
$$(d-a)^2+(f-c)^2=4^2$$
$$(e-b)^2+(f-c)^2=5^2$$

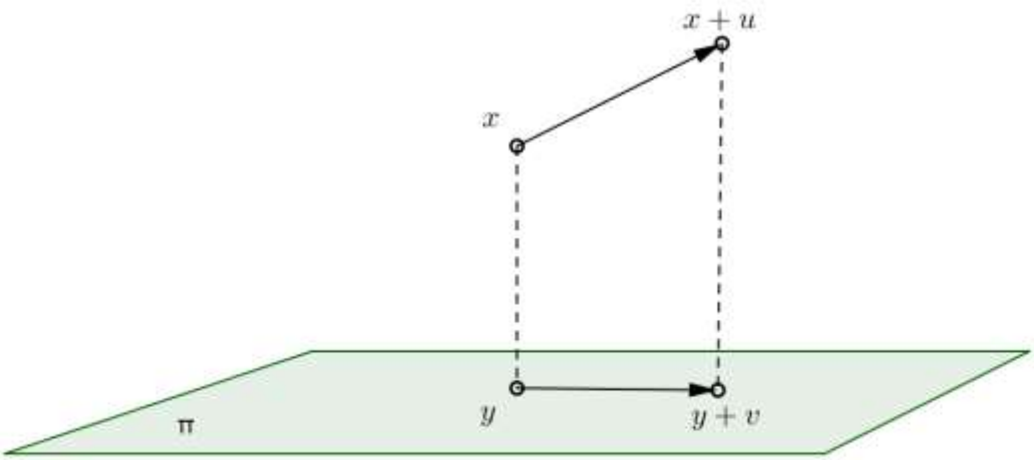
Sumando miembro a miembro las igualdades precedentes y operando, resulta:

$$(d-a)^2+(e-b)^2+(f-c)^2=25$$

De modo que la longitud del segmento es 5.

14. Las proyecciones ortogonales de un cuadrilátero en el espacio, sobre los planos coordenados, son figuras de áreas 3 cm², 4 cm² y 5 cm². Hallar el área del cuadrilátero.

Solución: Observemos que si un punto *x* se traslada sumándole un vector *u*, la proyección ortogonal de *x*+*u* sobre un plano π, puede obtenerse trasladando la proyección ortogonal *y* de *x* con un vector *v*, donde *v* es la diferencia entre las proyección de *u* y la proyección de *0* sobre el plano π.

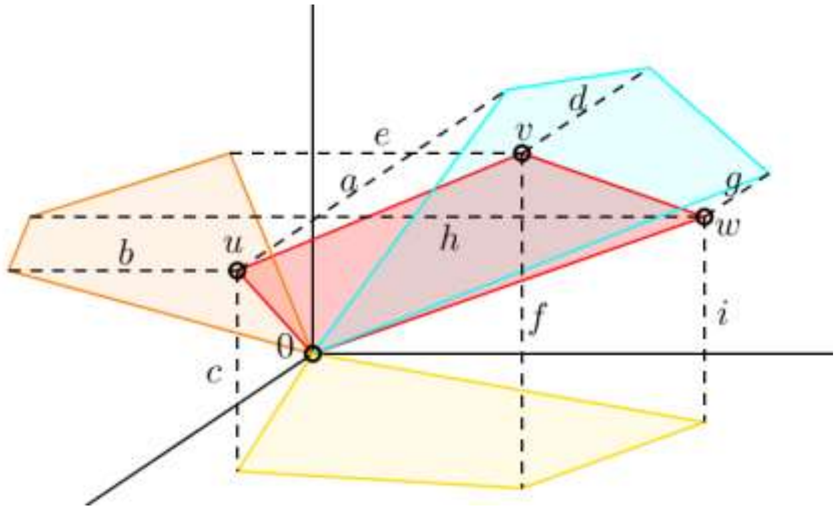


Vale decir que, si trasladamos una figura con un vector *u*, su proyección sobre el plano π se

trasladará con el vector *v*.
Podemos entonces, trasladar el cuadrilátero restándole el vector dado por uno de sus vértices, así, el cuadrilátero trasladado tendrá un vértice en el origen de coordenadas y las áreas de sus proyecciones sobre los planos coordenados serán los mismos valores del enunciado de este problema.
Asumiendo que los sucesivos vértices del cuadrilátero son los vectores *0, u, v, w,* podemos establecer el área de este cuadrilátero como:

$$\frac{|u\times v|+|v\times w|}{2}$$

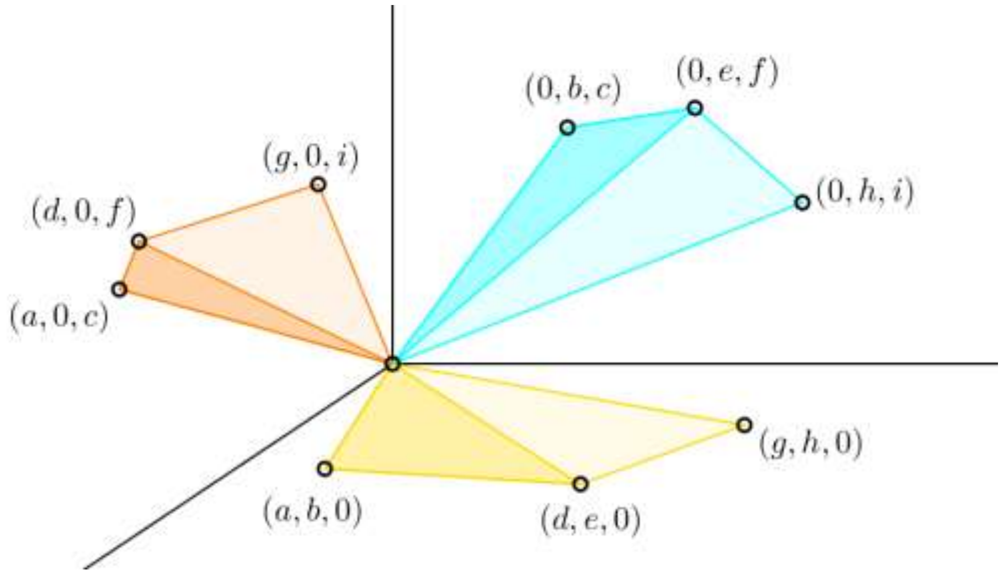
Ponemos: $u=(a,b,c),\ v=(d,e,f),\ w=(g,h,i).$



Escribimos:

$$u\times v=(bf-ec,cd-af,ae-bd)$$
$$v\times w=(ei-hf,fg-id,dh-ge)$$

Salvo, eventualmente, por el signo, las coordenadas de $u\times v$ son las respectivas áreas de los triángulos más sombreados que se indican en la figura a continuación.



Lo mismo ocurre con las coordenadas de $v \times w$ y las áreas de los triángulos menos sombreados.
Como $u \times v$ y $v \times w$ son perpendiculares al plano que contiene el cuadrilátero *0uvw*, deben ser vectores proporcionales, es decir que hay un número real λ tal que:

$$v \times w = \lambda \cdot (u \times v)$$

Esto significa que:

$$(ei - hf, fg - id, dh - ge) = \lambda \cdot (bf - ec, cd - af, ae - bd)$$

Según los datos del enunciado, salvo talvez el orden, sería:

$$3 = |ei - hf| + |bf - ec| = (|\lambda| + 1)|bf - ec|$$
$$4 = |fg - id| + |cd - af| = (|\lambda| + 1)|cd - af|$$
$$5 = |dh - ge| + |ae - bd| = (|\lambda| + 1)|ae - bd|$$

Si sumamos los cuadrados de los miembros en las igualdades precedentes, resulta:

$$50 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = (|\lambda| + 1)^2 \left(|u \times v|^2\right)$$

de modo que:

$$\sqrt{50} = (|\lambda| + 1) \cdot (|u \times v|) = |\lambda||u \times v| + |u \times v|$$

Teniendo en cuenta que $|v \times w| = |\lambda| \cdot |(u \times v)|$ se obtiene que el área pedida del cuadrilátero es $\sqrt{50} cm^2$.

Nota: Es posible establecer el siguiente resultado más general:

El área de un polígono en el espacio, es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las áreas de sus proyecciones sobre los planos coordenados.

15. Hallar la distancia entre el punto de coordenadas (4, 2, 1) y el plano de ecuación:

$$2x - y + 3z = 5$$

Solución: El plano de ecuación:

$$2x - y + 3z = 0$$

naturalmente, tiene intersección vacía con el plano del problema, luego éstos son planos paralelos.
La ecuación de este último plano, también puede expresarse usando el producto escalar:

$$\langle (2, -1, 3), (x, y, z) \rangle = 0$$

De manera que este plano está formado por todos los vectores perpendiculares al vector (2,-1,3). Se tiene que (2,-1,3) es perpendicular a ambos planos, dado que éstos son paralelos.
La recta perpendicular a estos planos que pasa por (4,2,1) puede representarse en su forma vectorial o paramétrica:

$$(4,2,1) + \lambda \cdot (2,-1,3) = (4 + 2\lambda, 2 - \lambda, 1 + 3\lambda)$$

donde λ toma valores en los números reales. Ahora podemos encontrar el valor de λ para el cuál esta recta corta al plano de ecuación:

$$2x - y + 3z = 5$$

reemplazando *x, y, z* por los correspondientes valores en los puntos de la recta:

$$2(4+2\lambda) - 2 + \lambda + 3(1+3\lambda) = 5$$
$$\lambda = -\frac{2}{7}$$

La distancia buscada es la distancia entre $(4,2,1)$ y $(4,2,1) - \frac{2}{7}(2,-1,3)$, es decir:

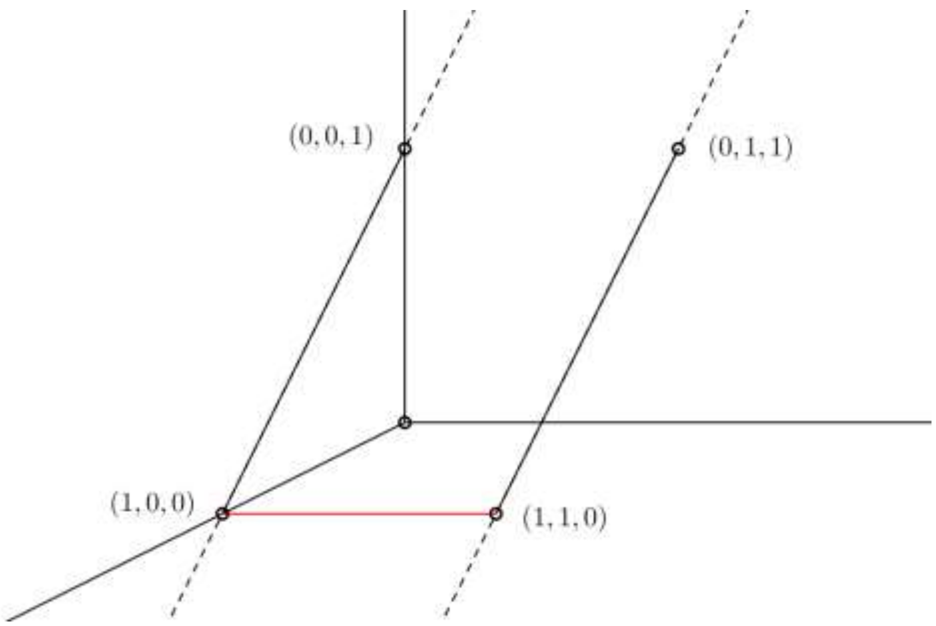
$$\left|\frac{2}{7}(2,-1,3)\right| = \frac{2}{7}\sqrt{14}$$

Nota: *Dados los vectores u y v y un número real b, es posible establecer que la distancia desde v al plano de ecuación* $\langle u, X\rangle = b$ *(donde X = (x, y, z)),está dada por la distancia entre v y su proyección ortogonal* $v + \frac{b - \langle u,v\rangle}{\langle u,u\rangle}u$*, esto es:*

$$\frac{|b - \langle u,v\rangle|}{|u|}$$

16. Hallar un punto *A* en la recta *m* y un punto *B* en la recta *n* tales que el segmento *AB* sea perpendicular a ambas rectas, sabiendo que *m* pasa por los puntos de coordenadas (2, 2, 1), (1, 2, 2) y *n* pasa por (1, 1, 2) y (2, 1, 1).

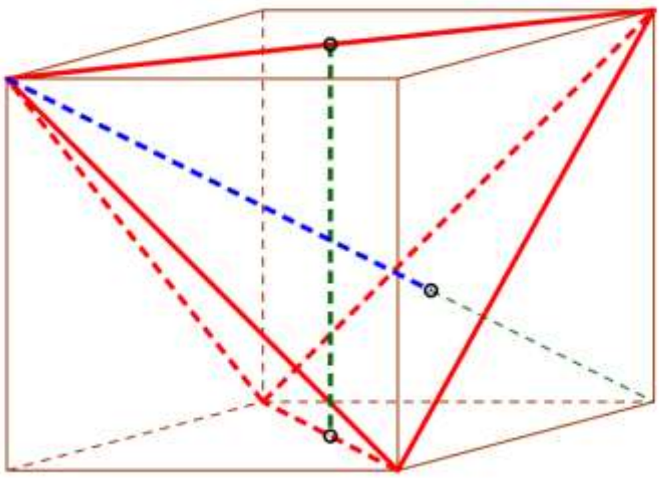
Solución: Si trasladamos las rectas restando (1,1,1), resulta evidente que las recta son paralelas.



El segmento de extremos (1,0,0) y (1,1,0) es perpendicular a ambas rectas, entonces una solución al problema es el segmento que une (2,1,1) con (2,2,1).

17. Hallar la distancia entre dos aristas opuestas de un tetraedro regular de 10 cm de arista. Hallar la altura del tetraedro.

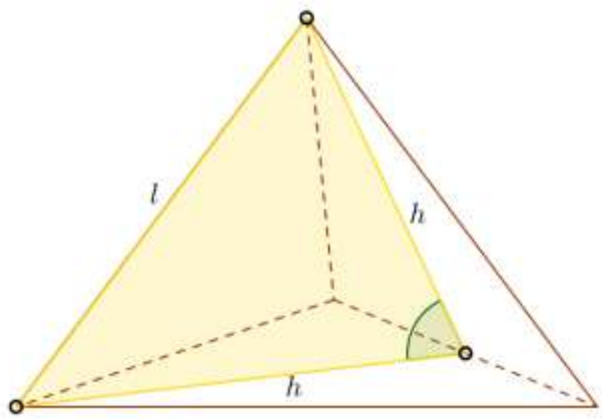
Solución: El cubo circunscripto al tetraedro tiene sus aritas de $\frac{10}{\sqrt{2}} cm$. La distancia entre las aristas opuestas del tetraedro es igual a la longitud de la arista de cubo y la altura del tetraedro igual a dos tercios de la diagonal interior del cubo. Ver el Problema 6 de este Apéndice.



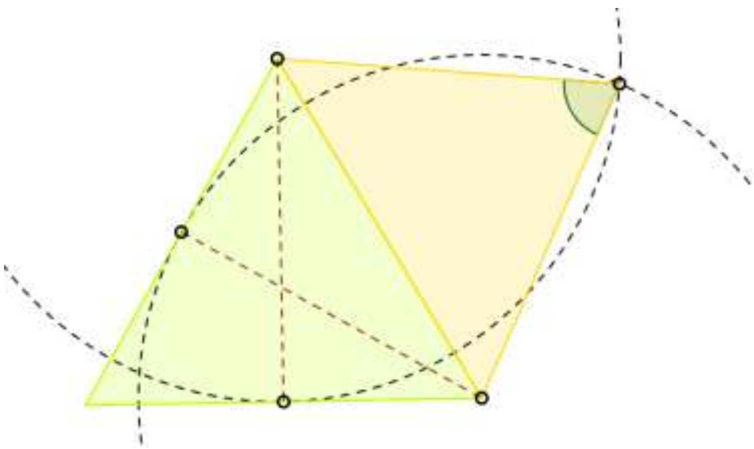
Entonces la distancia es buscada es $\frac{10}{\sqrt{2}} cm$ y la altura es $\frac{2}{3}\sqrt{3}\frac{10}{\sqrt{2}} cm = \frac{10\sqrt{6}}{3} cm$.

18. Usando regla y compás, dibujar el ángulo diedro entre dos caras de un tetraedro regular. Lo mismo para un octaedro.

Solución: El ángulo diedro está limitado por los segmentos que unen el punto medio de una arista con los vértices de la arista opuesta.



Para construir este ángulo, dibujamos un triángulo equilátero y trazamos dos alturas. Con centro en los vértices de estas alturas trazamos dos circunferencias de radio igual a la longitud de las alturas. La siguiente figura muestra un triángulo que tiene que tiene al ángulo diedro entre sus ángulos.



19. Hallar la ecuación paramétrica y las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por los puntos de coordenadas (1, 3, 5) y (–2, 0, –7).

Solución: Esta recta es paralele al vector $(1,3,5)-(-2,0-7)=(3,3,12)$, de modo que la ecuación paramétrica está dada por:

$$(1,3,5)+\lambda\cdot(3,3,12)=(3\lambda+1,3\lambda+3,12\lambda+5)$$

Para las ecuaciones implícitas usaremos la expresión dada en la página 55 del Apéndice de la Nota 7.
Las ecuaciones están dadas por:

$$\langle(3,3,12)\times(x+2,y,z+7)\rangle=3\cdot\langle(1,1,4)\times(x+2,y,z+7)\rangle=0$$

es decir:

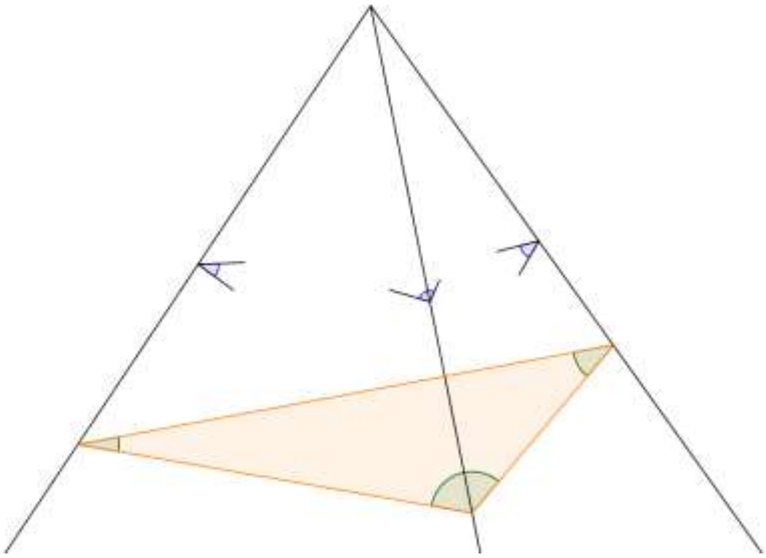
$$\begin{cases}-4y+z=-7\\ 4x-z=-1\\ -x+y=2\end{cases}$$

Podemos el sistema con las dos ecuaciones:

$$\begin{cases}4x-z=-1\\ -x+y=2\end{cases}$$

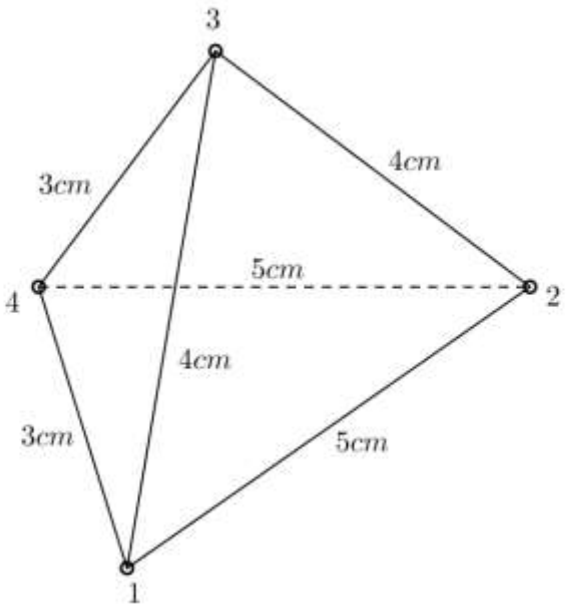
20. Mostrar que los ángulos diedros en un ángulo triedro suman más de 180° y menos de 540°.

Solución: Si seccionamos el triedro con un plano, se puede formar una sección triangular, como muestra las figura a continuación. Los ángulos diedros son mayores o iguales que los ángulos del triángulo en la sección. No puede darse la igualdad en los tres casos, pues eso conduce a que las aristas del triedro debieran ser perpendiculares al plano, luego las aristas serías paralelas entres sí. Por lo tanto, la suma de los diedros es mayor que 180º.
Por otra parte, cada diedro en menor que 180º, con esto, la suma es menor que 540º.



21. ¿Hay un tetraedro cuyas aristas midan 3 cm, 3 cm, 4 cm, 4 cm, 5 cm y 5 cm? Si encontró uno, ¿qué volumen tiene?

Solución: El siguiente tetraedro es posible, ver problema 31 de la Nota 4.



Para calcular el volumen, podemos usar la fórmula dex

$$\sqrt{\frac{1}{288}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5^2 & 4^2 & 3^2 \\ 1 & 5^2 & 0 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 4^2 & 4^2 & 0 & 3^2 \\ 1 & 3^2 & 5^2 & 3^2 & 0 \end{bmatrix}} = \sqrt{\frac{9358}{288}} \approx 5{,}7003$$

22. ¿Puede ser (–2, 2, 3) el producto vectorial de dos vectores de longitud 2?

Solución: El módulo del producto vectorial de dos vectores *u* y *v*, es el área del paralelogramo de vértices *0,u,u+v,v*, o sea el paralelogramo generado por *u* y *v* (ver página 53 del Apéndice de la Nota 7). El área de un paralelogramo es menor o igual que el producto de las dos longitudes de sus lados, y vale la igualdad sólo en el caso que sea un rectángulo. En consecuencia resulta:

$$|u \times v| \leq |u| \times |v|$$

Si dos vectores tienen longitud 2, producto vectorial entre ellos no puede tener longitud mayor que 4. Como la longitud de (-2,2,3) es $\sqrt{17}$, que es mayor que 4, éste no puede ser el producto vectorial de dos vectores de longitud 2.

23. Encontrar el punto simétrico de (1, 3, 5) respecto del plano de ecuación $x + y + z = 1$.

Solución: Podemos usar el procedimiento dado en la solución del Problema 15 de este Apéndice. Llamando $v = (1,3,5)$, $u = (1,1,1)$ y $b = 1$, proyección *v* sobre el plano está dada por:

$$v + \frac{b - \langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u = (1,2,3) - \frac{5}{3} \cdot (1,1,1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

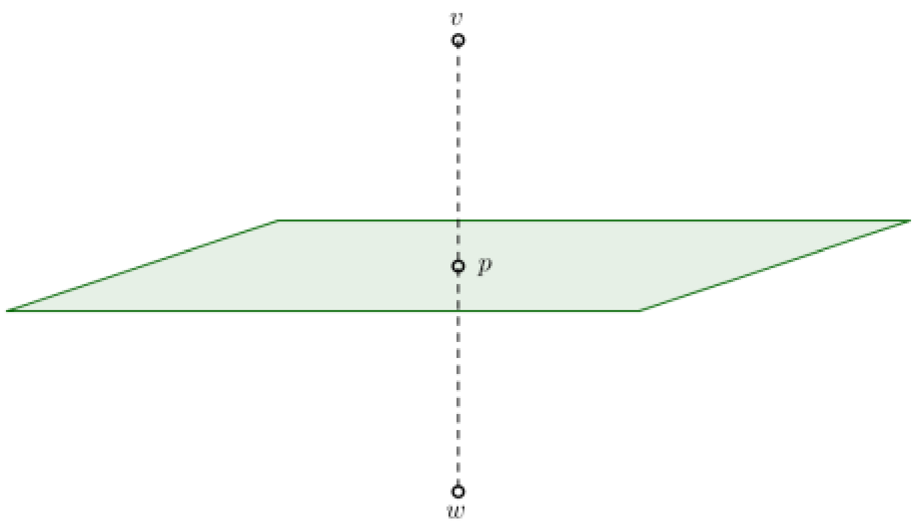
El punto simétrico de *v* respecto del plano coincide con el punto simétrico de *v* respecto de su proyección ortogonal sobre el plano, es decir:

$$2 \cdot \left(v + \frac{b - \langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u\right) - v = v + 2\frac{b - \langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

Obtenemos así la fórmula general de la reflexión o simetría respecto de un plano a partir de su ecuación implícita.
La solución al problema es:

$$(1,2,3) + 2 \cdot \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

La siguiente figura ilustra la situación, donde *p* es la proyección ortogonal de *v* y *w* el simétrico de *v* respecto del plano.



24. Los puntos de coordenadas (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 2, –1) son los baricentros de los triángulos *ABC*, *BCD*, *CDA* y *DAB*. Hallar las coordenadas de los vértices del cuadrilátero *ABCD*.

Solución: Podemos escribir los sucesivos baricentros como:

$$\frac{A+B+C}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{A+B+C+D}{4}-\frac{1}{3}\cdot D$$
$$\frac{A+B+D}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{A+B+C+D}{4}-\frac{1}{3}\cdot C$$
$$\frac{A+C+D}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{A+B+C+D}{4}-\frac{1}{3}\cdot B$$
$$\frac{B+C+D}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{A+B+C+D}{4}-\frac{1}{3}\cdot A$$

Notar que las expresiones precedentes indican que una homotecia con centro en $\frac{A+B+C+D}{4}$ y razón $-\frac{1}{3}$ transforma los vértices del cuadrilátero en los baricentros.
La suma de todos los baricentros es igual a:

$$A+B+\mathrm{C}+\mathrm{D}=(3,4,1)$$

Luego podemos calcular:

$$A=4\cdot(3,4,1)-(3,3,0)=(9,13,4)$$
$$B=4\cdot(3,4,1)-(3,0,3)=(9,16,1)$$
$$C=4\cdot(3,4,1)-(0,3,3)=(12,13,1)$$
$$D=4\cdot(3,4,1)-(3,6,-3)=(9,10,7)$$

25. ¿Cabe una esfera de radio 3 entre los planos paralelos cuyas ecuaciones son $x+y+\mathrm{z}=1$ y $x+y+\mathrm{z}=7$?

Solución: Evidentemente los planos son disjuntos, es decir son paralelos. La distancia entre estos planos es la distancia entre un punto de uno ellos al otro plano, por ejemplo la distancia desde $(1,0,0)$ al plano de ecuación $x+y+\mathrm{z}=7$.
Usando el procedimiento dado en la solución del Problema 15 de este Apéndice, esta distancia es:

$$\frac{7-1}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$$

Este número es menor que 6, el diámetro de la estera, vale decir que la esfera no cabe entre los planos.