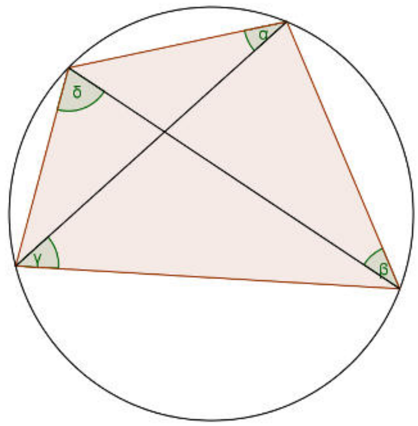
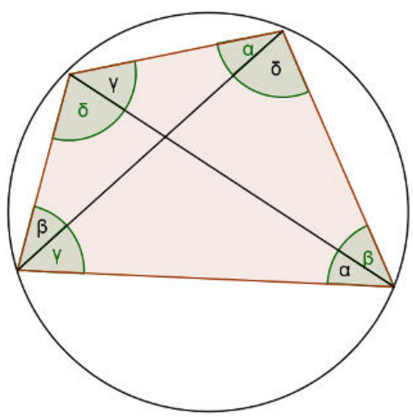
TORNEOS GEOMÉTRICOS 2016 Segunda Ronda

Soluciones 1º Nivel

1. Halla la suma de los ángulos marcados en el cuadrilátero inscripto en la circunferencia, como indica la figura.

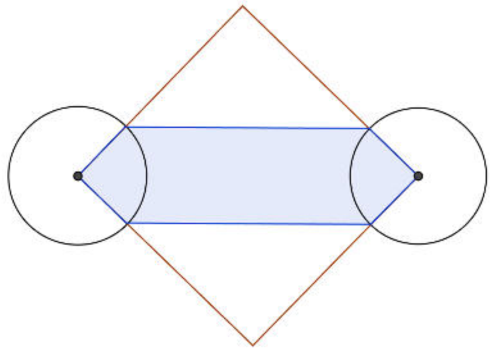


Solución: Por la propiedad del ángulo inscripto en una circunferencia, las diagonales de un cuadrilátero inscriptible dividen a los ángulos del mismo del modo indicado en la siguiente figura.



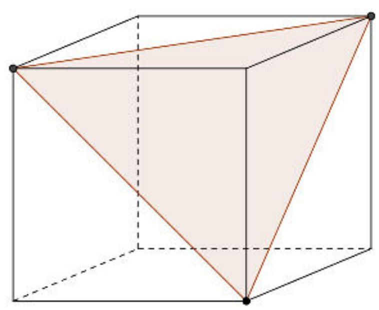
En consecuencia, la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero dado es $2(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 360$, es decir la suma buscada es 180º.

2. En vértices opuestos de un cuadrado de *6cm* de lado, se centran dos circunferencias de radio *2cm* cada una. Halla el área del hexágono indicado en la figura.



Solución: Los dos triángulos en blanco pueden unirse para formar un cuadrado de *4cm* de lado, de modo que el área del hexágono es $(6^2-4^2)\ cm^2 = 20\ cm^2$.

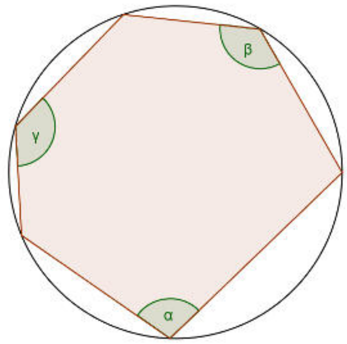
3. En la figura, tres vértices del cubo se usan para inscribir un triángulo de perímetro *6cm*.
Determina el área del cubo.



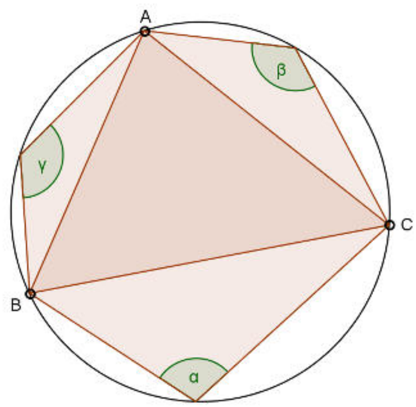
Solución: Cada lado del triángulo es igual a una diagonal de la cara del cubo que lo contiene. El triángulo resulta equilátero y el valor de las diagonales del cubo es *2cm*. Como el área de un cuadrado puede obtenerse como la mitad del producto de sus diagonales, cada cara del cubo tiene $2cm^2$ de área y la superficie del cubo será $12cm^2$.

Soluciones 2º Nivel

1. Halla la suma de los ángulos marcados en el hexágono inscripto en la circunferencia, como indica la figura.

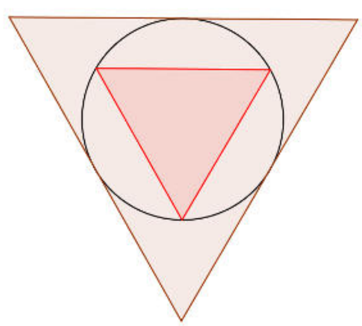


Solución: Teniendo en cuenta que la suma de los ángulos opuestos en un cuadrilátero inscripto en una circunferencia es 180º, los ángulos del triángulo *ABC* dado en la figura (el triángulo forma parte de tres cuadriláteros inscriptos),



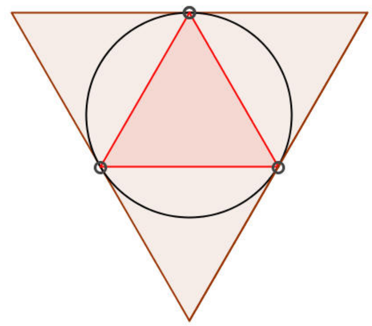
miden 180-α, 180-β y 180-γ. Dado que deben sumar 180º, resulta α+β+γ = 360º.

2. Los triángulos inscripto y circunscripto en la circunferencia de la figura, son equiláteros.



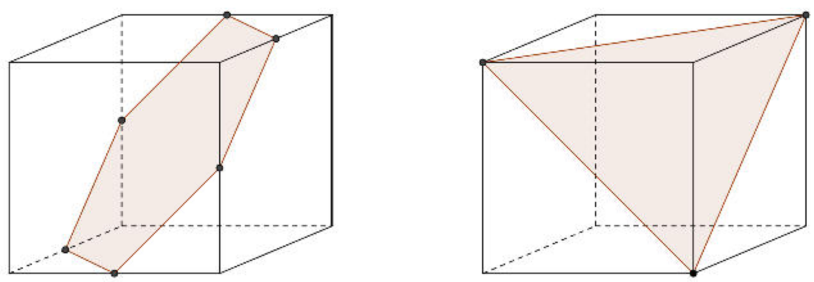
Si el inscripto tiene área *1 cm*^{2} ¿Cuál es el área del circunscripto?

Solución: El triángulo inscripto puede girarse 180º alrededor de su centro y sus vértices quedarán sobre los puntos medios del triángulo circunscripto. Se particiona de esta manera el triángulo circunscripto en 4 triángulos congruentes, como se observa en la siguiente figura:



Luego el área del triángulo circunscripto es *4 cm²*.

3. Dados dos cubos de dimensiones iguales, en uno de ellos se ha inscripto un hexágono usando puntos medios de aristas del cubo y en el otro, un triángulo usando vértices del mismo.

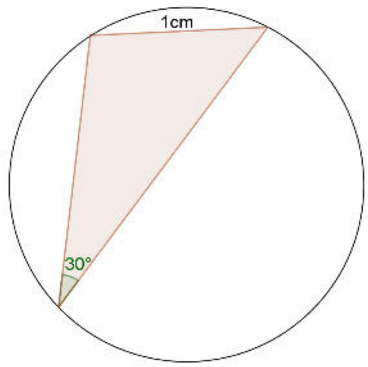


Si el perímetro del triángulo es *12cm*, determina el perímetro del hexágono.

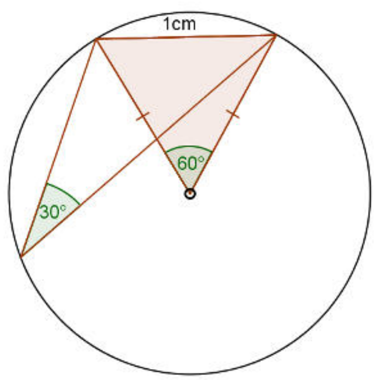
Solución: El lado del hexágono es igual a media diagonal de una cara del cubo y el lado del triángulo es igual a una de estas diagonales. En consecuencia, ambos tienen perímetro igual a *12 cm*.

Soluciones 3º Nivel

1. En la circunferencia se ha inscripto un triángulo con un ángulo de *30º*, teniendo el lado opuesto *1 cm* de longitud. Halla el diámetro de esta circunferencia.

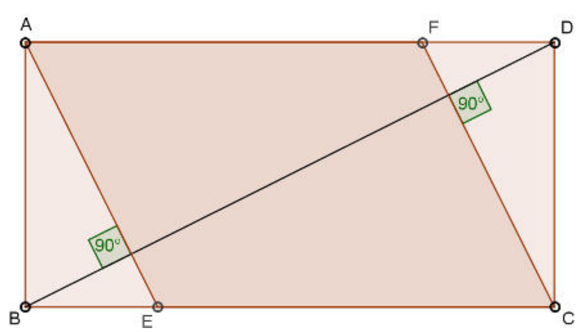


Solución: El ángulo inscripto en la circunferencia es la mitad del ángulo central.



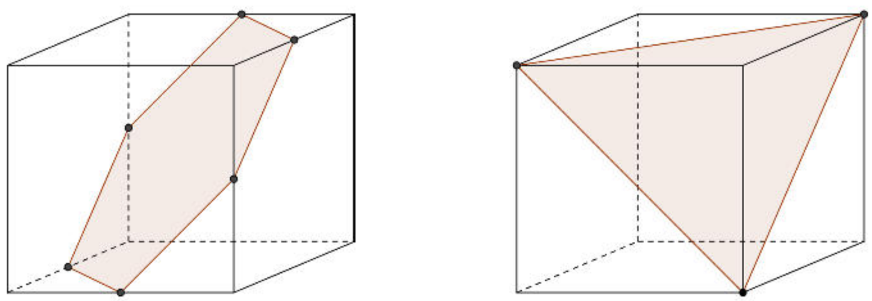
En consecuencia, el triángulo que se forma con el centro de la circunferencia y el lado del triángulo inscripto de *1 cm* es isósceles y el ángulo opuesto a dicho lado mide *60º*, de donde sigue que el triángulo es equilátero. Luego el radio de la circunferencia mide *1 cm* y el diámetro *2 cm*.

2. Los lados del rectángulo *ABCD* miden *4 cm* y *8 cm*. Los segmentos *AE* y *CF* son perpendiculares a la diagonal *BD*. Encuentra el área del paralelogramo *AECF*.



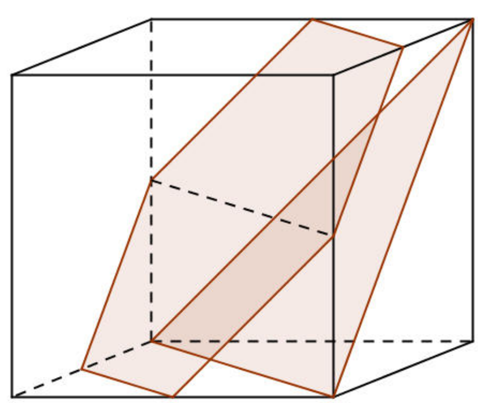
Solución: Llamamos x al ángulo opuesto al lado BE en el triángulo ABE y sea y el ángulo opuesto al lado AB en el triángulo ABD. Si N es la intersección de la diagonal BD con el lado AE, en el triángulo AND la suma de sus ángulos interiores $90º - x + 90º + y = 180º$ implica $x=y$. Luego los triángulos ABE y DAB son semejantes, de donde surge la igualdad $\frac{BE}{AB}=\frac{AB}{DA}$, equivalente a $BE/4 = 4/8$, o sea $BE = 2$ y el área de $AECF$ es $(6\times4)\ cm^2 = 24\ cm^2$.

3. Dados dos cubos de dimensiones iguales, en uno de ellos se ha inscripto un hexágono usando puntos medios de aristas del cubo y en el otro, un triángulo usando vértices del mismo.

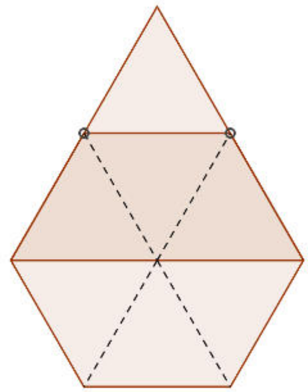


El área del triángulo es $12\ cm^2$, halla el área del hexágono.

Solución: El triángulo y el hexágono pueden dibujarse en planos paralelos.



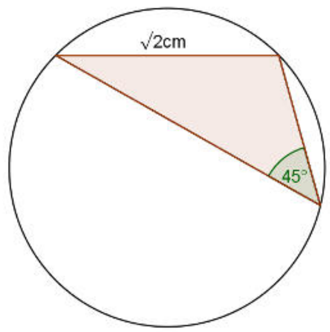
Claramente el triángulo es equilátero. Por otra parte se tiene que las diagonales del hexágono son iguales al lado del triángulo, que cada lado del hexágono es paralelo a un lado del triángulo y que mide la mitad de éste. Entonces es posible superponer el hexágono y el triángulo usando los puntos medios de dos lados del triángulo como muestra la siguiente figura.



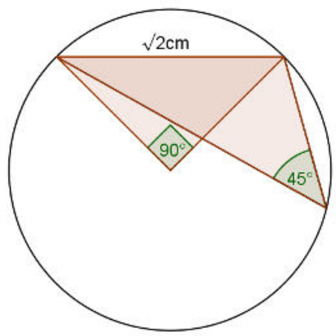
Dado que el triángulo tiene área *12* cm^2 y se descompone en 4 triángulos congruentes de área *3* cm^2 cada uno, resulta que el área del hexágono, formado por 6 de tales triángulos, es *18* cm^2.

Soluciones 4º Nivel

1. En la circunferencia se ha inscripto un triángulo con un ángulo de *45º* y el lado opuesto de *√2cm* de longitud. Halla el diámetro de esta circunferencia.

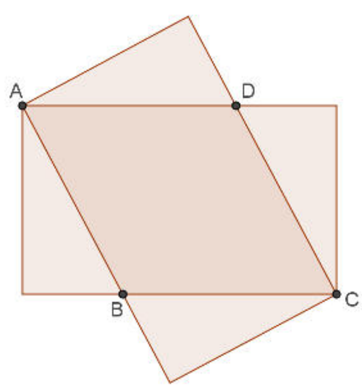


Solución: El ángulo inscripto en la circunferencia es la mitad del ángulo central.

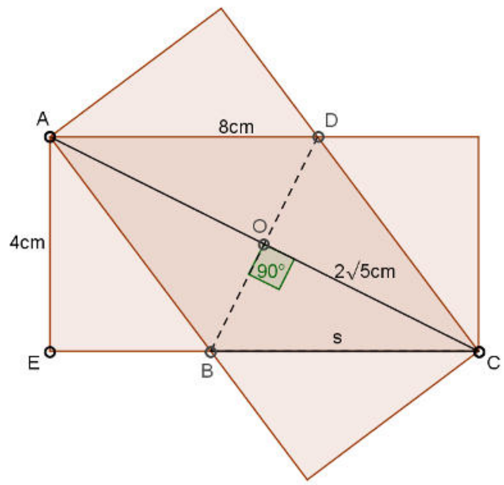


Si r es el radio de la circunferencia, por Pitágoras, debe ser $2 = 2r^2$, es decir el radio es de *1cm* y el diámetro será de *2cm*.

2. Los dos rectángulos de la figura son iguales y sus lados miden *8cm* y *4cm*. Calcula el área del cuadrilátero *ABCD*, intersección de ambos rectángulos.



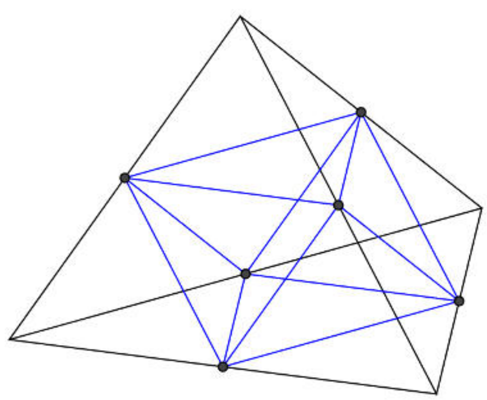
Solución: Un rectángulo se obtiene del otro por la reflexión respecto de la recta *AC*.



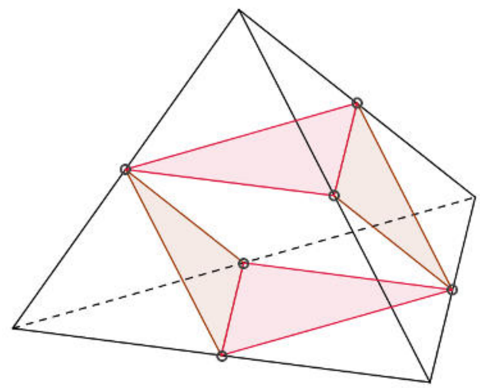
Como el punto *B* se refleja sobre el punto *D*, *BD* y *AC* son perpendiculares. Por Pitágoras, la longitud de *OC* es de *2√5cm*. Los triángulos *AEC* y *BCO* son semejantes, por ser rectángulos y compartir el ángulo en *C*. Llamando *s* a la longitud de *BC*, por la semejanza de los triángulos debe ser $\frac{s}{4\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{8}$, es decir *s = 5*. En consecuencia, el área del paralelogramo *ABCD* es

$$5 \times 4 \ cm^2 = 20 \ cm^2.$$

3. Los puntos medios de las aristas de un tetraedro de *30 cm²* de área, son los vértices de una bipirámide. Halla el área de la bipirámide.

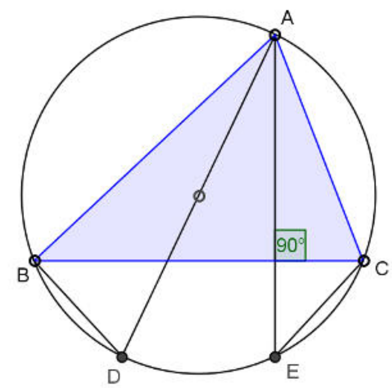


Solución: La siguiente figura muestra que las *8* caras de la bipirámide pueden ser apareadas de modo que en cada par las caras sean iguales al triángulo de puntos medios de alguna cara del tetraedro. En conclusión el área de la bipirámide es $15 \ cm^2$.

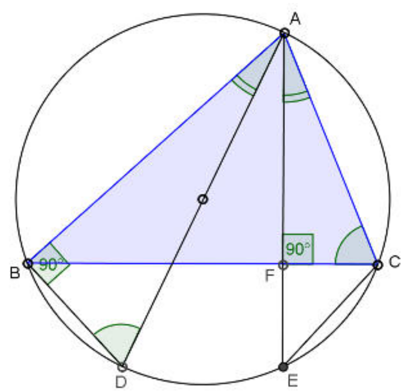


Soluciones 5º Nivel

1. El triángulo ABC está inscripto en una circunferencia. AD es un diámetro y la cuerda AE es perpendicular a BC. Muestra que *BD* = *CE*.

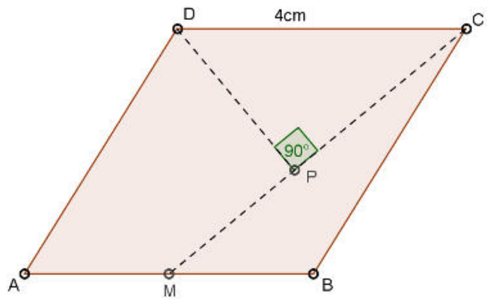


Solución: Por asociarse con la cuerda *AB*, los ángulos indicados en *C* y *D* son iguales y el ángulo *DBA* es recto por ser AD un diámetro.

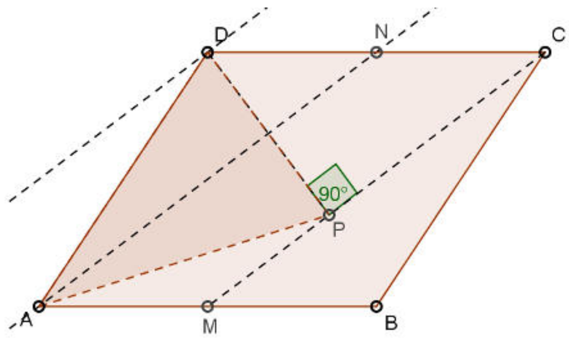


En consecuencia, los triángulos *ABD* y *AFC* son semejantes, es decir que los ángulos marcados en *A* son iguales, por lo tanto, las cuerdas *BD* y *CE* son iguales.

2. En el rombo *ABCD* de *4cm* de lado, el punto *P* se encuentra en el segmento que une *C* con el punto medio *M* de *AB* y en la perpendicular a *MC* que pasa por *D*. Encuentra la distancia entre *A* y *P*.

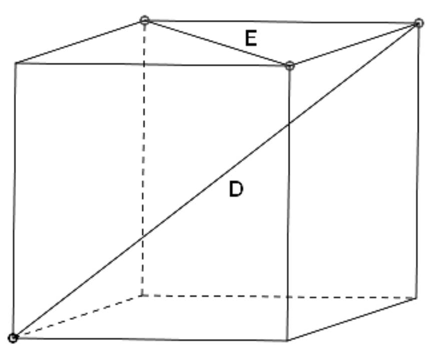


Solución: Si trazamos rectas paralelas a *MC* por *D* y por el punto medio *N* de *CD*:

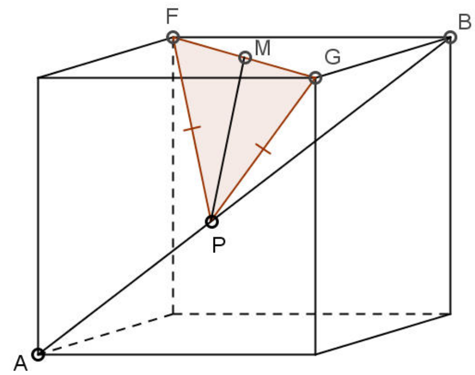


usando el teorema de Thales, podemos observar que en el triángulo *APD* la mediana y la altura que parten de *A* coinciden, esto indica que es un triángulo isósceles con base *DP*, luego *AP = AD* mide *4 cm*.

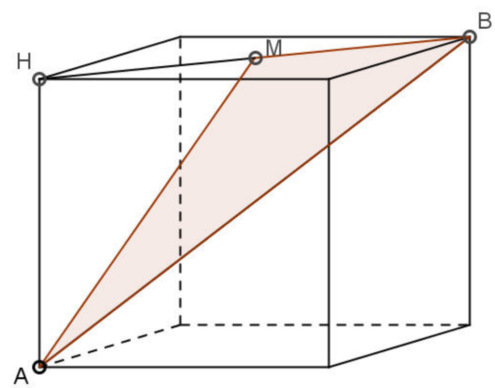
3. Se tiene que unir con una cuerda la diagonal *D* con la diagonal *E* de un cubo cuyas aristas miden *6 m*. Se puede hacer esto con una cuerda de *2,40 m*?



Solución: Como los extremos *A* y *B* de la diagonal *D* están en el plano bisector de la diagonal *E*, entonces toda la diagonal *D* se encuentra en este plano. Si *F* y *G* son los extremos de *E*, para cualquier punto *P* en *D* el triángulo *FPG* es isósceles,



y por este motivo, la distancia desde *P* a un punto de *E* es mayor o igual que la distancia de *P* al punto medio *M* de *E*. Resulta entonces que para establecer la menor distancia desde un punto de *D* a un punto de *E*, bastará establecer la menor distancia desde un punto de *D* al punto *M*, pero esto sería el valor de la altura *h* del triángulo *ABM* que parte desde *M*. Determinaremos el valor de *h.* De la siguiente figura:



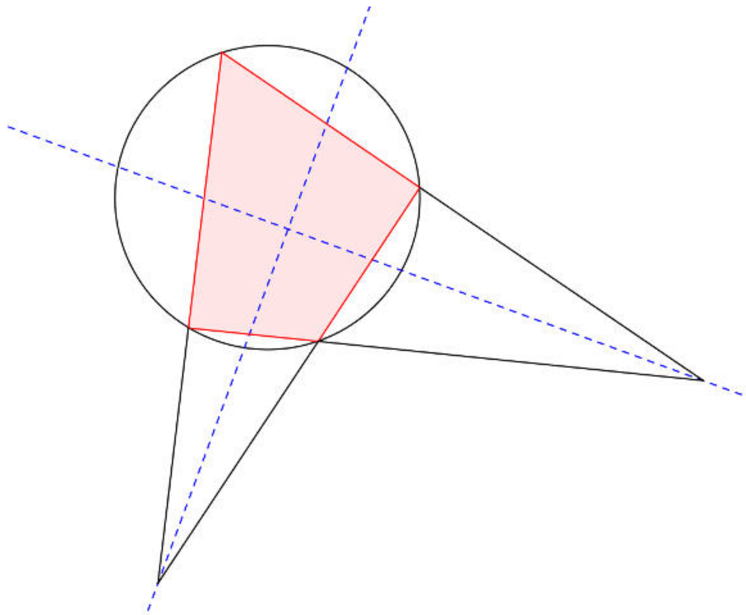
surge que el área de *ABM* por 2 es igual a *AH×MB = AB×h* (1). Usando Pitágoras se obtiene

$$MB = \frac{1}{2}HB = 3\sqrt{2} \quad \text{y} \quad AB = 6\sqrt{3}.$$

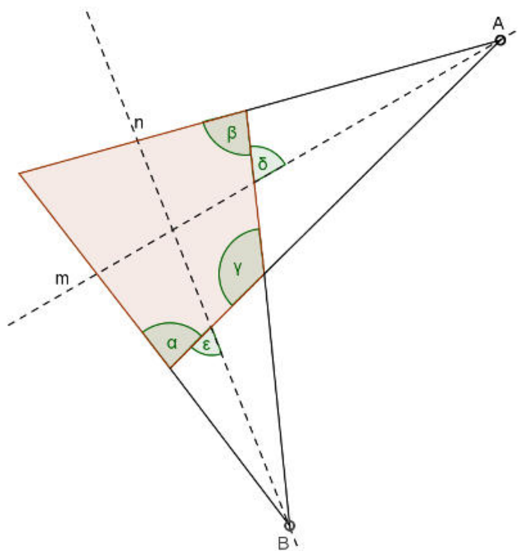
Dado que *AH* = 6 m, resolviendo (1) se obtiene $6\text{x}3\sqrt{2} = 6\sqrt{3}\text{x}h,$ de donde sigue $h = \sqrt{6}.$
Como $\sqrt{6} > 2,40$ no es posible unir con una cuerda la diagonal *D* con la diagonal *E* con una cuerda de *2,40 m.*

Soluciones Nivel 6

1. Halla el ángulo entre la bisectrices de los ángulos formados por las prolongaciones de los lados de un cuadrilátero inscripto en una circunferencia.



Solución: Consideremos la situación general dada en la figura donde *m* y *n* son las bisectrices de los ángulos en *A* y *B* respectivamente. Buscamos el ángulo δ expresado en función de α, β y γ.



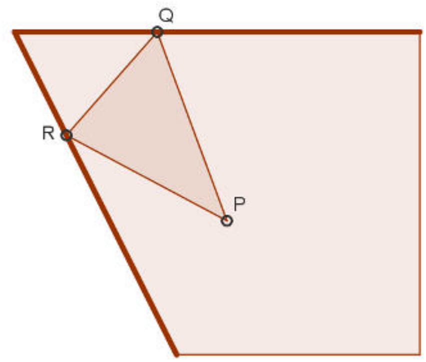
En el vértice A el ángulo es 180-(180-β)-(180-γ) = β+γ-180, luego:

$$\delta = 180-(180-\beta)-\tfrac{1}{2}(\beta+\gamma-180) = 90+\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

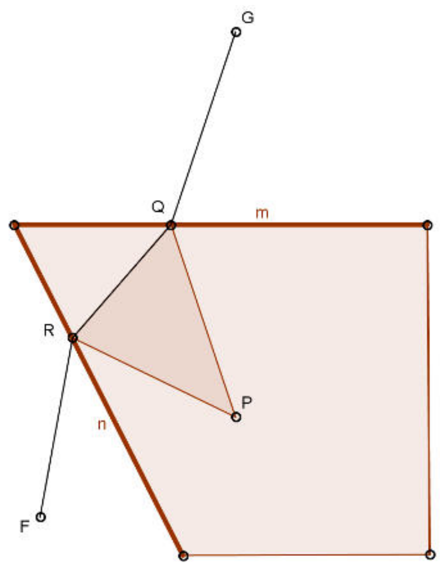
Análogamente, se tiene $\varepsilon = 90+\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma)$. Como la suma de los ángulos interiores del cuadrilátero destacado en la figura en 360, el ángulo entre las bisectrices es $360-\gamma-(90+\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma))-(90+\tfrac{1}{2}(\alpha-\gamma))$, resulta este ángulo igual a $180-\tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

En la situación del problema, al tratarse de un cuadrilátero inscriptible, es α+β = 180º, en consecuencia, el ángulo entre la bisectrices es 90º.

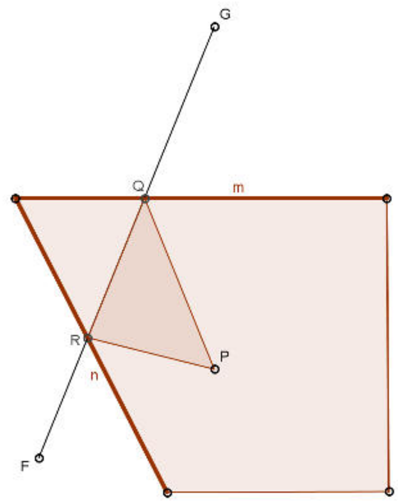
2. En el interior de un terreno con forma de cuadrilátero se encuentra un poste en *P*. Explica cómo ubicar un poste en cada lado destacado del terreno de manera que para el alambrado de la parcela triangular *PQR* determinada por los tres postes, se utilice la menor cantidad posible de metros.



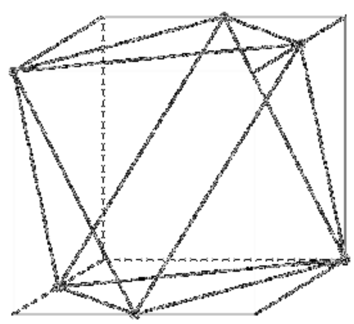
Solución: Sean *F* y *G* los puntos simétricos de *P* respecto de los lados *n* y *m* del terreno.



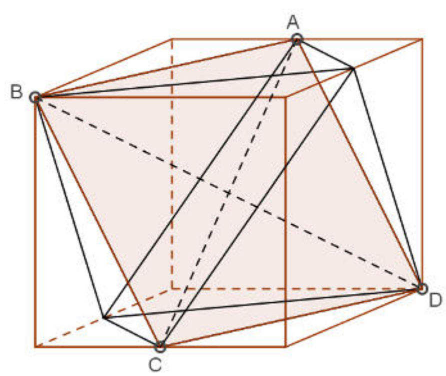
El perímetro de un triángulo *PQR*, como los que se consideran, coincide con la longitud de la poligonal *FRQG*. Ahora, si ubicamos *R* y *Q* en la intersección del segmento *FG* con los lados *n* y *m* del terreno, tendremos el triángulo de perímetro mínimo.



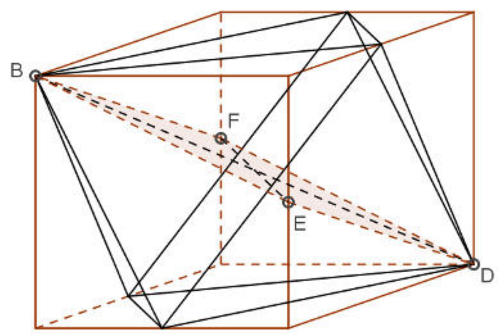
3. En un cubo de *2 cm* de arista, la bipirámide inscripta tiene por vértices a puntos medios de aristas del cubo y a dos vértices opuestos del mismo. Halla el volumen de la bipirámide.



Solución: La base de la bipirámide es un paralelogramo, ya que los lados opuestos, sobre la cara inferior y cara superior del cubo, son paralelos y de igual longitud. Por otra parte, las diagonales de este paralelogramo tienen la misma longitud que una diagonal de una cara del cubo, es decir, la base de la bipirámide es un rectángulo cuyos lados, por Pitágoras, miden $\sqrt{2}$ *cm* y $\sqrt{6}$ *cm*. Para evaluar la altura de la bipirámide, consideremos el rombo *ABCD* en la figura:



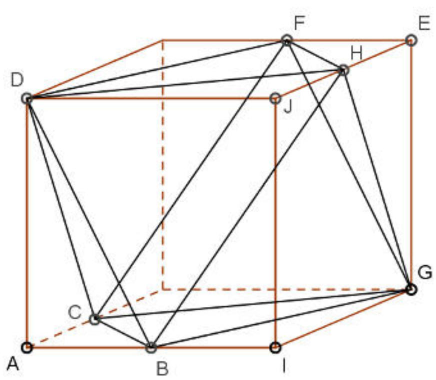
La diagonal *BD* del cubo, es también diagonal del rombo, de modo que BD es perpendicular a *AC*. En forma análoga, el rombo *BEDF*,

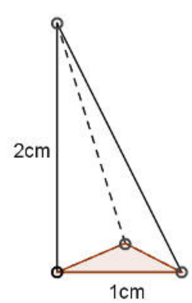


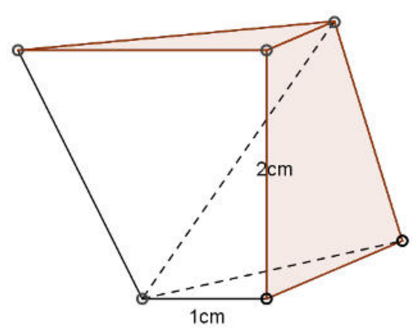
muestra que *BD* es perpendicular a *EF*, siendo *F* y *G* los respectivos puntos medios de las aristas del cubo en la que se encuentran. Resulta entonces que *BD* es perpendicular a la base de la bipirámide, es decir, la altura de la bipirámide es la longitud de *BD* igual a $\sqrt{12}$ cm. Se concluye que el volumen de la bipirámide es:

$$\frac{1}{3}\sqrt{2}\sqrt{6}\sqrt{12}cm^3 = 4cm^3.$$

Otra solución: La bipirámide puede obtenerse quitando del cubo dos tetraedros iguales, el *ABCD* y el *EFGH*, y dos cuerpos poliédricos iguales, uno de ellos al frente es el *DBIGHJ* y se ilustra en la figura, el otro está por detrás de la bipirámide.







Puede observarse que el cuerpo poliédrico es unión de una pirámide con base trapezoidal y un tetraedro. Los volúmenes de las piezas consideradas son: $\frac{1}{3}cm^3$ para el tetraedro y $\frac{5}{3}cm^3$ para el cuerpo poliédrico. Se concluye que el volumen de la bipirámide es *4 cm³.*