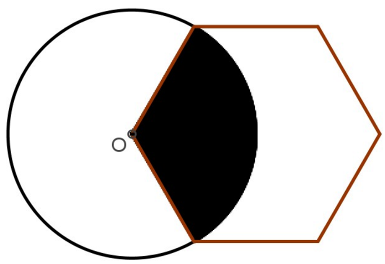
SOLUCIONES

PRIMER NIVEL

1. ¿Existe un triángulo tal que las medidas de sus lados, en centímetros, sean números enteros y además un lado mida *1cm* y su perímetro sea *100cm*?

Solución: No existe. Si a y b son las medidas de los otros lados, suponiendo $a \leq b$, se tiene que $b < a+1$ para que formen triángulo. Debe ser $b-a<1$, es decir $a=b$ y el perímetro $a+a+1=2a+1$ sería un número impar.

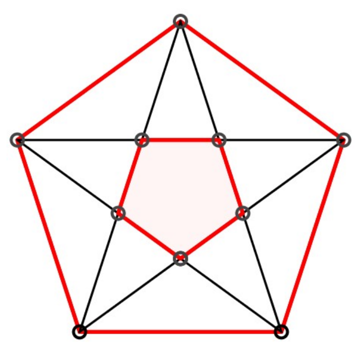
2. El área del círculo de centro *O* es *15* cm^2. Halla el área de la región sombreada, intersección del círculo con



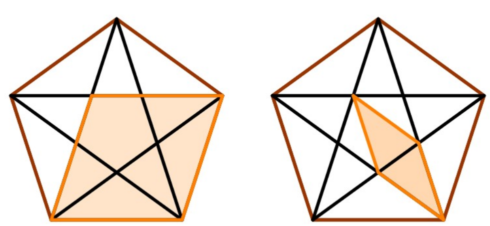
el hexágono regular.

Solución: Los ángulos interiores del hexágono regular miden 120º, de manera que el sector circular sombreado corresponde a un ángulo central de 120º, es decir, equivale a un tercio del círculo. El área buscada es *5*cm^2.

3. ¿Cuántos rombos puedes dibujar usando los vértices de los pentágonos regulares dados en la figura?



Solución: Hay 10 rombos agrupados en dos clases.

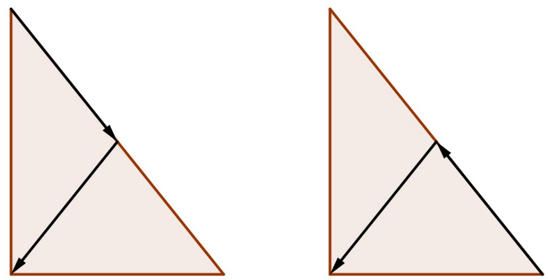


5 de esta clase   5 de esta clase

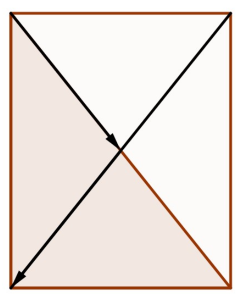
SEGUNDO NIVEL

1. Un elefante debe recorrer la hipotenusa de *900* metros de un triángulo rectángulo, partiendo desde uno de sus vértices. Pero al llegar al punto medio de la hipotenusa, se desvía dirigiéndose en línea recta hasta el vértice opuesto a la hipotenusa. ¿Cuántos metros recorrió?

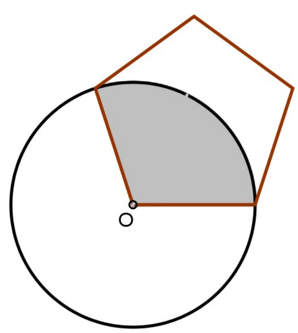
Solución: Los recorridos posibles son:



En cualquier caso, el elefante recorre una distancia equivalente a la longitud de la hipotenusa, dado que en un rectángulo las diagonales son iguales y se cortan en sus puntos medios.

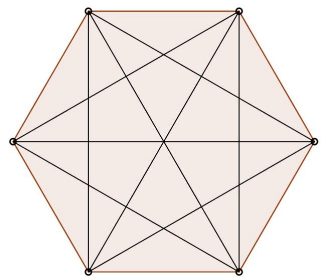


2. El área del círculo de centro O es $10\ cm^{2}$. Halla el área de la región sombreada, intersección del círculo con el pentágono regular.

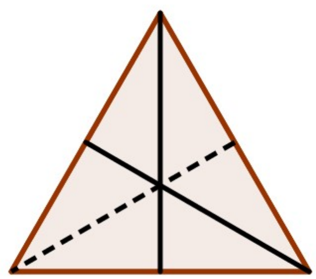


Solución: Los ángulos interiores del pentágono regular miden 108º, de manera que el sector circular sombreado corresponde a un ángulo central de 108º, es decir, equivale a tres décimos del círculo. El área buscada es $3cm^{2}$.

3. Se han trazado todas las diagonales de un hexágono regular de área *36cm²*. Halla el área de cada una de las *24* figuras en que las diagonales descomponen al hexágono.



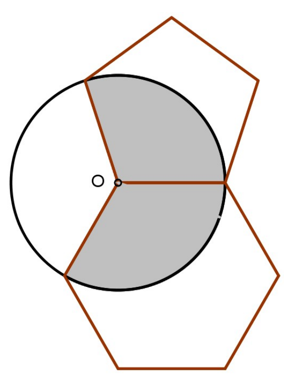
Solución: Las diagonales mayores dividen al hexágono en 6 triángulos equiláteros. Sobre cada uno de estos triángulos, dos de sus medianas son parte de dos diagonales.



Trazando la mediana que falta en cada triángulo, queda en evidencia que las áreas de las figuras obtenidas en la descomposición son de $1cm^2$ y de $2cm^2$.

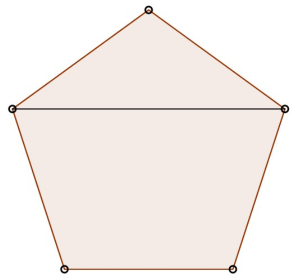
TERCER NIVEL

1. El área del círculo de centro O es $60\ cm^2$. Halla el área de la región sombreada, intersección del círculo con la figura formada por el pentágono y el hexágono, ambos regulares.

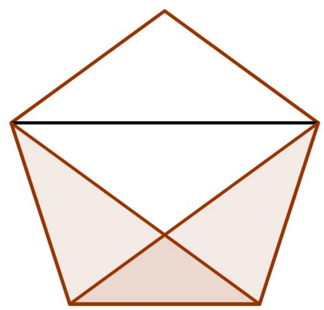


Solución: Los ángulos interiores del pentágono regular miden 108º, los ángulos interiores del hexágono regular miden 120º, de manera que el sector circular sombreado corresponde a un ángulo central de 228º, es decir, equivale a diecinueve treintavos del círculo. El área buscada es $38cm^2$.

2. Muestra que en el pentágono regular cada diagonal es paralela al lado con el que no comparte vértices.



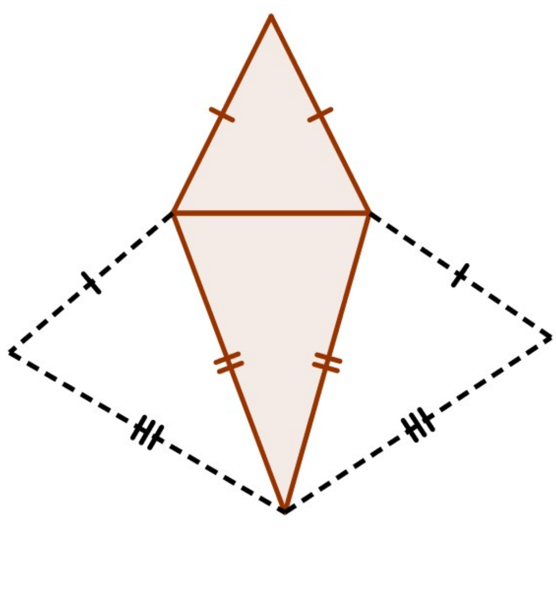
Solución: Dos de los triángulos sombreados son iguales.



Como las alturas de estos triángulos son iguales, la diagonal y el lado del pentágono considerado deben ser paralelos.

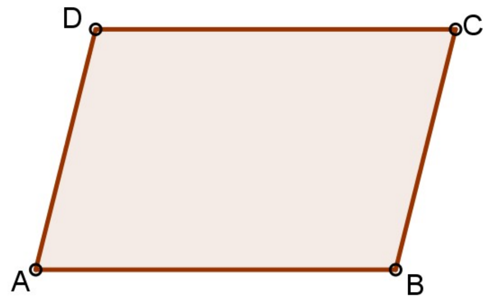
3. Si dos caras de un tetraedro se desarrollan como un romboide, muestra que las caras restantes son iguales.

Solución: Observando cómo puede completarse el desarrollo del tetraedro de manera consistente con las medidas de las aristas en el contorno del romboide, queda claro que las otras dos caras son iguales.



CUARTO NIVEL

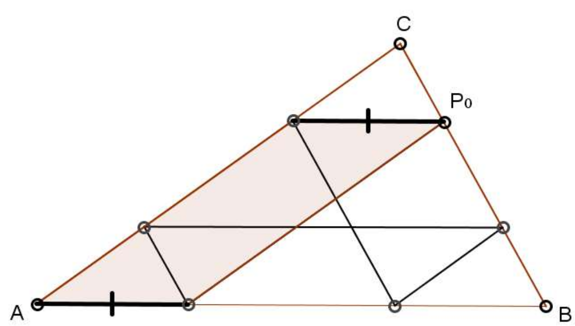
1. En el paralelogramo *ABCD*, la diagonal *AC* mide *6cm*. Halla la distancia entre los baricentros de los triángulos *ABD* y *BCD*.

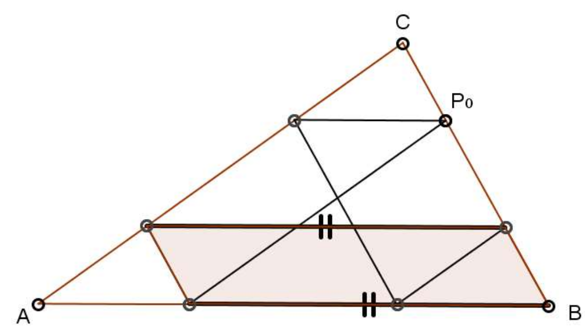


Solución: La mitad de la diagonal *AC* es mediana de *ABD* y la otra mitad es mediana de *BCD*, si se tiene en cuenta la propiedad de la ubicación del baricentro en una mediana (a 1/3 del lado y 2/3 del vértice), resulta claro que los baricentros considerados están a *2cm* uno del otro.

2. Desde el punto P_0 situado en el lado *BC* del triángulo *ABC*, se traza la paralela al lado *AB* hasta cortar al lado *AC* en el punto P_1. Desde P_1 se traza la paralela al lado *BC* hasta cortar al lado *AB* en el punto P_2 y desde P_2 la paralela al lado *AC* que corta al lado *BC* en el punto P_3. Si se repite el procedimiento anterior a partir P_3 se llega al punto P_6 que es P_0, formándose una poligonal cerrada de *10cm* de longitud. Halla el perímetro del triángulo.

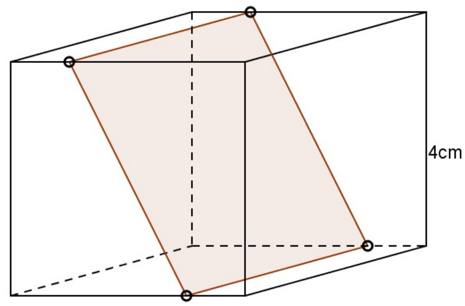
Solución: Los segmentos de la poligonal que son paralelos al lado *AB* del triángulo, totalizan la misma longitud que *AB*, esto surge de los dos paralelogramos sombreados en la figura.





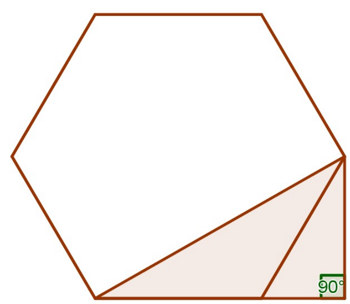
En forma similar, puede observarse que los segmentos de la poligonal paralelos a *BC* totalizan la longitud de *BC* y los paralelos a *AC* totalizan la longitud de *AC.* Finalmente, el perímetro de *ABC* es *10cm*.

3. El paralelogramo de la figura tiene sus vértices en aristas del cubo, las que miden *4cm*. Un lado del paralelogramo mide *4cm*, otro lado mide *5cm*. Halla el área del paralelogramo.



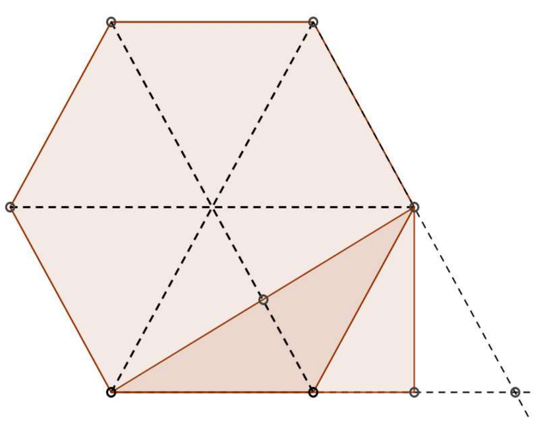
Solución: El lado del paralelogramo en la cara superior del cubo debe medir *4cm,* dado que el lado en la cara de adelante mide más de 4cm por no ser paralelo a las aristas verticales. En consecuencia el lado en la cara superior es paralelo a las aristas que son perpendiculares a la cara delantera, luego, este lado es también perpendicular a la cara delantera, con esto, los lados contiguos del paralelogramo son perpendiculares y entonces, éste es un rectángulo de área *20cm²*.

QUINTO NIVEL



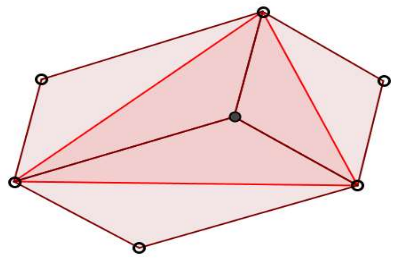
1. En la figura, el área del triángulo rectángulo es $5cm^2$. Halla el área del hexágono regular.

Solución: Las diagonales del hexágono que pasan por el centro de éste, lo dividen en *6* triángulos equiláteros iguales. El triángulo del enunciado se descompone en *3* triángulos, cada uno equivale a una mitad de los triángulos equiláteros mencionados. El área del hexágono es 12/3 del área del triángulo, esto es *20cm²*.

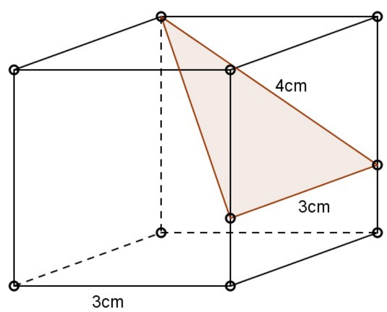


2. Por cada vértice del triángulo *ABC*, de $3cm^2$ de área, se trazan rectas paralelas a las bisectrices de los ángulos correspondientes a los otros vértices. Las seis rectas trazadas determinan un hexágono. Halla el área de este hexágono.

Solución: Usando el incentro, punto de intersección de las bisectrices, el hexágono se puede descomponer en tres paralelogramos, de modo que su área es $6cm^2$.



3. Halla el área del triángulo cuyos vértices están en el cubo de *3cm* de arista y dos de sus lados miden *3cm* y *4cm*, según indica la figura.

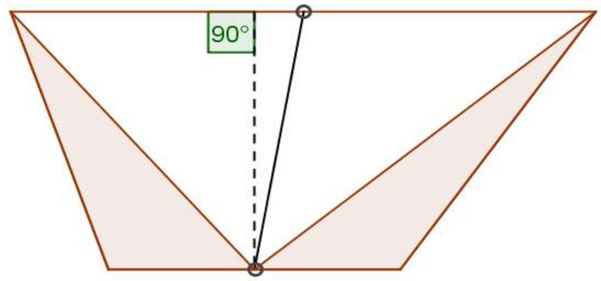


Solución: El lado de *3cm* es necesariamente paralelo a las aristas que son perpendiculares a la cara posterior, donde se encuentra el lado de *4cm*, por este motivo, el triángulo es rectángulo y su área es $6cm^2$.

SEXTO NIVEL

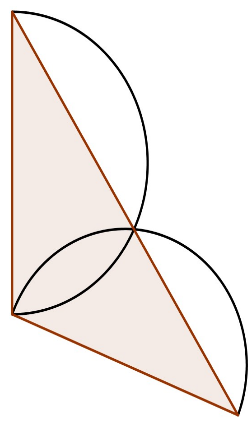
1. El segmento que une los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero divide a éste en dos figuras de igual área. Muestra que el cuadrilátero es un trapecio.

Solución: Cada figura puede descomponerse en dos triángulos como se indica a continuación.



Los triángulos sin sombrear tienen igual área (sus bases miden lo mismo y les corresponde igual altura), luego, los triángulos sombreados deben tener igual área y como sus bases miden lo mismo, sus alturas deben medir lo mismo, es decir , estos lados opuestos del cuadrilátero son paralelos.

2. Justifica la afirmación: *En un triángulo las semicircunferencias trazadas sobre dos de sus lados concurren en un punto del lado restante*. La siguiente figura ilustra la situación.



Solución: La altura correspondiente al lado restante, descompone al triángulo en dos triángulos rectángulos, de modo que el pie de esta altura está en ambas semicircunferencias (arco capaz).

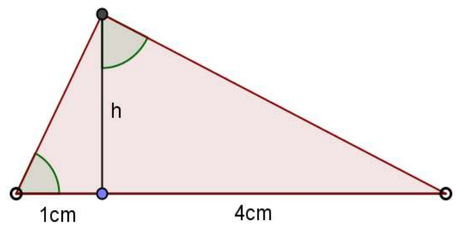
3. Una esfera de radio $\frac{4}{7}cm$ tiene su centro en la cara superior de un cubo de arista *1cm*. Otra esfera de radio $\frac{2}{5}cm$ tiene su centro en la cara inferior del cubo. ¿Es posible que estas esferas tengan intersección no vacía?

Solución: No es posible. La distancia entre un punto de la cara superior y un punto de la cara inferior es mayor o igual que 1. Si hubiera un punto en la intersección, la distancia entre los centros de las esferas sería menor o igual que 4/7+2/5=34/35 menor que 1.

SEPTIMO NIVEL

1. El pie de la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, divide a ésta en segmentos de *1cm* y *4cm* de longitud. Halla el área del triángulo.

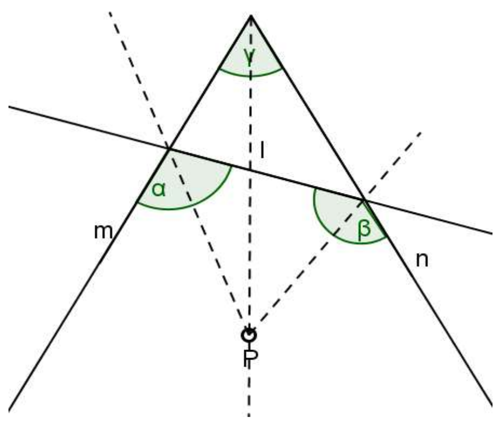
Solución: La altura sobre la hipotenusa descompone al triángulo en dos triángulos rectángulos semejantes.



Se tiene que *4/h = h/1*, o sea *h = 2cm* y el área del triángulo es *5cm²*.

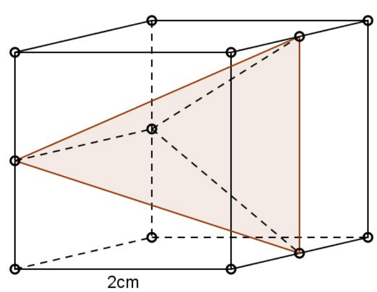
2. Dados los ángulos α, β y ϒ según muestra la figura, se han trazado las bisectrices de los ángulos α y β. Indica cómo trazar la bisectriz del ángulo ϒ usando sólo una regla.

Solución: Uniendo el vértice de ϒ con el punto *P* (intersección de las bisectrices de α y β) se tiene la bisectriz de ϒ.

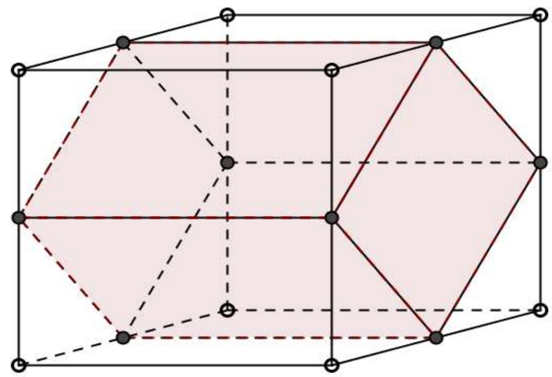


Para justificar esto, observemos que las distancias desde *P* a los lados *l* y *n* de β son iguales, por estar *P* en la bisectriz de β, análogamente, las distancias desde *P* a los lados *l* y *m* de α son iguales, es decir *P* equidista de los lados *m* y *n* de ϒ*,* luego está en al bisectriz ϒ.

3. En el cubo de aristas de *2cm* se inscribe un tetraedro cuyos vértices son puntos medios de aristas del cubo, según indica la figura. Halla el volumen del tetraedro.



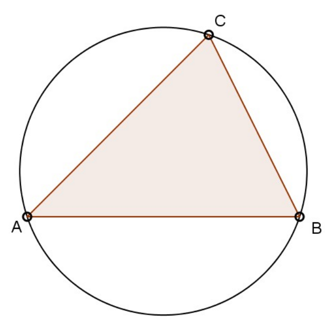
Solución: Usaremos el prisma circunscripto dado en la figura (ver áreas y volúmenes).



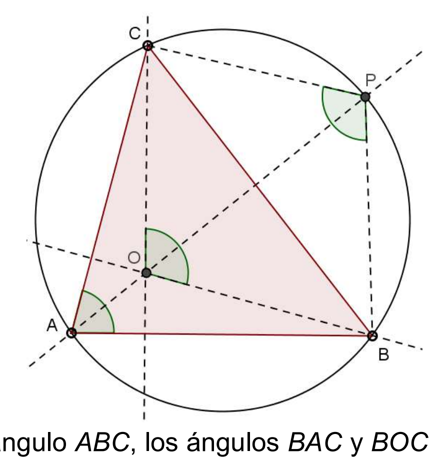
Este prisma es de base cuadrada de área *2cm²*y de *2cm* de altura, es decir, su volumen es *4cm³.* El volumen del tetraedro es 4/3*cm³.*

OCTAVO NIVEL

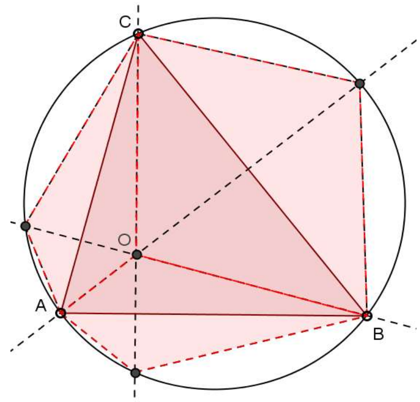
1. Se dispone de una cantidad de pintura para pintar exactamente dos triángulos iguales al triángulo *ABC*. ¿Alcanzará la pintura para pintar el círculo circunscripto a *ABC*?



Solución: No alcanza. Usaremos la siguiente propiedad: *Si se simetriza el ortocentro de un triángulo respecto de uno de sus lados, se obtiene un punto en la circunferencia circunscripta al triángulo.*

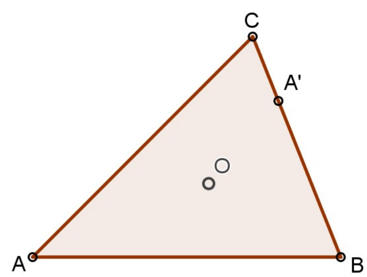


En la figura *O* es el ortocentro del triángulo *ABC*, los ángulos *BAC* y *BOC* son suplementarios (el cuadrilátero de diagonal *AO* limitado por *AB*, *AC* y las alturas por *B* y *C* tiene dos ángulos rectos y la suma de sus ángulos es *360).* El cuadrilátero *ABPC* es inscriptible puesto que el ángulo *BPC* es igual a *BOC*.

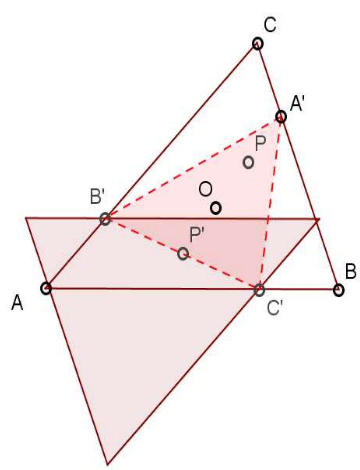


Con los vértices del triángulos y los simétricos del ortocentro se puede inscribir un hexágono en la circunferencia circunscripta a *ABC* cuya área es el doble que la de *ABC* (el hexágono puede descomponerse en tres romboides).

2. El triángulo *A'B'C'* está inscripto en el triángulo *ABC* y comparten el baricentro *O*. Construye *A'B'C'* a partir de la siguiente figura, mencionando las propiedades utilizadas en los pasos de la construcción.

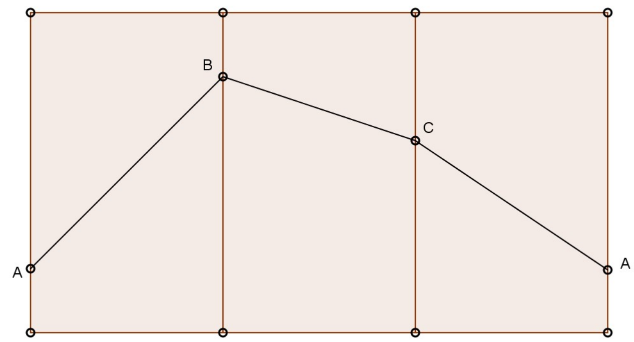


Solución: En la figura:

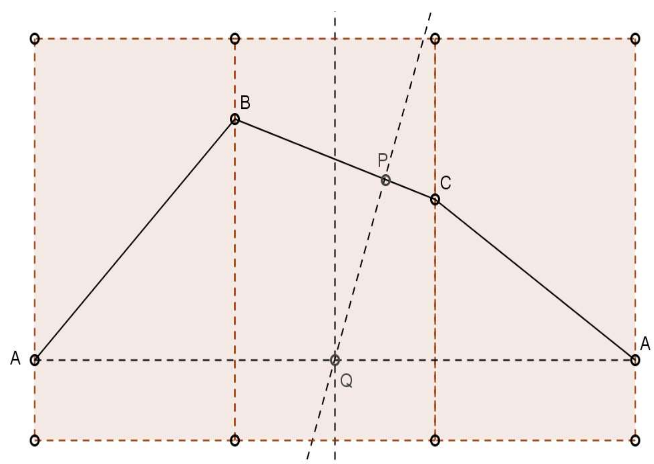


P es el punto medio entre *A* y *O*, *P'* es el simétrico de *P* respecto de *O* que es el punto medio del lado *B'C'* (el baricentro descompone a la mediana en la relación *2:1*). Los vértices *B'* y *C'* están en la intersección del contorno de *ABC* y el contorno del triángulo obtenido al simetrizar *ABC* respecto de *P'*.(se elige uno en *AC* y otro en *AB*).

3. Un plano secciona a un prisma recto, cuya base es un triángulo equilátero, en el triángulo *ABC*. La figura muestra el desarrollo de las caras laterales del prisma y los lados de *ABC*. Ubica sobre el lado *BC* el pie de la altura de *ABC* correspondiente al vértice *A*.



Solución: Primero buscamos el pie de la perpendicular por *A* a la cara que contiene a *BC*. Al plegar las caras que contiene a *AB* y a *CA* hasta que sus bordes se encuentren, el segmento que une los dos puntos nombrados con *A* se transformará en un triángulo equilátero, de modo que el pie buscado es el punto Q de la



figura, (punto medio del segmento *AA*)

Ahora marcamos *P* el pie de la perpendicular por *Q* al lado *BC* (en el plano *QCB*). Los segmentos *AQ* y *QP* son perpendiculares a *BC* (AQ es perpendicular a la cara que contiene a BC), luego *BC* es perpendicular al plano que pasa por *AQP*, de manera que *AP* es perpendicular a *BC*.