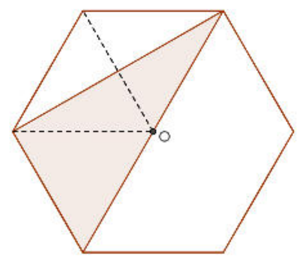
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Primer Nivel - 5º Año de Escolaridad

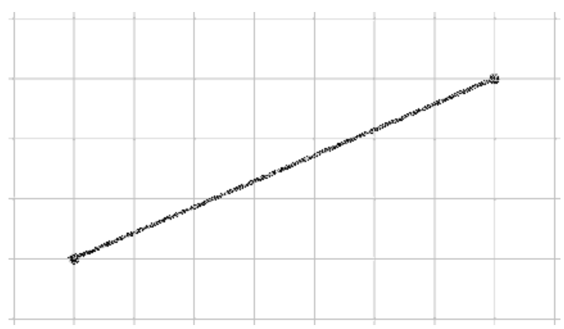
Problema 1. El hexágono regular de la figura tiene área $6cm^2$. Halla el área de la región sombreada.

Solución: El triángulo sombrado se encuentra en una mitad del hexágono. Esta mitad, se descompone en tres triángulos equiláteros iguales con un vértice común O en el centro del hexágono.

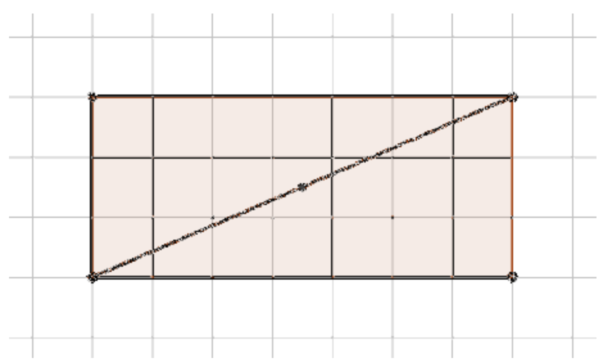


La figura sombreada está formada por uno de los triángulos equiláteros y un triángulo que es la mitad del paralelogramo que determinan los dos restantes. Como cada triángulo equilátero es de área $1cm^2$, el área buscad es $2cm^2$.

Problema 2. Usando sólo una regla sin marcas, dibujar en la cuadrícula un segmento de igual longitud que el dado que lo corte en el punto medio.

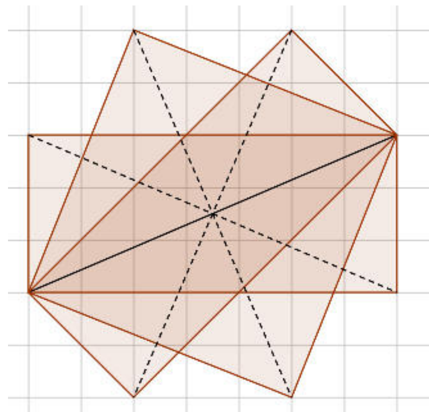


Solución: Usando nodos de la cuadrícula, dibujamos un rectángulo que tenga al segmento dado por diagonal.



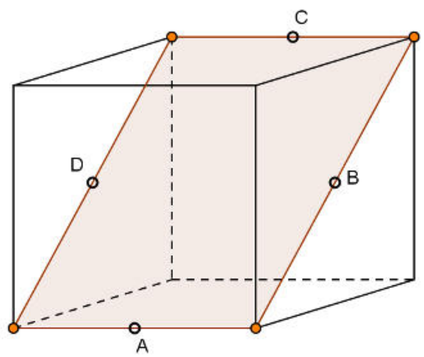
Por las propiedades de las diagonales de un rectángulo, la otra diagonal del rectángulo es una solución del problema.

Nota: Ampliando la cuadrícula dada encontramos otras soluciones.



Problema 3. *A* y *C* son los puntos medios de las aristas del cubo donde se encuentran. *B* y *D* son los centros de las caras donde se encuentran. ¿Son los puntos *A, B, C, D* coplanares (es decir, pertenecen a un plano)?

Solución:

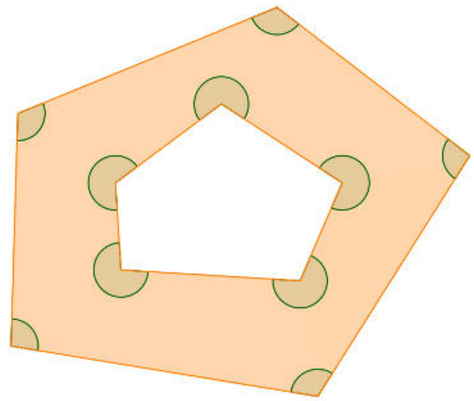


La figura sombreada es una sección del cubo por el plano que determinan las aristas paralelas donde se encuentran los puntos *A* y *C* respectivamente. Este plano secciona a las caras laterales del cubo, la que contiene a *B* y la que contiene a *D*, en sus respectivas diagonales. En consecuencia los puntos dados son coplanares.

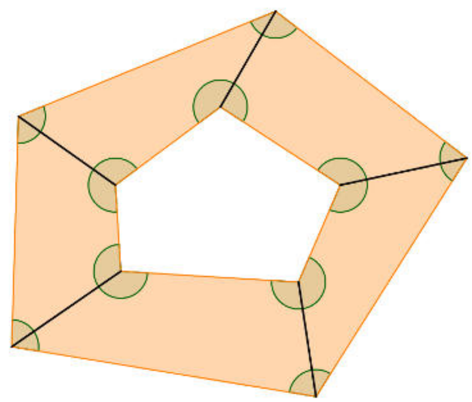
Nota: La sección considerada es claramente un paralelogramo que tiene sus diagonales de igual longitud, por ser diagonales internas del cubo. Luego es un rectángulo.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Segundo Nivel - 6º Año de Escolaridad

Problema 1. Halla la suma de los ángulos marcados en la figura.



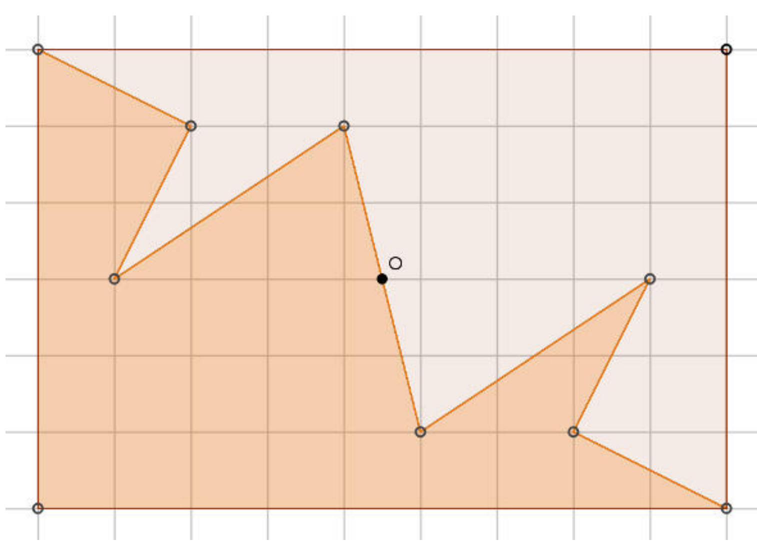
Solución: Descomponiendo la figura en cinco cuadriláteros:



Sobre cada cuadrilátero, los ángulos suman 360º, de modo que la suma total es $5 \times 360^{o} = 1800^{o}$.

Poblema 2. Halla el área del polígono inscripto en la cuadrícula, formada por cuadrados de *1cm* de lado.

Solución: El rectángulo, de *6cm* por *9cm*, dado a continuación contiene dos figuras idénticas.

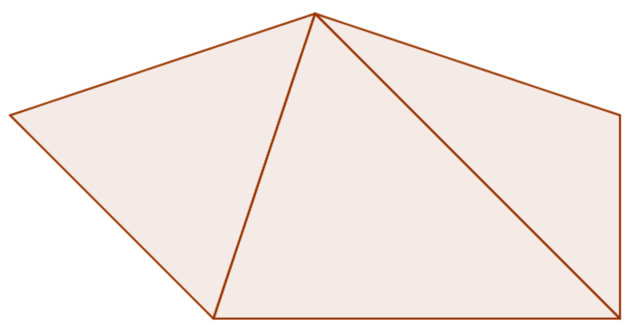


Una figura se obtiene de la otra mediante una rotación de 180º con centro en el centro *O* del rectángulo.
El área resulta $27cm^2$.
Nota: Hay varias formas de calcular el área usando la cuadrícula. Por ejemplo:

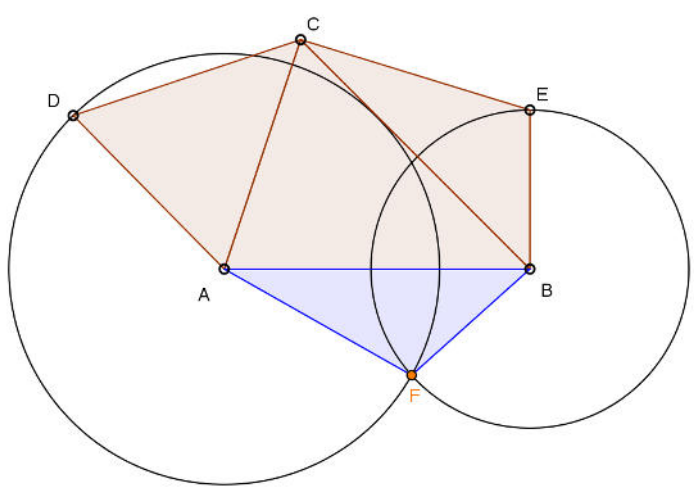
El área del polígono es $17cm^2$ pues comprende *17* cuadritos. Las áreas de los triángulos de izquierda a derecha, suman (1+1+3+2+2+1) cm^2 = $10cm^2$

.

Problema 3. La figura muestra tres caras del desarrollo de un tetraedro. Dibuja la cuarta cara usando regla y compás.

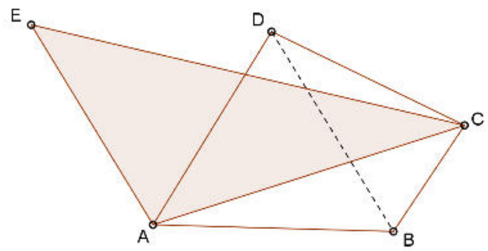


Solución: La cara que falta, debe compartir la arista *AB* con la cara *ABC*, la notamos *ABF*. Además, deben verificarse las igualdades: *BF* = *BE*, *AF* = *AD*, *CD* = *CE*, condiciones necesarias para cerrar el tetraedro. El punto F es el punto de intersección de las circunferencias trazadas en la figura.

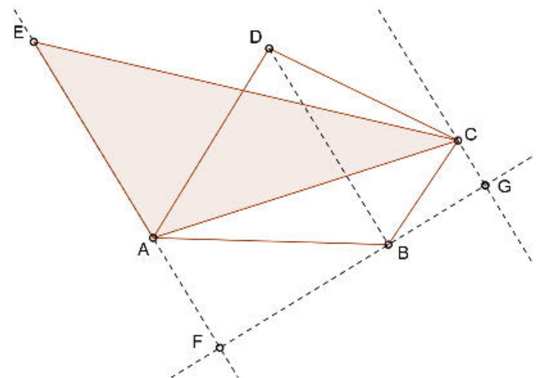


TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Tercer Nivel - 7º Año de Escolaridad

Problema 1. Dado el cuadrilátero *ABCD* de $9cm^2$ de área, se traza por *A* el segmento *AE* paralelo a la diagonal *BD* y de igual longitud que ésta. ¿Cuál es el área del triángulo *ACE*?



Solución: Trazamos la perpendicular a *BD* por *B* y las paralelas a *BD* por *A* y *C* que determinan los puntos *F* y *G* según se observa en la siguiente figura.



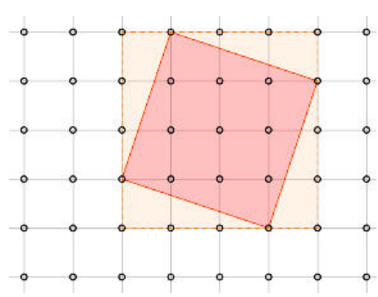
El área del triángulo *EAC* es $\frac{1}{2} EA \times FG$. El área del cuadrilátero *ABCD* es:

$$\frac{1}{2} BD \times BF + \frac{1}{2} BD \times BG = \frac{1}{2} BD \times FG$$

Dado que *BD* = *EA* las áreas del cuadrilátero y del triángulo dados, son iguales.

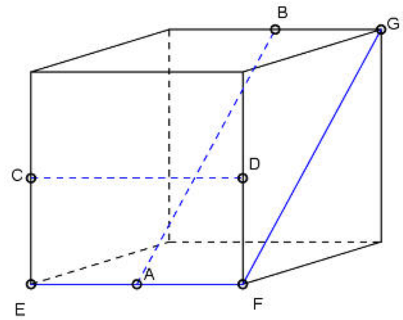
Problema 2. Usando una regla sin marcas, dibuja un cuadrado de área $10cm^2$ con vértices en los nodos de la cuadrícula (puntos donde se cortan las rectas verticales y horizontales) siendo los cuadrados de *1cm* de lado.

Solución: Para que el área del cuadrado sea $10cm^2$ su lado debe medir $\sqrt{10}cm$. Según Pitágoras, $\sqrt{10}$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden *3cm* y *1cm*. La figura muestra una construcción del cuadrado a partir de las hipotenusas de los triángulos rectángulos marcados, usando sólo una regla sin marcas para unir los nodos que corresponden.



Problema 3. Los puntos *A, B, C, D* son puntos medios de las aristas del cubo donde se encuentran. Halla el ángulo que determinan las rectas *AB* y *CD*.

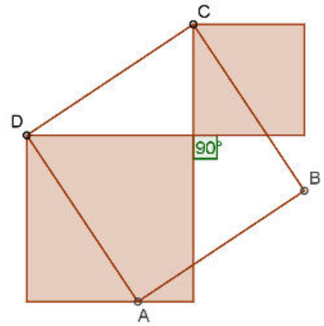
Solución: La recta *CD* es paralela a la arista *EF* y la recta AB es paralela a la diagonal *FG* de una cara lateral del cubo, según se observa en la figura.



Como *EF* es perpendicular a dicha cara lateral, resulta *EF* perpendicular a *FG*. En consecuencia el ángulo entre las rectas *AB* y *CD* es 90º.

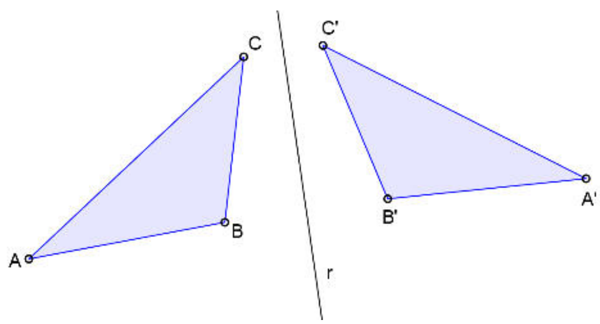
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Cuarto Nivel - 8º Año de Escolaridad

Problema 1. La suma de las áreas de los cuadrados sombreados es *20cm*^{2} ¿Cuál es el área del cuadrado *ABCD*?



Solución: Si *x* e y son las longitudes de los lados de los cuadrados sombrados, por Pitágoras resulta $DC^2 = x^2 + y^2$, de donde el área de *ABCD* es $DC^2 = 20cm^2$.

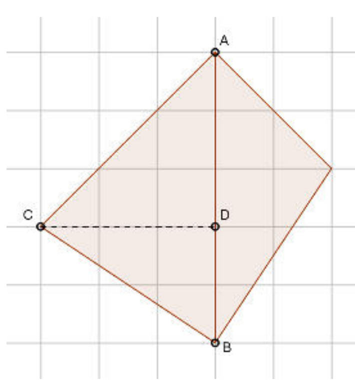
Problema 2. Dibuja la figura que resulta de transformar el triángulo *ABC* por una simetría respecto de una recta que transforma el vértice *A* en el punto *A'*.



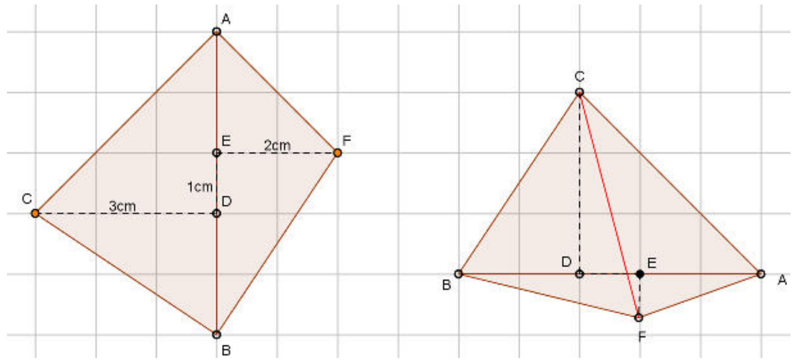
Solución: Como la simetría transforma *A* en *A'*, el eje *r* de simetría es la mediatriz de *AA'*. Reflejando *B* y *C* respecto de *r* se obtienen los vértices *B'* y *C'* del triángulos *A'B'C'* transformado de *ABC*.

Problema 3. Sobre el papel cuadriculado, con cuadrados de *1cm* de lado, se han dibujado dos caras de un tetraedro de *5cm*^{3} de volumen. Halla la medida de la arista que falta.

Solución: Tomando como base el triángulo de área *5cm*^{2} resulta que la altura *h* correspondiente es a lo sumo de *3cm*, porque al doblar la cara *ABC* sobre la arista *AB* la máxima altura que alcanza el vértice *C* es *3cm* y lo consigue cuando *CD* es perpendicular al plano de la base.



Como el volumen del tetraedro es $\left(\frac{1}{3}\times 5\times h\right)cm^3 = 5cm^3$, debe ser $h = 3cm$. Con los datos en las caras dadas del tetraedro, figura de la izquierda, y la posición de estas caras en el tetraedro, figura de la derecha,

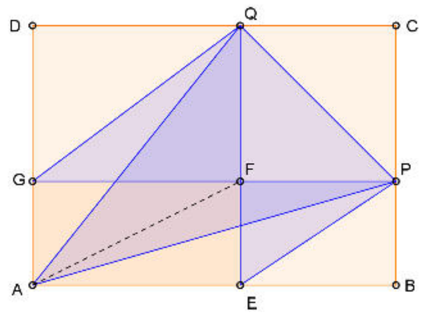


podemos calcular la longitud de la arista CF usando Pitágoras, esto es $CF = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2}cm = \sqrt{14}cm$.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Quinto Nivel - 9º Año de Escolaridad

Problema 1. En la figura, las áreas de los rectángulos *ABCD* y *AEFG* son respectivamente $35cm^2$ y $8cm^2$. Halla el área del triángulo *APQ*.

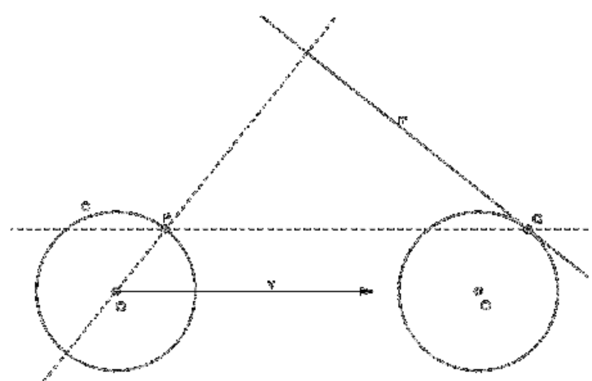
Solución: Consideramos el triángulo *APQ* dividido en tres triángulos *APF, PQF* y *AFQ*. Los triángulos *APF* y *AFQ* tienen, respectivamente, igual área que *FEP* y *GFQ*.



Luego el área de *APQ* es igual al área del pentágono *QGFEP* que es la mitad de la diferencia entre las áreas de *ABCD* y *AEFG*, o sea $\frac{1}{2}(25-8)cm^2 = 13,5cm^2$.

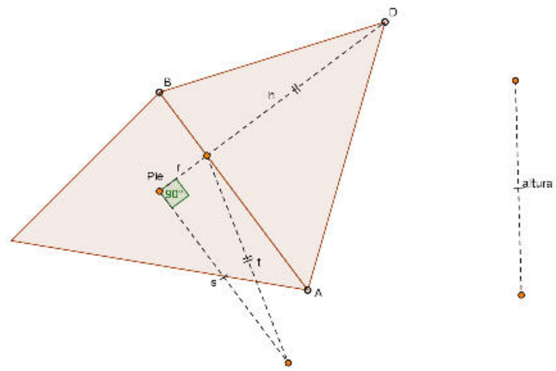
Problema 2. La circunferencia *C* se traslada siguiendo la dirección *v* hasta impactar en la recta *m*. Dibuja los puntos en *C* y en *m* donde se produce el impacto.

Solución: En el momento del impacto la recta *m* será tangente a la circunferencia *C*. Trazamos la recta perpendicular a *m* que pasa por el centro *O* de la circunferencia y la corta en el punto *P* que será el punto de impacto en *C*. Si trazamos la paralela a *v* por el punto *P* encontramos el punto de impacto *Q* sobre la recta *m.*

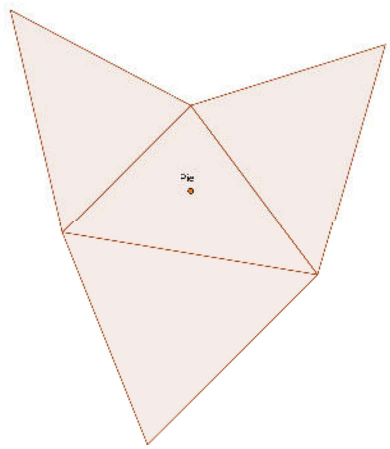


Problema 3. En la figura se muestra la base de una pirámide triangular, el pie y la medida de la altura. Usando regla y compás, halla el desarrollo de la pirámide.

Solución: Indicaremos cómo construir la cara *ADB* sobre uno de los lados, el *AB*. Consideremos el segmento *r* perpendicular a *AB* que une el Pie de la altura con *AB*. La siguiente afirmación es clave para nuestra resolución del problema.
La altura de la pirámide, el segmento r y la altura h de la cara ADB que parte de D forman un triángulo rectángulo que tiene a h como hipotenusa.
Esto nos permite construir con regla y compás la cara *ADB* a partir de su altura *h*. La siguiente figura ilustra la construcción donde *s* y *t* son segmentos auxiliares, *s* es perpendicular a *r* y su longitud es la altura de la pirámide, *t* da la longitud de *h*.



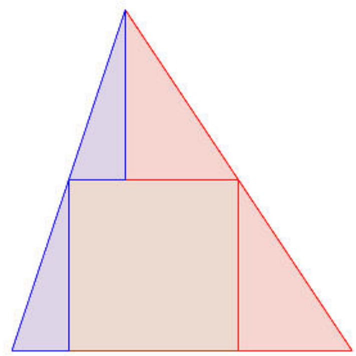
De manera análoga se construyen las caras restantes para completar el desarrollo de la pirámide.



TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Sexto Nivel - 10º Año de Escolaridad

Problema 1. En la figura, la medida de la base del triángulo es el doble de la medida del lado del cuadrado. Halla el área del triángulo sabiendo que el área del cuadrado es $10cm^2$.

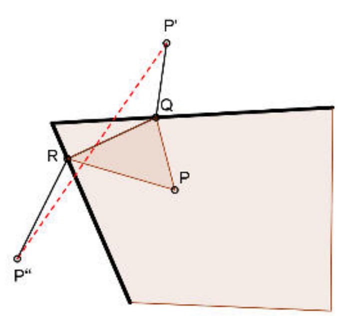
Solución: El lado superior del cuadrado es una base media del triángulo y a la vez es la base de un triángulo cuya área es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo dado. La suma de las áreas de los dos triángulos a cada lado del cuadrado es igual al área del triángulo considerado anteriormente, como se observa en la figura.



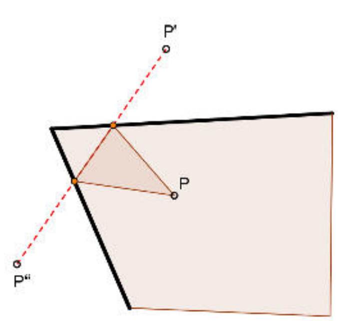
El área del cuadrado resulta la mitad del área del triángulo, es decir ésta es *20cm*.

Problema 2. Como se aprecia en la figura, en el punto *P* del interior de un terreno con forma de cuadrilátero hay un poste. Explica cómo ubicar un poste sobre cada lado remarcado del terreno de modo que el alambrado de la parcela triangular determinada por los tres postes utilice la menor cantidad posible de metros de alambre.

Solución: El problema equivale a encontrar el triángulo de menor perímetro, lo que permitirá colocar los postes en las condiciones pedidas.
Consideremos *P´* y *P”* los simétricos de *P* respecto de cada uno de los lados marcados. Cualquier parcela triangular *PQR*, tiene un perímetro igual a la longitud de la poligonal *P’QRP”* que es mayor o igual que la longitud del segmento *P’P”*.

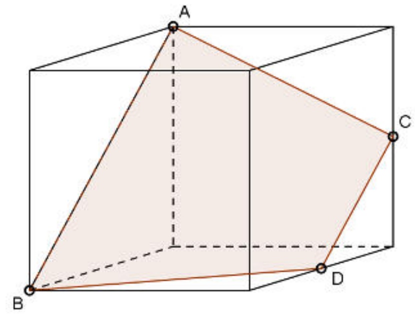


Si consideramos los puntos de intersección del segmento *P´P”* con los lados marcados del terreno, obtendremos la parcela triangular de menor perímetro posible.

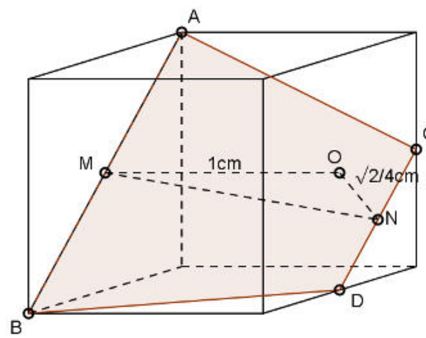


Problema 3. El cubo de arista *1cm*, es seccionado por el plano determinado por los vértices *A, B* y el punto medio *C* de la arista, según indica la figura. Halla el área de la sección.

Solución: Si trazamos por *C* una paralela a *AB* encontramos el punto *D*, punto medio de la arista que lo contiene.



La sección resulta un trapecio isósceles cuyas bases miden $\sqrt{2}cm$ y $\frac{\sqrt{2}}{2}cm$. Para hallar la altura de este



trapecio, consideramos la distancia entre los puntos medios *M* y *N* de sus bases. El segmento *MN* es la hipotenusa del triángulo rectángulo *MNO* siendo *O* el centro de la cara del cubo que contiene a *N*. El cateto *ON* es un cuarto de la diagonal de una cara del cubo. Por Pitágoras se tiene:

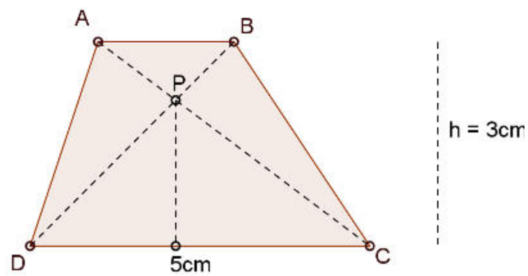
$$MN = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}cm = \frac{3\sqrt{2}}{4}cm$$

El área del trapecio es $\frac{3\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}cm^2 = \frac{9}{8}cm^2$.

TORNEOS GEOMÉTRICOS 2017. Primera Ronda
Séptimo Nivel - 11º Año de Escolaridad

Problema 1. La base mayor del trapecio de la figura mide *5cm* y su altura *h* mide *3cm*. Halla el área del trapecio sabiendo que la distancia del punto *P*, intersección de las diagonales, a la base mayor es 5/7 de *h*.

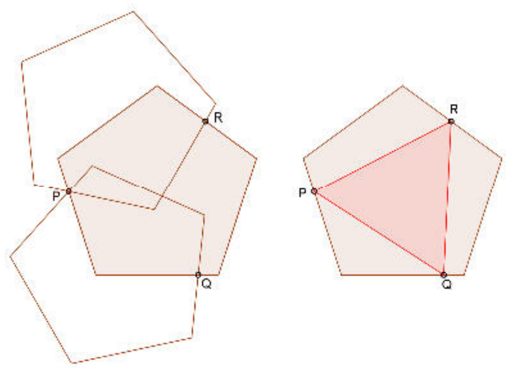
Solución: Los triángulos *DCP* y *APB* son semejantes y sus alturas están en la relación *5:2*.



Entonces $\frac{DC}{AB}=\frac{5}{2}$, es decir $AB = 2cm$ y el área del trapecio es $\frac{5+2}{2}\times 3cm^2 = \frac{21}{2}cm^2$.

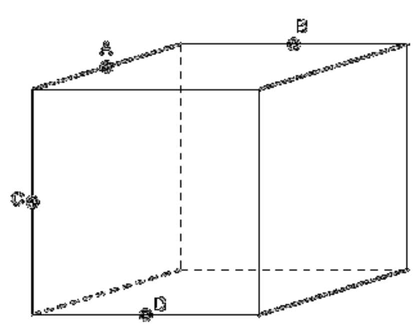
Problema 2. Inscribe usando regla y compás, en el pentágono regular de la figura, un triángulo equilátero con un vértice en *P*.

Solución: Rotando 60º el pentágono alrededor de *P*, en sentido horario y antihorario, encontramos los puntos *Q* y *R* en las intersecciones del pentágono con sus transformados.

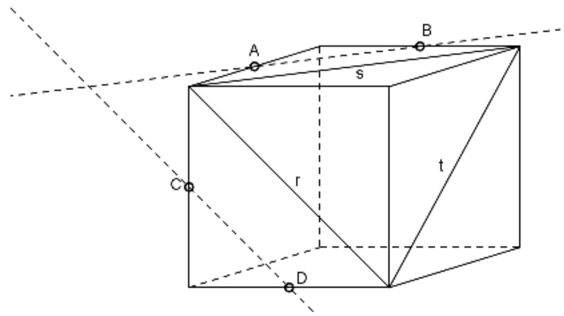


Estos puntos son vértices del triángulo equilátero buscado. (ver Notas de Geometría, Tercera Nota)

Problema 3. En la figura, los puntos *A, B, C, D* son puntos medios de las aristas del cubo. Halla el ángulo determinado por las rectas *AB* y *CD*.



Solución: La recta AB es paralela a la diagonal s de la cara del cubo que contiene a los puntos A y B. La recta CD es paralela a la diagonal r de la cara del cubo que contiene a los puntos C y D.



El ángulo que forman las rectas AB y CD es el mismo que forman s y r. Las diagonales r, s y t son los lados de un triángulo equilátero, luego el ángulo entre las rectas dadas es 60º.