TORNEOS DE LAS CUENCAS - TORNEO DE PRIMAVERA

2012

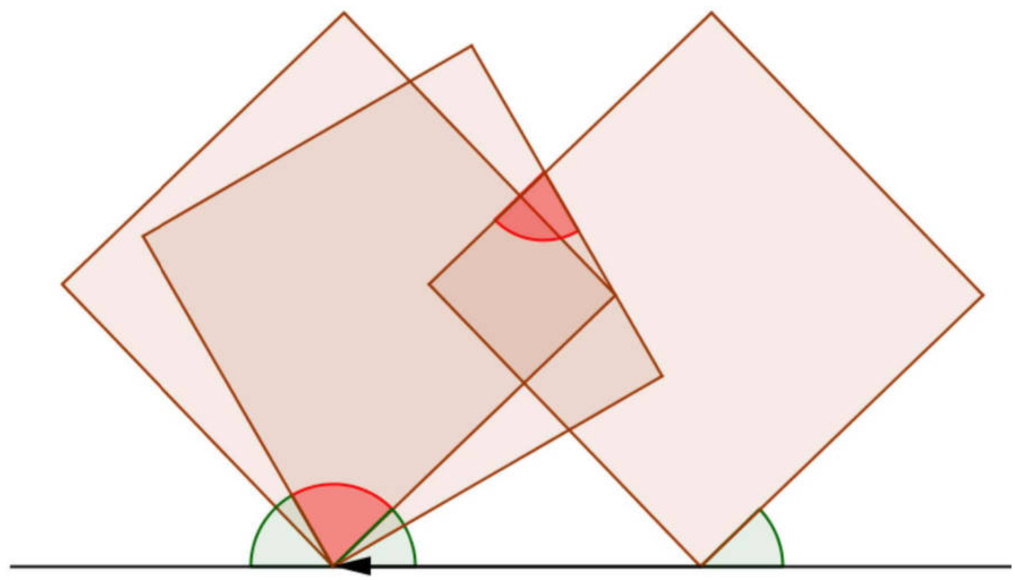
SOLUCIONES

PRIMER NIVEL (Primera Prueba)

Problema 1-Dado que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, en el triángulo de la figura el opuesto a la base mide 106º, ya que los de la base son 29º y 45º. En el cuadrilátero donde está el ángulo **a,** siendo la medida de los otros ángulos 90º, 106º y 90º, resulta **a**= 74º, dado que la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero mide360º.

Una visualización simple, siempre muy interesante en los problemas geométricos, que corrobora lo dicho es la siguiente:

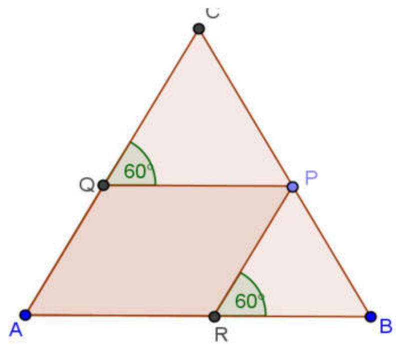
Si desplazamos el cuadrado de la derecha hasta hacer coincidir los vértices sobre la recta que los sustentan como se ve en la figura, se observa que los ángulos sombreados son iguales, pues los lados que los forman son correspondientemente paralelos



Por lo tanto el ángulo buscado es 180º - 61º - 45º = 74º.

"Mirar y Ver" como repetía el Dr. Miguel de Guzmán, que tantas veces nos honró con su presencia en los Seminarios de OMA.

Problema 2

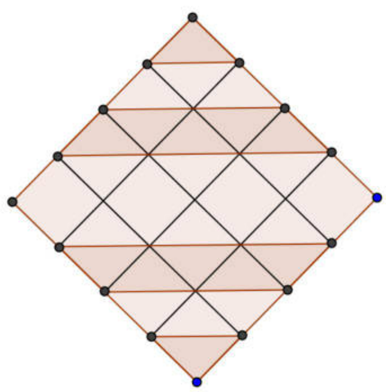


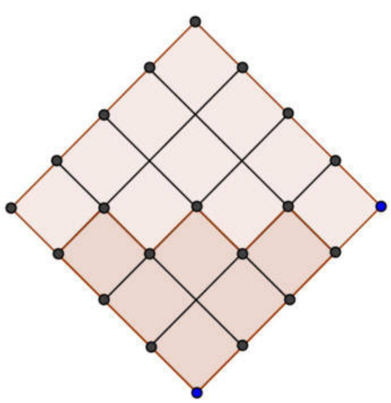
El triángulo ABC es equilátero, por lo tanto los ángulos en los vértices A, B y C miden 60º. Como QP es paralela a AR, el ángulo marcado en Q mide 60°. Del mismo modo, como RP es paralela a AQ, el ángulo marcado con Q también mide 60°.

En cada uno de los triángulos RBP y QPC, dos de sus ángulos miden 60º, luego son triángulos equiláteros. El perímetro del paralelogramo ARPQ puede calcularse como:

$$2\ (RP+ PQ) = 2\ (BP+ PC)$$

Como BP + PC es el valor del lado del triángulo, que es 4cm, pues el perímetro es 12cm, resulta que el perímetro del paralelogramo ARPQ es 8cm.





Problema 3 -Trazando paralelas a los lados del cuadrado por los puntos determinados al dividir cada lado en 4 partes iguales, el cuadrado resulta disecado en 16 cuadraditos ó 32 triángulos rectángulos, mitades de dichos cuadraditos. Si se cortaran y reordenaran estas piezas, puede formarse la figura, donde se advierte que las piezas de las franjas sombreadas se disponen en 6 de los cuadraditos, y dado que fueron pintadas con 3 litros de pintura, cada litro de pintura cubre 2 cuadraditos. Luego, son necesarios 8 litros de pintura para cubrir los 16 cuadraditos que forman el cuadrado original.

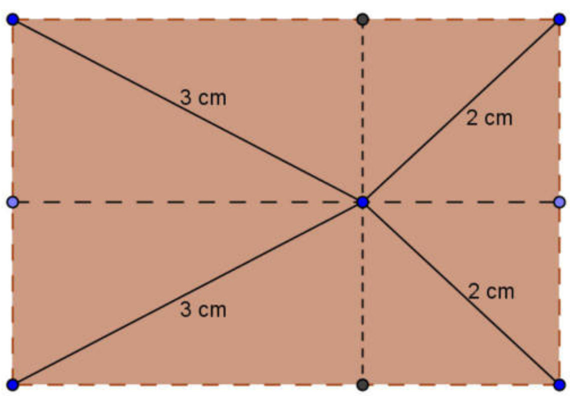
SEGUNDO NIVEL (Primera Prueba)

Problema 1-Si se divide la flecha en dos triángulos trazando la diagonal interior DB, se obtiene que la suma de los triángulos interiores de la flecha es 2x180º = 360º. Luego como el triángulo interior en D mide 360º -120º = 240º, resulta la suma de los ángulos A + B + C = 360º -240º =120º.

Problema 2-El área de un cuadrado formado con estos cerámicos es igual al área de un cerámico multiplicada por el número de cerámicos. Como el lado del cuadrado se forma con lados de los cerámicos, algunos de 4 cm y otros de 10 cm, su área es una cantidad entera de centímetros cuadrados. Así, el área es por una parte un múltiplo de 40 y por otra es un cuadrado perfecto. Buscando entre éstos el primero que sea múltiplo de 40, encontramos que es 400 = 20 x 20 = 40 x 10. Luego el mínimo número de cerámicos necesarios para armar un cuadrado es 10. Para facilitar la búsqueda, podemos expresar 40 = 2x2x2x5 y el menor múltiplo de 40 que es un cuadrado perfecto se obtiene multiplicando este número por 2 y por 5, para obtener

$40x10 = 4^2 x5^2$.

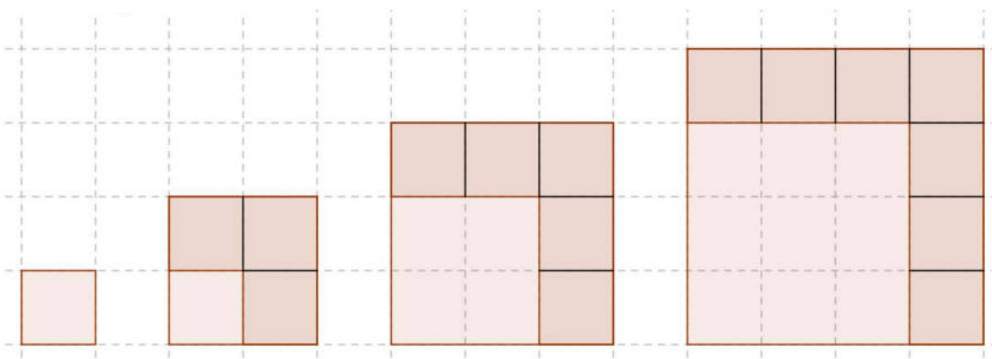
Problema 3-Trazando paralelas a los lados del rectángulo por el punto interior, se forman 4 rectángulos; dos de ellos comparten un lado y sus diagonales miden 2cm, es decir son iguales. Los otros dos comparten un lado entre sí y otro lado con los rectángulos iguales, de manera que éstos también son iguales y sus diagonales miden 3cm, que es la distancia pedida del punto al cuarto vértice.



TERCER NIVEL (Primera Prueba)

Problema 1-Los triángulos EFG y EBG tienen la misma base EG e igual altura, pues EG y AB son paralelas; luego tienen igual área. De modo que área EFGH= área EFG + área EGH= área EBG + área EGH Por las mismas razones, área EGH = EGC. Luego. área EFGH = área EBC Finalmente, por el mismo principio: área EBC = área DBC y como BD es diagonal de ABCD, resulta área EFGH = área DBC = 5cm^2

Problema 2-Para pasar de un piso cuadrado al inmediato superior, son necesarios un número impar de baldosas



Por ejemplo, para pasar del 1x1 al 2x2 son necesarias 3 baldosas, para pasar del 2x2 al 3x3 son necesarias 5 baldosas, etc Los sucesivos cuadrados pueden ser expresados como:

$$1=1$$
$$2^2=1+3$$
$$3^2=1+3+5$$
$$4^2=1+3+5+7$$
$$5^2=1+3+5+7+9$$

Como a Pedro le sobran 7 ó le faltan 10, hay 17 baldosas entre el cuadrado que Pedro puede hacer, donde le sobran 7 y el cuadrado que Pedro no puede hacer porque le faltan 10.

Estos cuadrados serán:

$$8^2=1+3+5+7+9+11+13+15$$
$$9^2=1+3+5+7+9+11+13+15+17$$

De donde resulta que Pedro tiene 71 baldosas, dado que 64 + 7 = 81 _ 10= 71.

También podemos pensar el problema como sigue: llamamos x al número de Baldosas que tiene Pedro y t^2 el número de baldosas que necesita para formar el cuadrado para el que le sobran 7, de modo que $x = t^2 +7$. Para el otro cuadrado precisa y^2 baldosas y le faltan 10, de modo que $x = y^2 -10$. Debemos resolver el sistema:

$$x - 7 = t^2$$

$$x + 10 = y^2$$

Y para ello restando de la segunda ecuación la primera, miembro a miembro, se tiene:

$$17 = t^2 - y^2 = (t - y).(t + y)$$

Como los únicos divisores de 17 son 1 y 17, resulta el sistema:

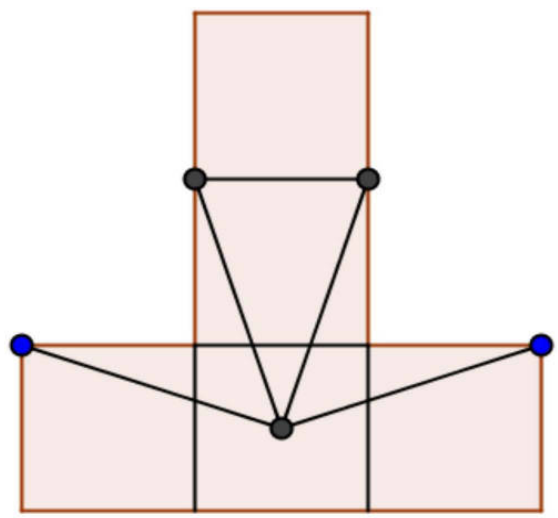
$$t - y = 1$$
$$t + y = 17$$

de donde sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, resulta $2t = 18$ es decir

$t = 8, y = 9$ y por consiguiente, $x = 64 + 7 = 71 = 81 - 10$

Pedro tiene 71 baldosas.

Problema 3-Si desarrollamos el cubo mostrando sólo las caras que contienen los 3 puntos H, G y O, se pueden tomar los caminos recorridos por segmentos, para obtener el camino más corto, como se muestra en la figura



Como las aristas del cubo miden 2, estos segmentos son hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos miden 3 y 1 (pues O es el centro del cuadrado ABFE), es decir los segmentos miden $\sqrt{10}$ y en consecuencia el menor recorrido será $2\sqrt{10}$. De los cuatro recorridos posibles de longitud $\sqrt{10}$, hay un único que camina sólo por 2 caras, como pide el problema.