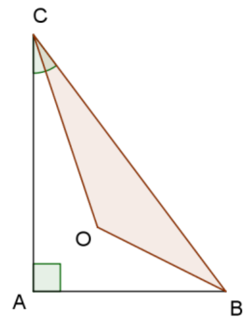
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Primera Ronda

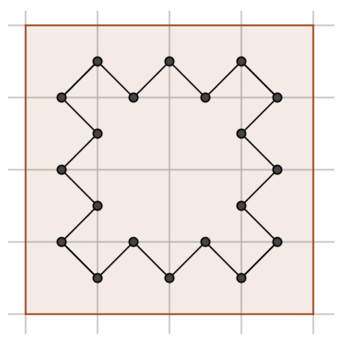
Primer Nivel - 5º Año de Escolaridad

1- En el triángulo rectángulo *ABC* cuyo ángulo en *C* mide *48º* se trazan la bisectrices de los ángulos *B* y *C*, que se cortan en *O*. Calcula la medida de los ángulos del triángulo *COB*.

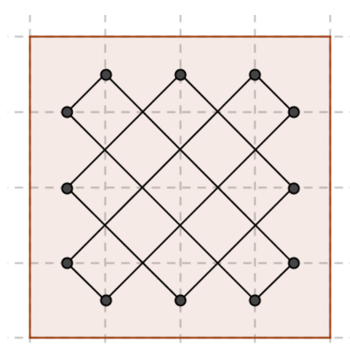


Solución: Como *ABC* es un triángulo rectángulo, recto en *A*, el valor del ángulo en *B* es *42º*. De este modo, los ángulos en *C* y *B* de *COB* miden *24º* y *21º* respectivamente. Se concluye que el valor del ángulo en *O* de *COB es 180º-24º-21º = 135º*.

2. En el cuadrado dividido en cuadraditos de *1cm* de lado, utilizando puntos medios de lados de cuadraditos, se trazó la poligonal indicada en la figura. Calcula el área de la región encerrada por esta poligonal.



Solución: La figura puede descomponerese en *13* cuadraditos de 0,5 cm² de área cada uno, como ilustra la siguiente figura:



Luego el área solicitada es 6,5 cm^2.

3. Para pintar un cubo *C* se usa una lata de pintura. ¿Cuántas latas de pintura se usarán para pintar un cubo cuya arista sea el doble de la arista de *C*?

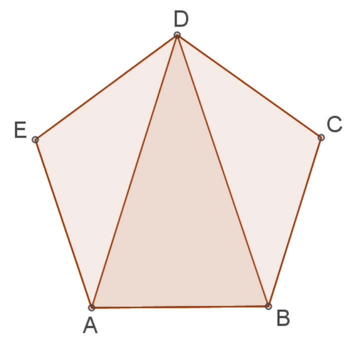
Solución: Cada cara del cubo, cuya arista sea el doble de la arista de *C*, se descompone en cuatro caras como las del cubo *C*.

De manera que la superficie a pintar es cuatro veces mayor que la de *C* y serán necesarias cuatro latas de pintura.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Primera Ronda

Segundo Nivel - 6º Año de Escolaridad

1. Un pentágono regular se descompone en tres triángulos como muestra la figura,

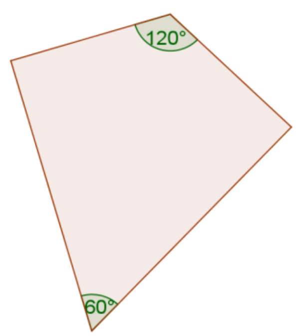


Halla los ángulos de estos triángulos.

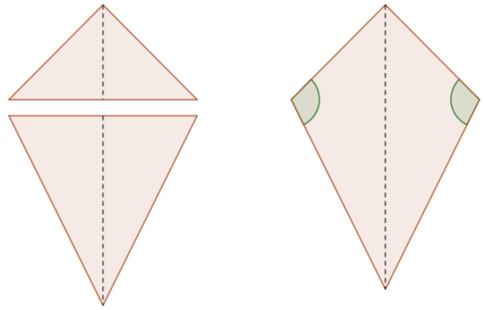
Solución: Los ángulos interiores de un pentágono suman *3×180º*, en consecuencia, cada ángulo interior en un pentágono regular mide *108º*. Los triángulos a la izquierda y a la derecha de la figura son isósceles e iguales, pues tienen dos lados y el ángulo comprendido iguales, sus ángulos miden *108º, 36º,36º*. El triángulo en el centro de la figura, también es isósceles y sus ángulos en *D*, *A* y *B* miden respectivamente:

108º-36º-36º = 36º, 108º-36º = 72º y *108º-36º = 72º*

2. Dado el romboide de la figura, decomponerlo en figuras que reacomodadas formen un triángulo equilátero.

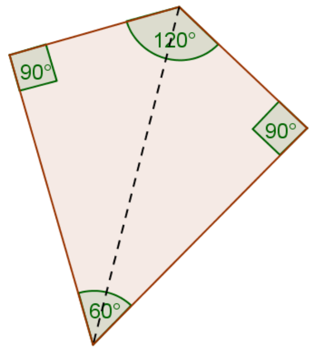


Solución: En principio notemos que un romboide se obtiene al unir por sus bases dos triángulos isósceles con bases de igual longitud.

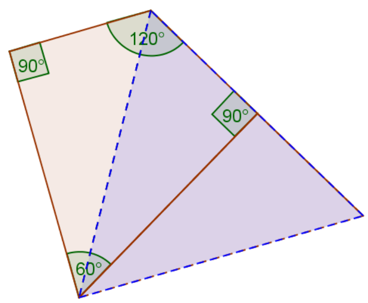


En consecuencia, todo romboide tiene un par de ángulos opuestos iguales y una de sus diagonales lo descompone en dos triángulos iguales.

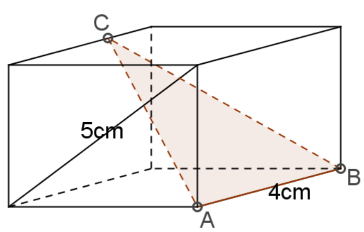
En nuestro caso, la diagonal marcada en la figura,



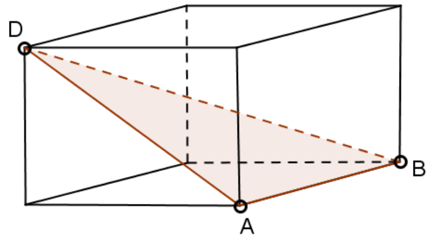
descompone al romboide en dos triángulos rectángulos iguales con ángulos de *30º* y *60º*. Estos triángulos pueden unirse por uno de sus catetos para formar un triángulo equilátero.



3. En el paralelepípedo recto, la arista *AB* mide *4cm*, *C* es un punto en la arista opuesta a *AB* y la diagonal de la cara anterior mide *5cm*. Halla el área del triángulo *ABC*.



Solución: La arista *AB* y la arista donde se encuentra *C* son paralelas, vale decir que el área del triángulo *ABC* es igual que el área del triángulo *ABD*

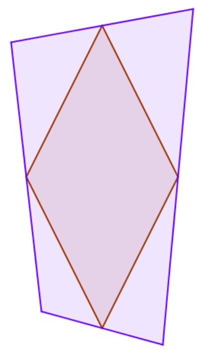


Pero en *ABD* el ángulo en *A* es recto, de modo que el área de *ABD* es *½ 4cm×5cm = 10cm²*.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Primera Ronda

Tercer Nivel - 7º Año de Escolaridad

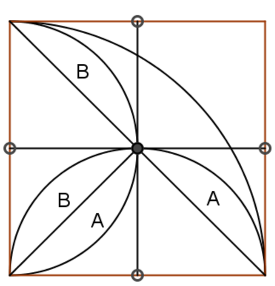
1. Los puntos medios de un cuadrilátero son los vértices de un rombo cuyo perímetro es *16 cm*. Halla las medidas de las diagonales del cuadrilátero.

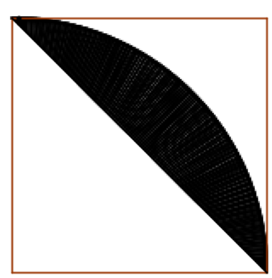


Solución: Los puntos medios de un cuadrilátero forman el paralelogramo de Varignon, los lados de este paralelogramo son paralelos a las diagonales del cuadrilátero y equivalen a media diagonal. Luego, las diagonales del cuadrilátero miden *8cm* cada una.

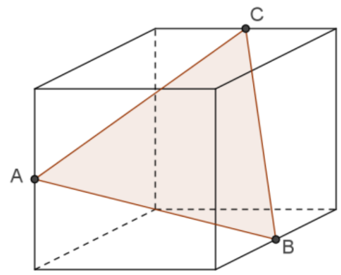
2. En el cuadrado de *4cm* de lado se trazan dos semicircunferencias de radio 2*cm* y un cuarto de circunferencia de radio *4cm*, como indica la figura. Encuentra el área de la región sombreada.

Solución: Tomando los puntos medios de los lados del cuadrado y su centro, observamos que parte de la figura sombreada puede descomponerse para formar otra figura con igual área, descripta a continuación, demostrando que el área buscada es $(1/4)4^2\pi-(1/2)4^2=4\pi-8$.

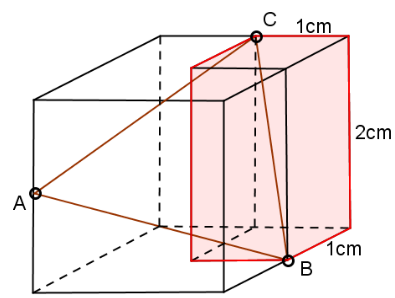




3. Los vértices del triángulo *ABC* de la figura son puntos medios de aristas del cubo de *8cm³* de volumen. Halla el perímetro de *ABC*.



Solución: Cada lado de este triángulo es la diagonal interior de un prisma recto con base cuadrada como lo ilustra la figura para el caso del lado *BC*.

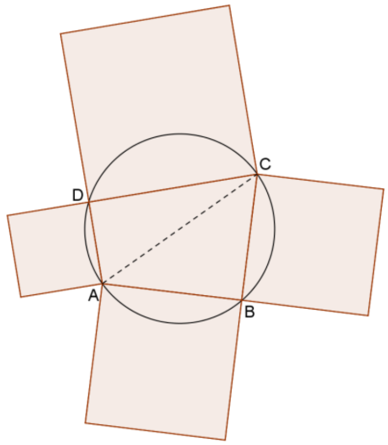


En consecuencia, el triángulo es equilátero y cada lado mide $\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$ y el perímetro resulta igual a *3√6cm*.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Primera Ronda

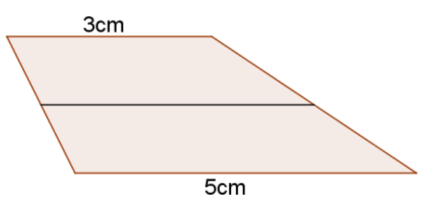
Cuarto Nivel - 8º Año de Escolaridad

1. El cuadrilátero *ABCD* está inscripto en la circunferencia de radio *1cm* y una de sus diagonales es diámetro de la circunferencia. Sobre los lados de *ABCD* se dibujan cuadrados. Halla la suma de las áreas de estos cuadrados.

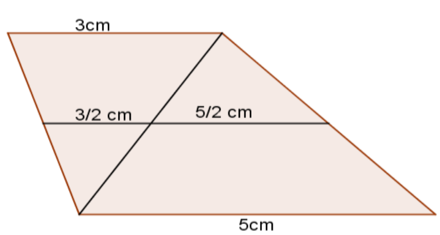


Solución: La suma de las áreas de los cuadrados es $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$. Al ser *AC* un diámetro, los ángulos del cuadrilátero en *B* y en *D* son rectos; luego por el teorema de Pitágoras se tiene $AB^2+BC^2 = AC^2 = CD^2+DA^2$ y teniendo en cuenta que $AC = 2cm$, resulta la suma de las áreas igual a $8cm^2$.

2. En un trapecio los lados paralelos miden *3cm* y *5cm* respectivamente. Halla la longitud de la base media, es decir del segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos.

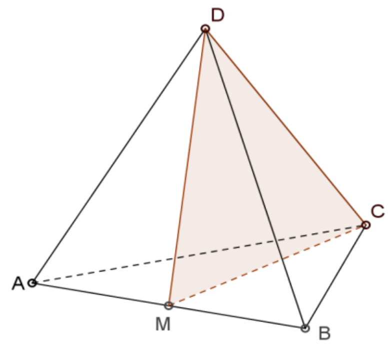


Solución: Una diagonal descompone al trapecio en dos triángulos y a la base media del trapecio en las bases medias de estos triángulos.



Se concluye que la base media mide *4cm*, es decir es el promedio de las medias de las bases del trapecio.

3. *M* es el punto medio de la arista *AB* del tetraedro *ABCD* cuyo volumen es $20cm^3$.



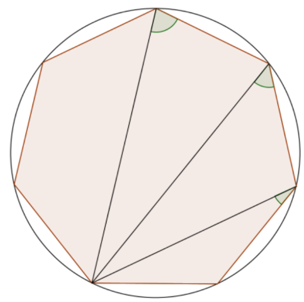
Halla los volúmenes de los tetraedros *AMCD* y *MBCD*.

Solución: Los tetraedros *AMCD* y *MBCD* comparten la altura por *D* y las respectivas bases *AMC* y *MBC* tienen la misma área, por se *M* el punto medio de *AB.* Como el volumen de un tetraedro es 1/3 del área de la base por la altura, resulta que *AMCD* y *MBCD* tienen el mismo volumen igual a $10cm^3$.

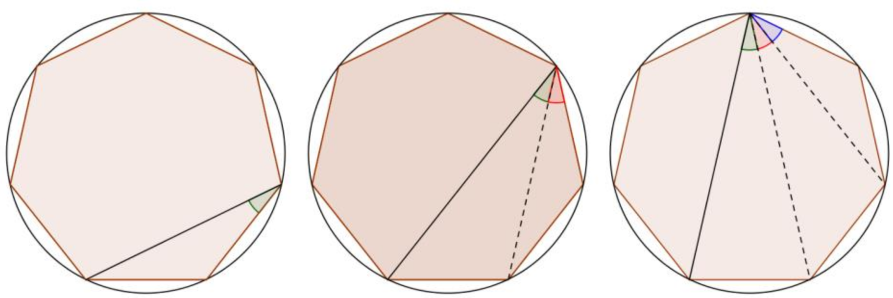
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Primera Ronda

Quinto Nivel - 9º Año de Escolaridad

1. Halla el valor de los ángulos marcados en el heptágono regular.

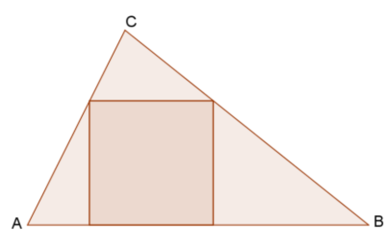


Solución: Los ángulos interiores de un heptágono regular miden *5×180º/7* es decir *128,57..º*. El ángulo más pequeño entre los marcados mide *½ (180º-128,57º..) = 25,715..º* por estar en la base de un triángulo isósceles. Por otra parte, dado que en una circunferencia a cuerdas iguales se le oponen ángulos iguales, si éstos se encuentran en el mismo semiplano que el centro respecto de cada cuerda, los ángulos indicados en las figuras son iguales.



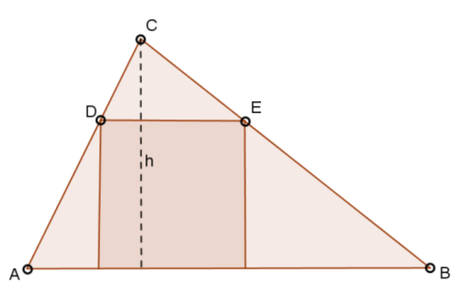
Se tiene que los valores pedidos de los ángulos son *25,715..º, 2×25,715..º y 3×25,715..º*.

2. El área del triángulo *ABC* es $14cm^2$ y el lado *AB* mide *7cm*. Sobre el lado *AB* del triángulo se ha inscripto un cuadrado como indica la figura.



Encuentra el área del cuadrado.

Solución: Los triángulos *ABC* y *DEC* dados en la figura



son semejantes. Si $h = 4cm$ es la altura de *ABC*, entonces *h-l* es la altura de *BDE*, donde *l = DE* es la medida del lado del cuadrado. Por la semejanza entre los triángulos resulta:

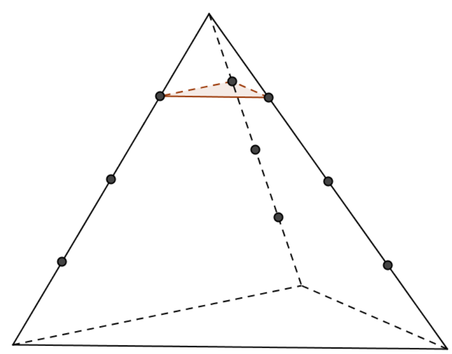
$$\frac{l}{AB} = \frac{h-l}{h}$$

o bien:

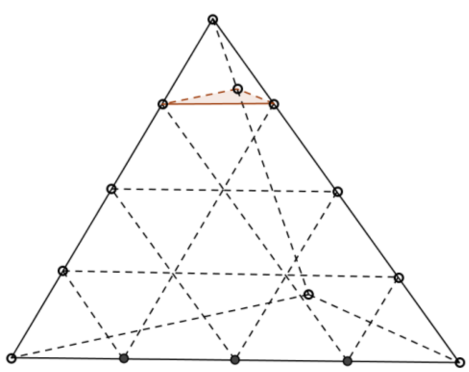
$$\frac{l}{7} = \frac{4-l}{4}$$

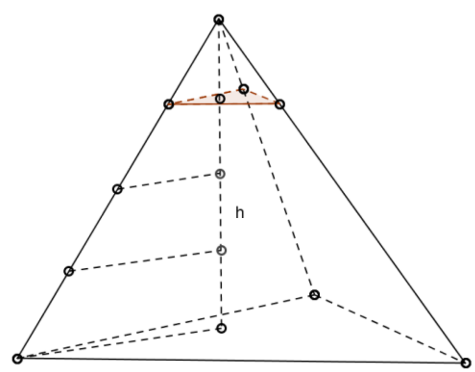
de donde $l = \frac{28}{11}$ y el área del cuadrado igual a $\left(\frac{28}{11}\right)^2 cm^2$.

3. Una pirámide hueca con base triangular es seccionada a ¾ de su altura por un plano paralelo a su base. La parte superior de la sección se usará como recipiente para llenar la pirámide trunca con agua. ¿Cuántas veces habrá que llenar el recipiente para cumplir la tarea?



Solución: La pirámide en la parte superior de la sección tiene una base semejante a la base de la pirámide original y la relación de semejanza es ¼, lo mismo ocurre con la relación ente las alturas de ambas pirámides; esto puede verse en la figura siguiente.





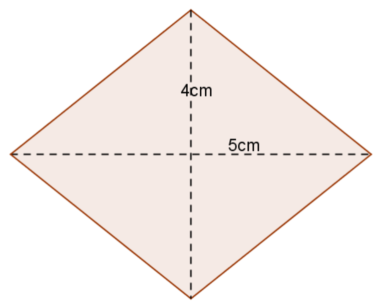
En resumen, para obtener el volumen de la pirámide pequeña notamos que el área de su base es *(1/4)² = 1/16* del área de la base de la pirámide original y su altura es ¼ de la altura *h* de la pirámide, en consecuencia su volumen es *1/16×1/4 = 1/64* del volumen de la pirámide dada. Se deberá llenar el recipiente *63* veces.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Primera Ronda

Sexto Nivel - 10º Año de Escolaridad

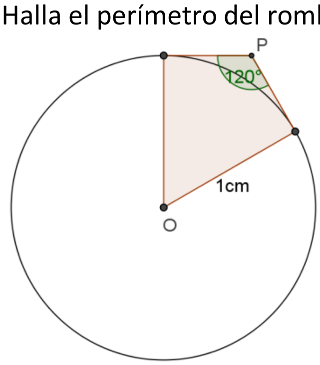
1. Las diagonales de un cuadrilátero convexo son iguales, y las distancias entre puntos medios en lados opuestos son *4cm* y *5cm* respectivamente. Halla el área del cuadrilátero.

Solución: Si las diagonales del cuadrilátero son iguales, el paralelogramo de Varignon, cuyos vértices son los puntos medios de los lados del cuadrilátero, es un rombo.

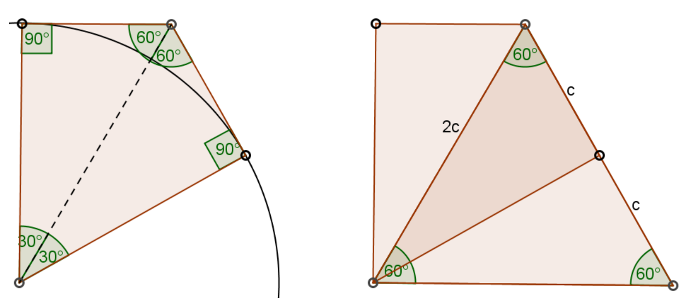


Las diagonales de este rombo miden *4cm* y *5cm* respectivamente, en consecuencia el área del rombo es $4cm\times5cm/2 = 10cm^2$ y el área del cuadrilátero $20cm^2$.

2. Desde el punto P en el exterior de una circunferencia, de radio *1cm* y centro O, se trazan las dos tangentes a la circunferencia que forman un ángulo de *120º*. Halla el perímetro del romboide en la figura:

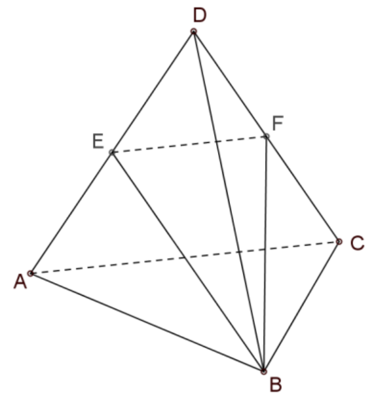


Solución: Como las tangentes son perpendiculares a los radios, el ángulo del romboide en el vértice O es *60º*. La diagonal PO divide al romboide en dos triángulos rectángulos iguales, con ángulos de 30º y 60º .

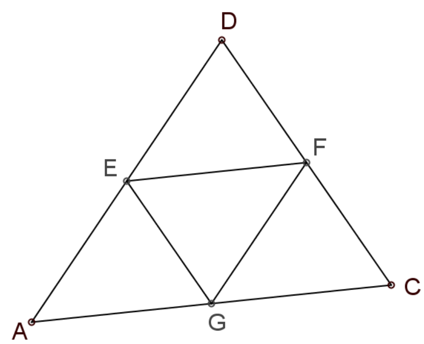


Estos triángulos pueden unirse por el cateto de *1cm* para formar un triángulo que es equilátero por tener todos sus ángulos iguales a 60º. De esto surge que los catetos de los triángulos rectángulos están en la relación *2:1*. Por el Teorema de Pitágoras, si c denota el cateto menor, debe ser: $c^2+1 = (2c)^2$ o bien $c = 1/\sqrt{3}$. El perímetro del romboide es $(2+2/\sqrt{3})cm$.

3. En la figura, *E* y *F* a los puntos medios de las aristas *AD* y *CD* respectivamente del tetraedro *ABCD* cuyo volumen es $20cm^3$. Calcula los volúmenes del tetraedro *EBFD* y de la pirámide *ACFEB*.



Solución: La cara *ACD* del tetraedro es descompuesta por el segmento *EF* en el triángulo *DEF* y el trapecio *ACFE* cuyas áreas están en la relación *3:1* según se aprecia en la figura donde *G* es el punto medio de *AC*.



El volumen del tetraedro *EBFD* es un tercio del área de *EFD* por la distancia entre *B* y el plano *ACD*. El volumen de la pirámide *ACFEB* es un tercio del área de *ACFE* por la distancia entre *B* y el plano *ACD*. Esto muestra que el volumen del tetraedro es un tercio del volumen de la pirámide; en conclusión los volúmenes son $5cm^3$ y $15cm^3$.