

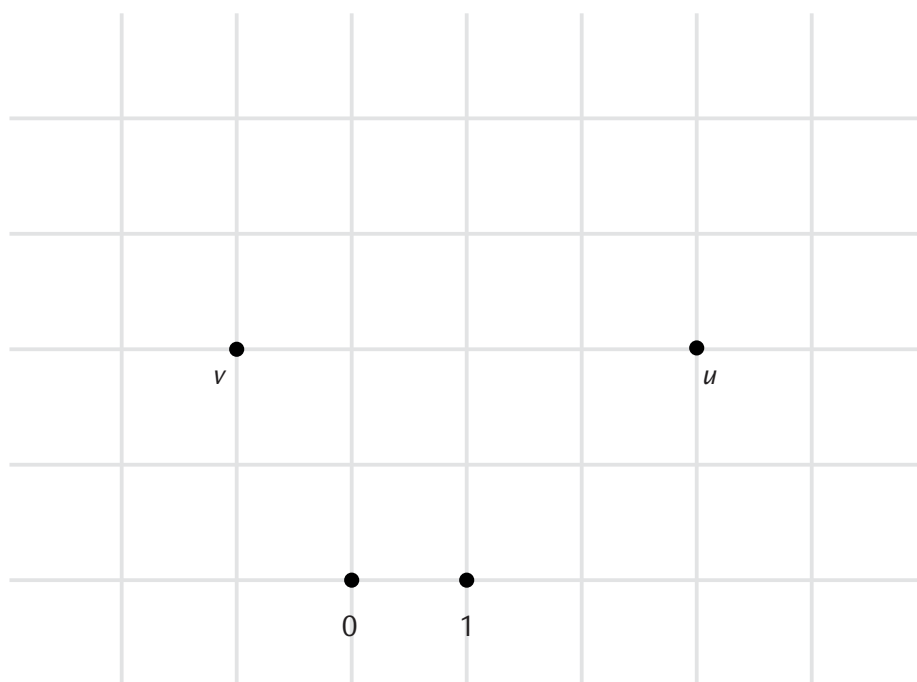


8

OCTAVA NOTA

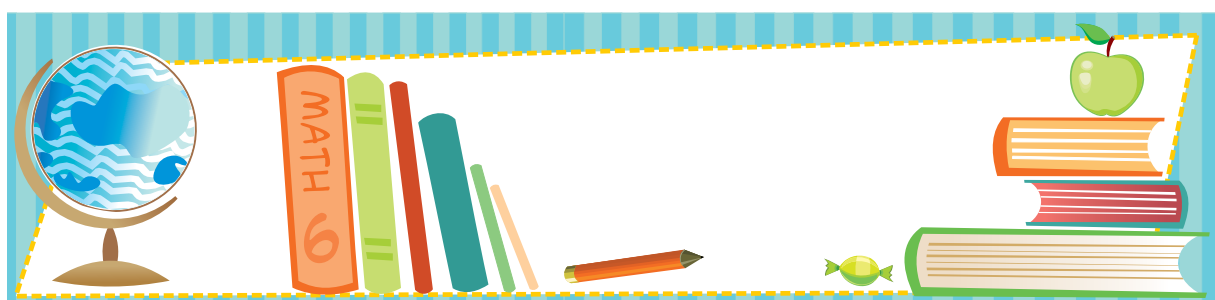
Los números complejos en la geometría del plano. Teorema de Ptolomeo.
Potencia

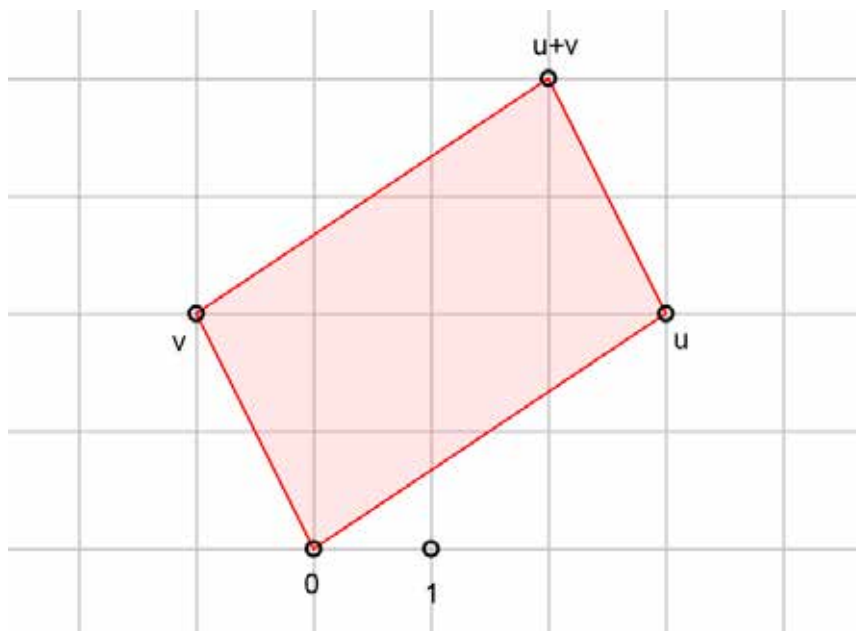
Problema 1 Dados los puntos u y v en la siguiente figura, calcular geoméricamente la suma $u + v$. Evaluar esta misma suma usando las formas binómicas de u y v obtenidas de la información que brinda la cuadrícula en la figura siguiente.



Solución

Construimos el paralelogramo indicado a continuación en la figura





El nuevo punto, vértice del paralelogramo, es el número complejo $u + v$.

Por otro lado, dadas las posiciones de 0 y 1 en la figura, de la cuadrícula surge que:

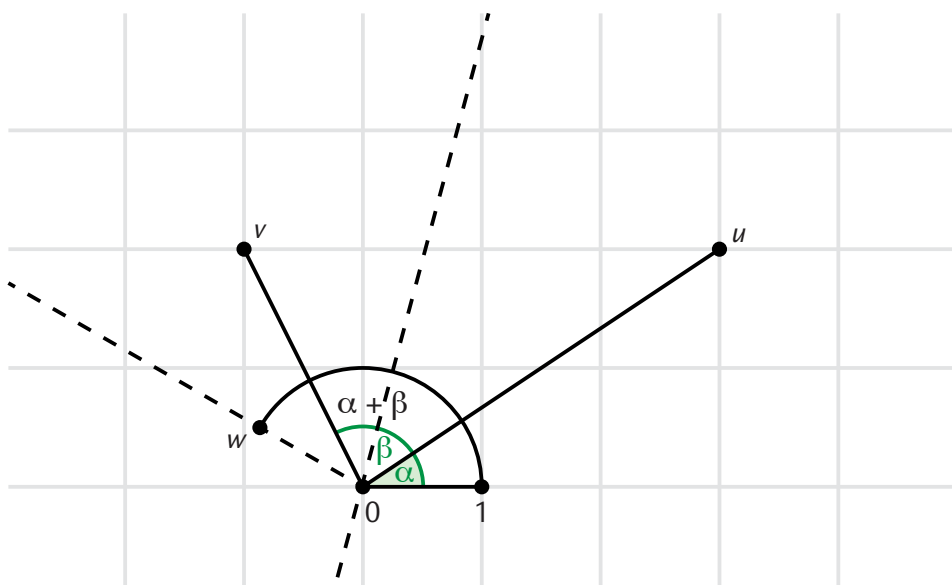
$$u = 3 + 2i, v = -1 + 2i$$

$$u + v = 3 + 2i + (-1 + 2i) = 2 + 4i$$

Problema 2 Usando la figura del Problema 1, hallar geoméricamente el producto $u \cdot v$ y comprobar que coincida con el resultado que se obtiene si se usa la forma binómica.

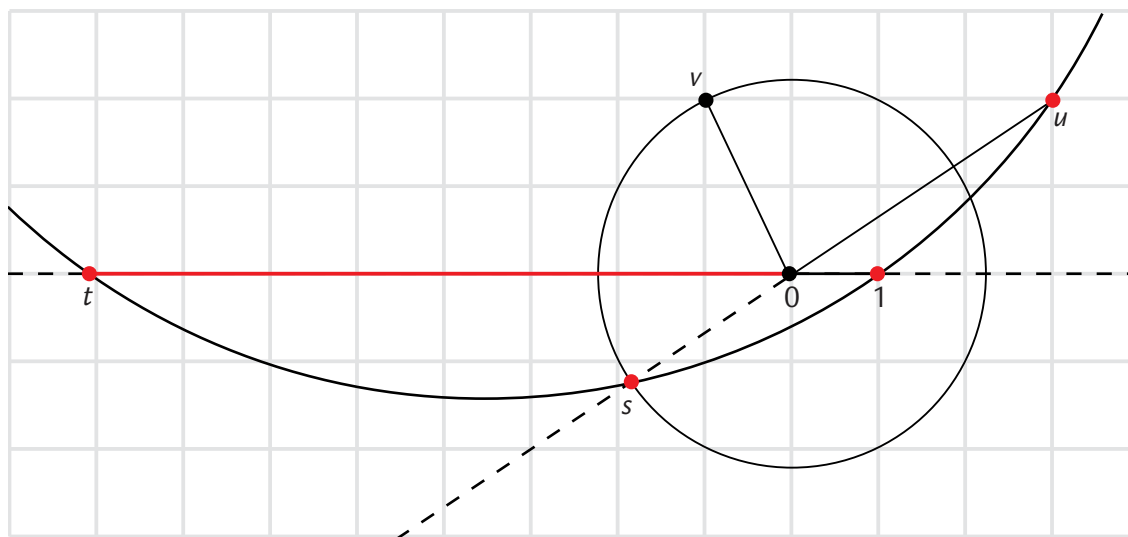
Solución

Para multiplicar geoméricamente, encontraremos el argumento y el módulo del producto en forma geométrica. El argumento del producto es la suma de los argumentos de los factores: si el argumento de u es α y el de v es β , entonces el argumento de $u \cdot v$ es $\alpha + \beta$; en este caso, según la figura, α es el ángulo $\angle u0v$ y β es el ángulo $\angle v0w$. Trazamos la bisectriz del ángulo $u0v$ y consideramos w el punto simétrico de 1 respecto de dicha bisectriz. El argumento de w , o sea, el ángulo $\angle w0v$, es $\alpha + \beta$, que también es el argumento de $u \cdot v$.



El número $u \cdot v$ estará ubicado en la semirrecta $0w$. Para determinarlo será necesario conocer su módulo.

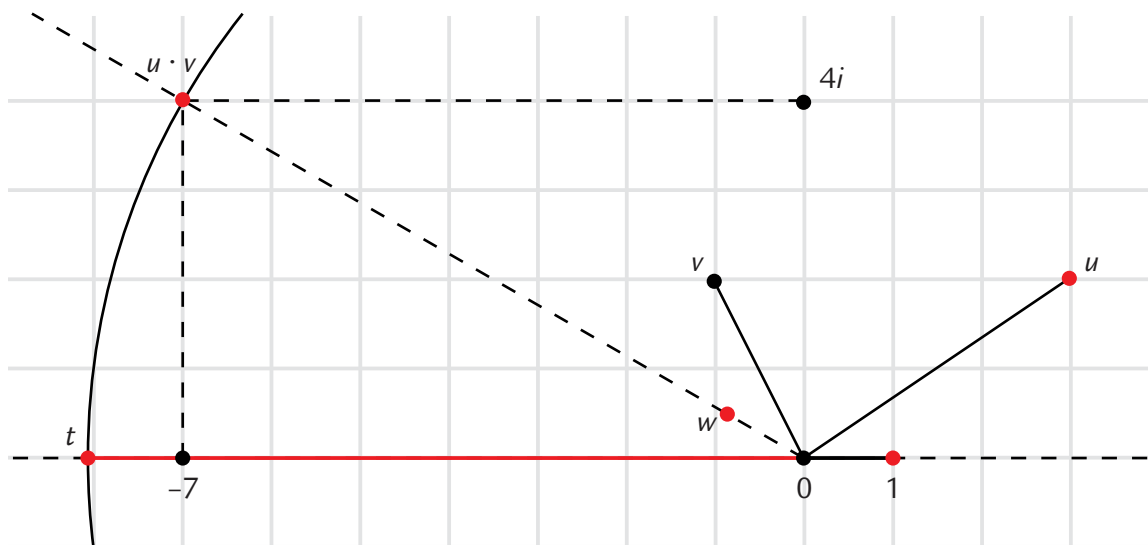
Trazamos la circunferencia con centro en 0 que pasa por v y corta a la semirrecta $u0$ en el punto s ; luego trazamos la circunferencia que pasa por los puntos s , 1 y u y que corta a la recta 01 en el punto t , como se ilustra a continuación.



Teniendo en cuenta la potencia de 0 respecto de esta última circunferencia, se verifica la identidad:

$$|1| \cdot |t| = |s| \cdot |u|.$$

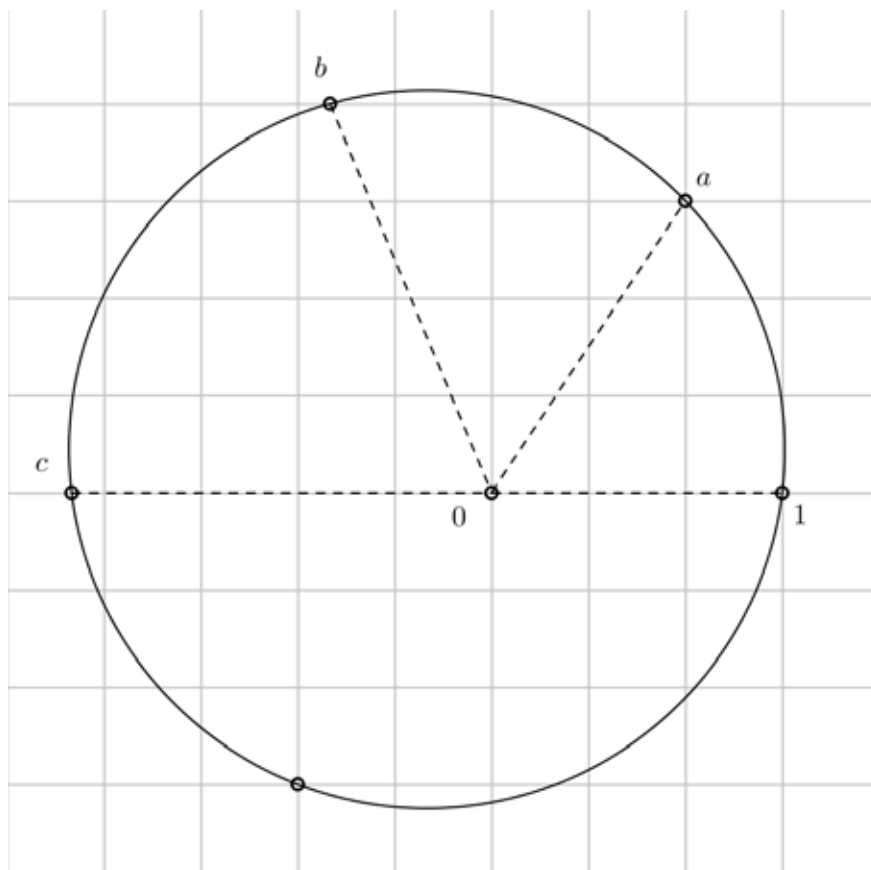
Dado que $|s| = |v|$, resulta que $|u \cdot v| = |t| = |u| \cdot |v|$.



De la figura surge que $u \cdot v = -7 + 4i$. Si operamos con las formas binómicas, obtenemos:

$$(3 + 2i) \cdot (-1 + 2i) = 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 2i + 2i \cdot (-1) + 2i \cdot 2i = -7 + 4i$$

Problema 3 En la figura representada en la cuadrícula, el número complejo a está en la bisectriz del ángulo $10b$ y los números b y c tienen igual módulo. Con los datos de la figura, hallar la forma binómica de los números complejos b y c .



Solución

Según la cuadrícula, el punto sin nombre marcado en la figura es $-a$, por lo tanto, la potencia de 0 respecto de la circunferencia es $|a|^2$ y debe coincidir con el valor obtenido si se evalúa sobre la cuerda $1c$, es decir, $c = -|a|^2 + 0 \cdot i$. El argumento de b es el doble del argumento de a , por estar a en la bisectriz de $10b$, el módulo de b es igual al módulo de c , igual a $|a|^2$. Resulta entonces que b es a^2 y de la cuadrícula surge que $a = \frac{2}{3} + i$ de modo que:

$$b = \left(\frac{2}{3} + i\right)^2 = -\frac{5}{9} + \frac{4}{3}i$$

$$c = -\frac{13}{9}$$

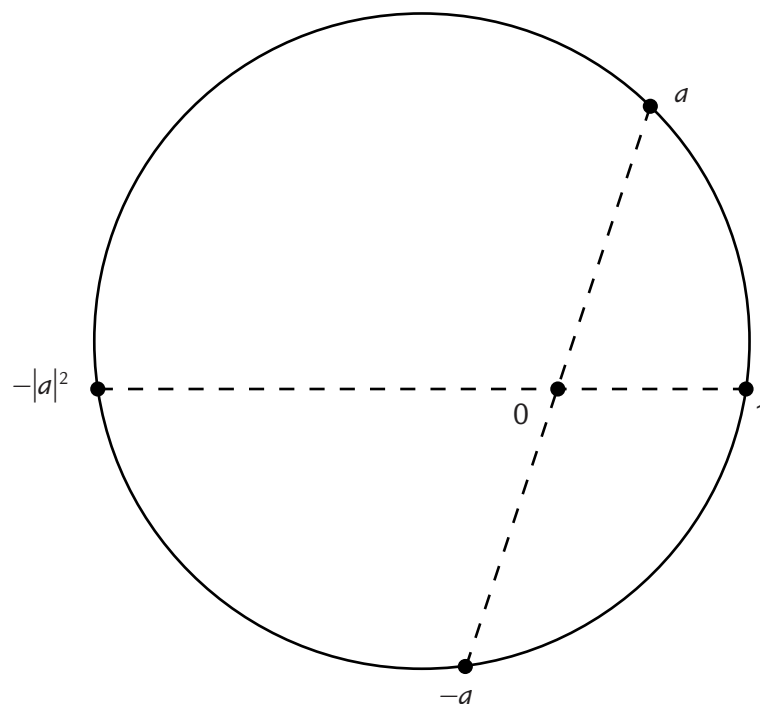
Problema 4 Sea a un número complejo no real. Mostrar que el hexágono cuyos vértices están dados por:

$$1, a, a^2, -|a|^2, -a, -\frac{a^2}{|a|^2}$$

puede inscribirse en una circunferencia.

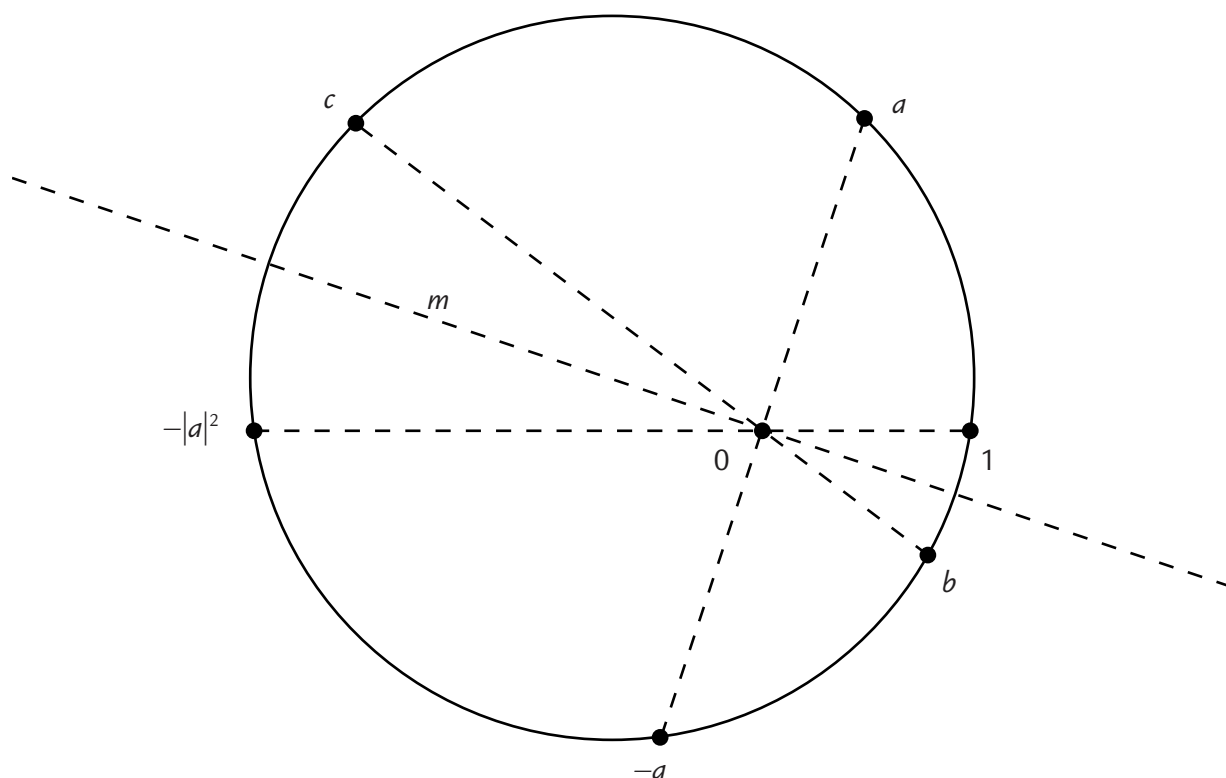
Solución

Como a no es real, los puntos $1, a, -a$ no están alineados. Podemos considerar la circunferencia que pasa por estos puntos, en la que destacamos las cuerdas que pasan por 01 y $0a$.



Teniendo en cuenta que la potencia de 0 respecto de la circunferencia es $|a|^2$, en el extremo izquierdo de la cuerda que parte de 1 tenemos el número $-|a|^2$. La mediatriz m de la cuerda $-aa$ pasa por el centro de la circunferencia, de modo que los puntos simétricos b y c de 1 y $-|a|^2$, respectivamente, están en la circunferencia. La mediatriz m es la bisectriz del ángulo $b01$; en consecuencia, la cuerda $-aa$ está sobre la bisectriz del ángulo $10c$, vale decir que c tiene el doble del argumento de a y su módulo es $|a|^2$, debe ser $c = a^2$. Finalmente, b es de módulo 1, por ser el simétrico de 1 respecto de m y el argumento de $\frac{b}{c}$ es 180° y su módulo es $\frac{1}{|a|^2}$, o sea que

$$b = -\frac{a^2}{|a|^2}$$



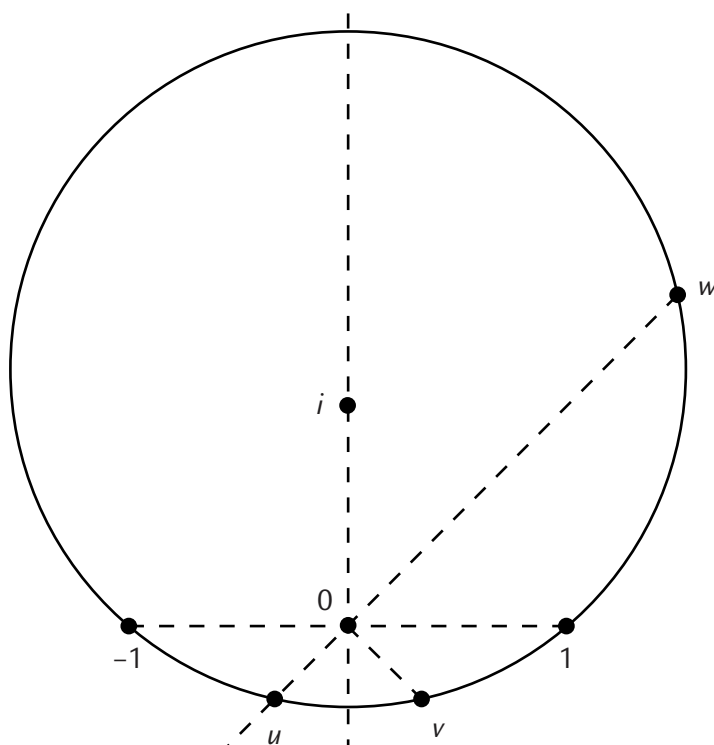
Problema 5 Dados los números complejos 0, 1 y w , calcular geoméricamente w^{-1} .

• w

• 0 • 1

Solución

Marcamos -1 como el punto simétrico de 1 respecto de 0. Trazamos la circunferencia que pasa por -1 , 1 y w . La semirrecta $w0$ corta a la circunferencia en el punto u de la figura.



Marcamos el punto v simétrico de u respecto de la recta $0i$. Consideremos la potencia de 0 respecto de la circunferencia, ésta puede ser calculada de dos formas, dando lugar a la identidad:

$$|1| \cdot |-1| = |w| \cdot |u|$$

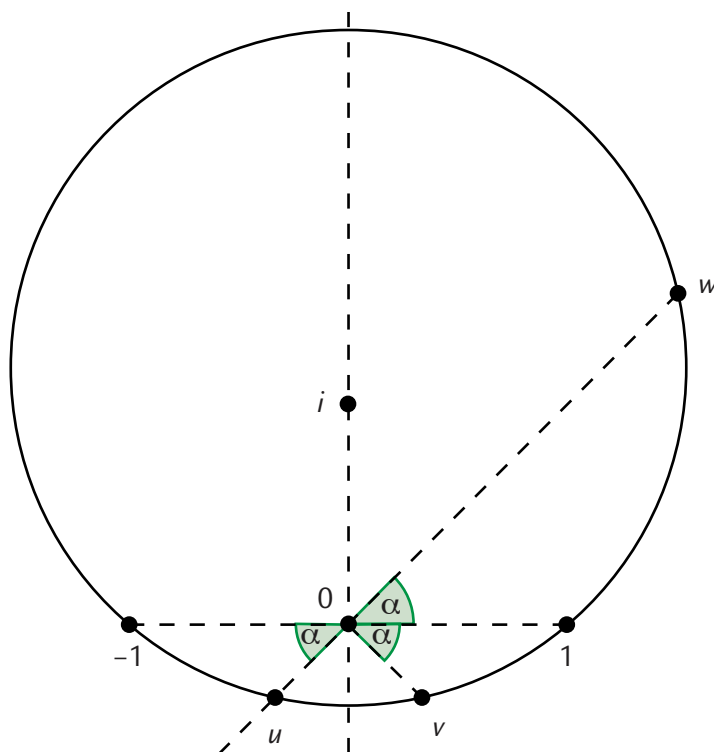
es decir:

$$|w| \cdot |u| = 1 \text{ y } |u| = |v|$$

El número $v \cdot w$ tiene módulo 1, dado que:

$$|w \cdot v| = |w| \cdot |v| = |w| \cdot |u| = 1$$

Los ángulos marcados en la figura con la letra α son de igual medida, dos por ser opuestos por el vértice y otros dos por ser simétricos respecto de la recta $0i$.



Resulta que la suma de los argumentos de w y v es de 360° , de modo que $w \cdot v$ es un número real positivo de módulo 1; entonces, debe ser $w \cdot v = 1$, o sea, $v = w^{-1}$.

Problema 6 Hallar, geoméricamente, las raíces cuadradas del número complejo u según los datos presentados en la figura.



u

0 1

Solución

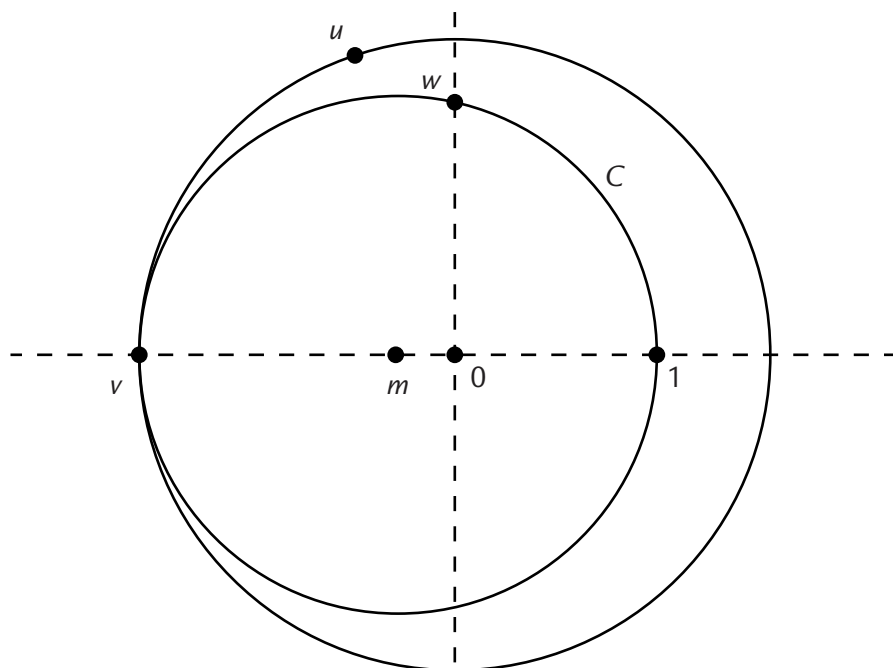
Tomamos los números complejos que estén sobre la bisectriz del ángulo $10u$ y que tengan por módulo a la raíz cuadrada del módulo de u .

Construimos primero la circunferencia de radio $\sqrt{|u|}$ siguiendo los pasos que detallamos a continuación:

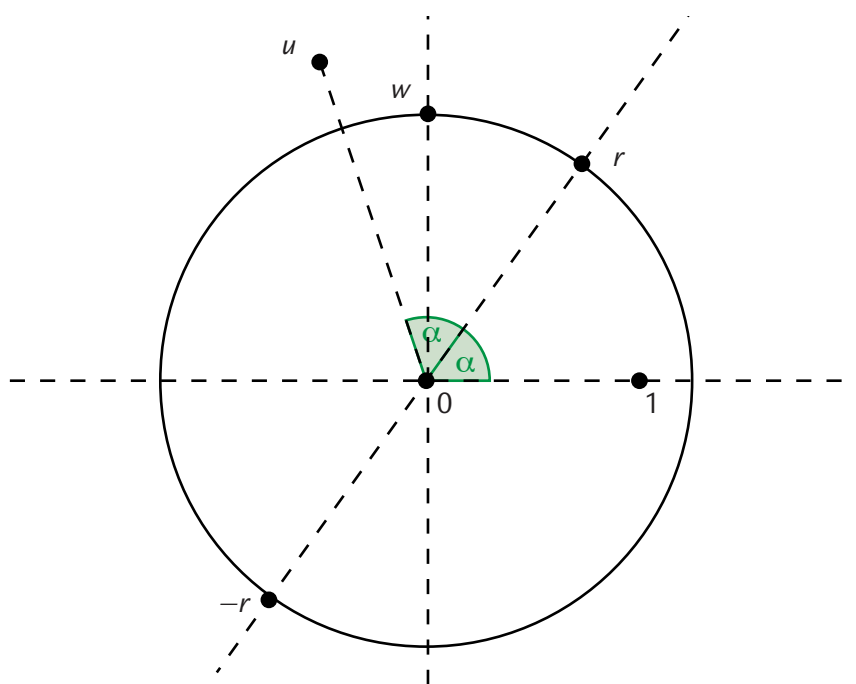
- Trazamos la circunferencia con centro en 0 que pasa por u .
- Trazamos la recta 01 y marcamos v en su intersección con la circunferencia anterior.
- Tomamos m el punto medio entre 1 y v .
- Trazamos la circunferencia C con centro en m que pasa por v .



- Trazamos la recta perpendicular a 01 que pasa por 0 y marcamos w en su intersección con la circunferencia C .



Si se tiene en cuenta la potencia de 0 respecto de la circunferencia C , resulta que $|w| = \sqrt{|u|}$.



El número r , indicado en la figura precedente, tiene por argumento a la mitad del argumento de u y por módulo a la raíz cuadrada del módulo de u , de modo que:

$$r^2 = u.$$

Teniendo en cuenta que $(-r)^2 = r^2$, los números r y $-r$ son las raíces cuadradas de u .

Problema 7 Describir qué transformaciones del plano representan las siguientes funciones:

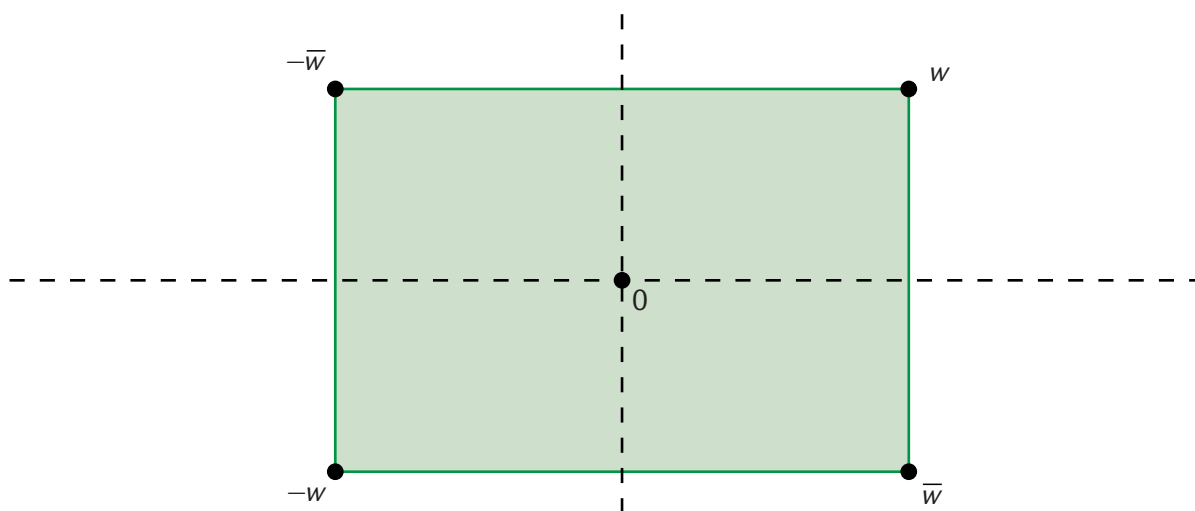
1. Transforma w en $-w$.
2. Transforma w en $\bar{w}$.

3. Transforma w en $-\bar{w}$.
4. Transforma w en $i \cdot w$.
5. Transforma w en $-i \cdot w$.
6. Transforma w en $\mu \cdot w$, donde $\mu = \pm \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \pm \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$.

Solución

Teniendo en cuenta que la simetría central con centro en un punto c tiene la expresión $2c - w$, la primera función es la simetría central con centro en el origen 0 .

Si w no es real ni imaginario, los números $w, \bar{w}, -w, -\bar{w}$ son los vértices de un rectángulo cuyos lados tienen por mediatrices al eje real y al eje imaginario, como puede verse en la figura.



Esto sugiere que la segunda función representa la simetría respecto del eje real y la tercera función representa la simetría respecto del eje imaginario.

La cuarta función es la multiplicación por i . Como es un complejo unitario cuyo argumento es 90° , esta función representa la rotación de 90° en sentido antihorario alrededor del origen.

Claramente, la quinta función representa la rotación de 90° en sentido horario alrededor del origen.

Finalmente, en el punto 6 las funciones consisten en la multiplicación por complejos unitarios cuyos argumentos son $60^\circ, 240^\circ, 120^\circ, 300^\circ$, es decir que representan las rotaciones correspondientes en sentido antihorario alrededor del origen.

Problema 8 Si w es un complejo no nulo, mostrar que el polígono cuyos vértices son:

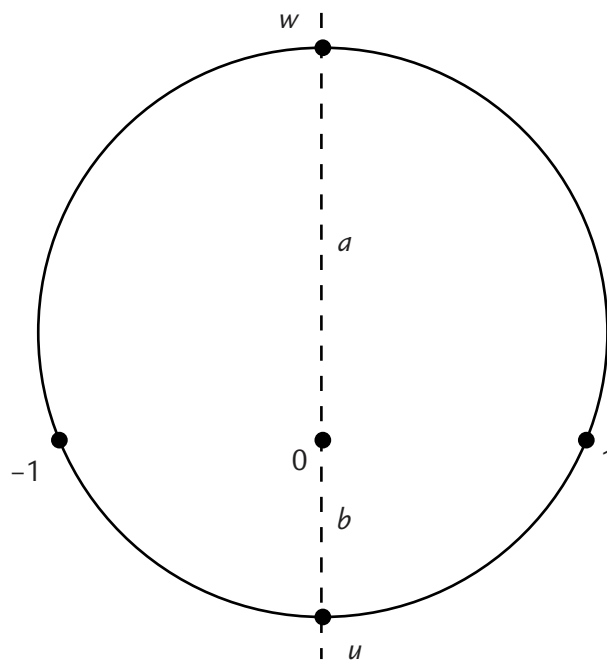
$$w, -\bar{w}, \frac{1}{w}, -\frac{1}{\bar{w}}, 1, -1$$

es inscriptible. Hallar una expresión para el área de este polígono.

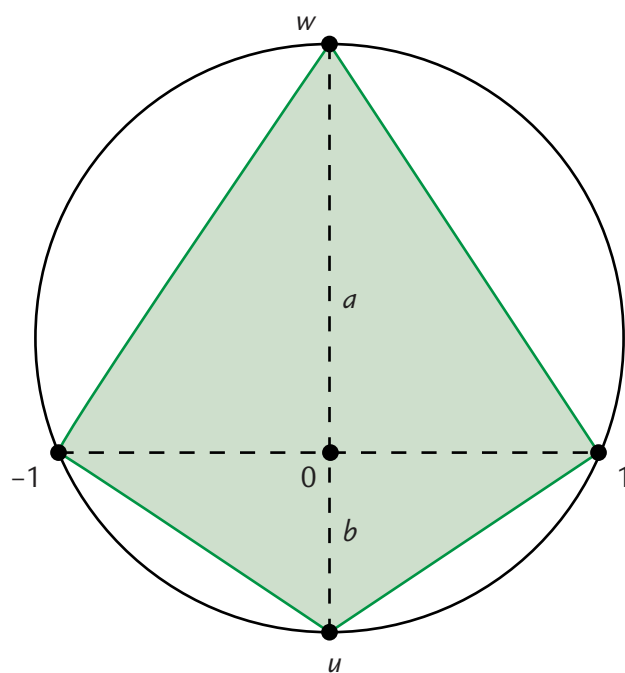
Solución

Es preciso considerar dos casos, según w sea imaginario o no lo sea.

Si w es imaginario, solo se obtienen 4 vértices, dado que $-\bar{w} = w, -\frac{1}{\bar{w}} = \frac{1}{w}$. En este caso, la circunferencia que pasa por $1, -1$ y w corta a la recta que pasa por w y 0 en el punto u .



Denotando con a y b los módulos de w y u , respectivamente, se tiene que $a \cdot b = 1$ dado que $a \cdot b$ es la potencia de 0 respecto de la circunferencia. Esto indica que $u \cdot w$ es de módulo 1 y como los argumentos de u y w suman 360° , resulta $u \cdot w = 1$, es decir, $u = w^{-1}$. Los 4 vértices son los vértices de un romboide cuyas diagonales miden 2 y $a + b = |w| + |w^{-1}|$.

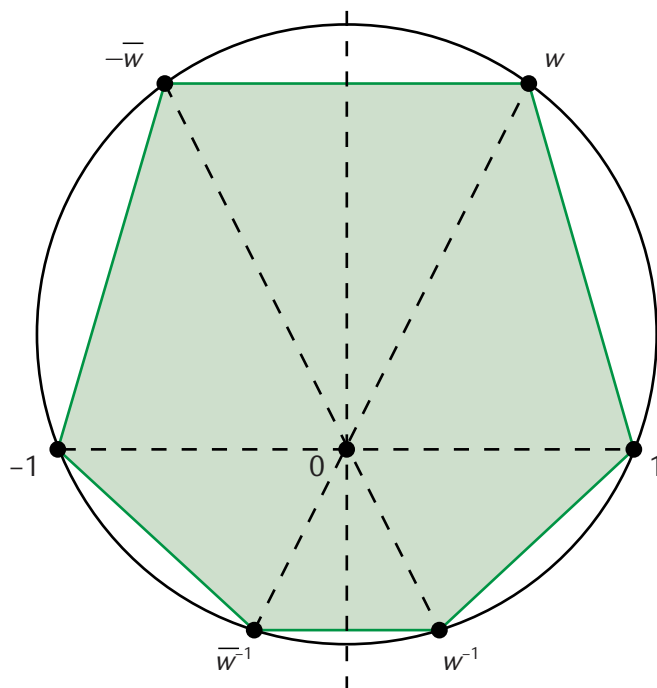


Escribiendo el área del romboide como el semiproducto de las longitudes de sus diagonales, en este caso la expresión quedará:

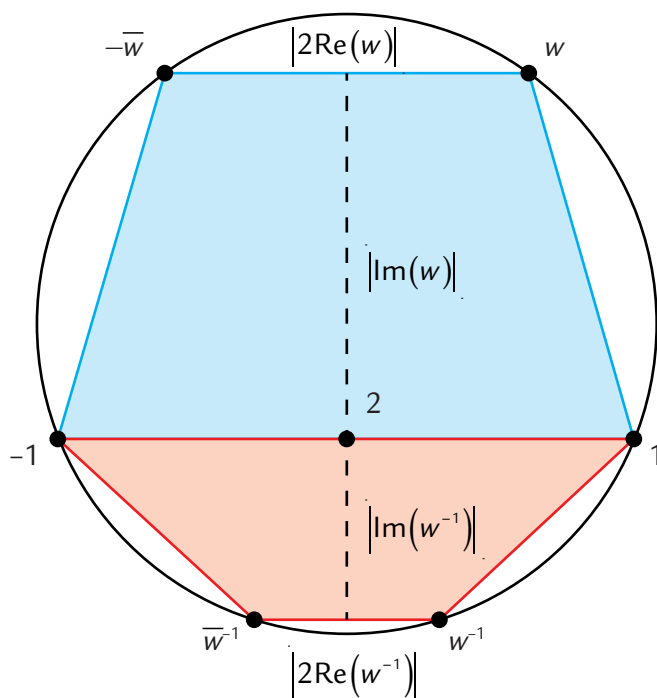
$$|w| + |w^{-1}| = |w| + \frac{1}{|w|}.$$

Consideremos que w no es imaginario. Toda circunferencia que pase por 1 y -1 será simétrica respecto del eje imaginario, pues éste coincide con la mediatriz del segmento de extremos 1 y -1 . En este caso, la circunferencia que pasa por 1 , -1 y w también pasará por $-\bar{w}$, por ser este último el simétrico de w respecto del eje imaginario. Usando un argumento similar al del caso anterior, podemos ver que la recta que pasa por w y 0 corta a la circunferencia en $-\frac{1}{\bar{w}}$ y la recta que pasa

por $-\bar{w}$ y 0 , corta a la circunferencia en $\frac{1}{w}$. Los 6 puntos son los vértices de un hexágono como el que ilustra la figura.



Este hexágono puede descomponerse en dos trapezios isósceles con una base común. Las dimensiones de las bases y alturas de estos trapezios están indicadas en la figura:



de modo que el área del hexágono estará dada por:

$$\frac{2 + |2\operatorname{Re}(w)|}{2} \cdot |\operatorname{Im}(w)| + \frac{2 + |2\operatorname{Re}(w^{-1})|}{2} \cdot |\operatorname{Im}(w^{-1})|$$

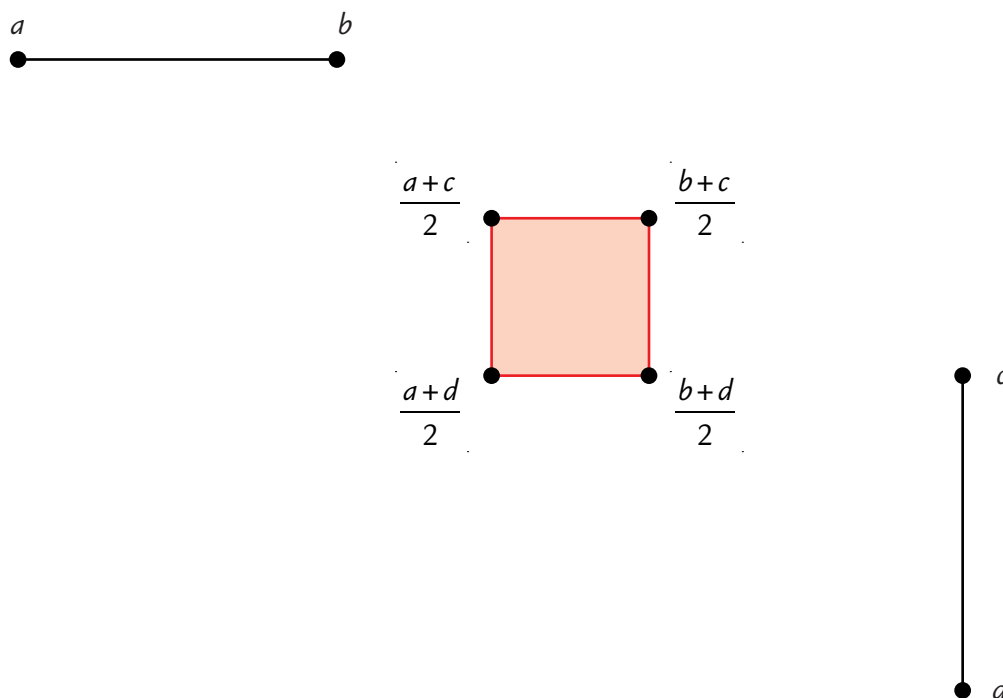
o bien:

$$(1 + |\operatorname{Re}(w)|) \cdot |\operatorname{Im}(w)| + (1 + |\operatorname{Re}(w^{-1})|) \cdot |\operatorname{Im}(w^{-1})|.$$

Problema 9 Los números complejos a, b y c, d son los respectivos vértices de dos segmentos perpendiculares y de igual longitud l . Hallar el área del cuadrilátero que tiene por vértice los números $a + c, b + c, b + d, a + d$.

Solución

Conocidos a, b, c y d , las posiciones de los números $a + c, b + c, b + d, a + d$ dependen de la posición del origen 0. En cambio, los promedios $\frac{a+c}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{a+d}{2}$ quedan bien determinados y son cuadriláteros homotéticos.



El dibujo muestra que se trata de un cuadrado. Para justificar esta afirmación, partimos del hecho de que ab y cd son segmentos perpendiculares y de igual longitud, lo que significa:

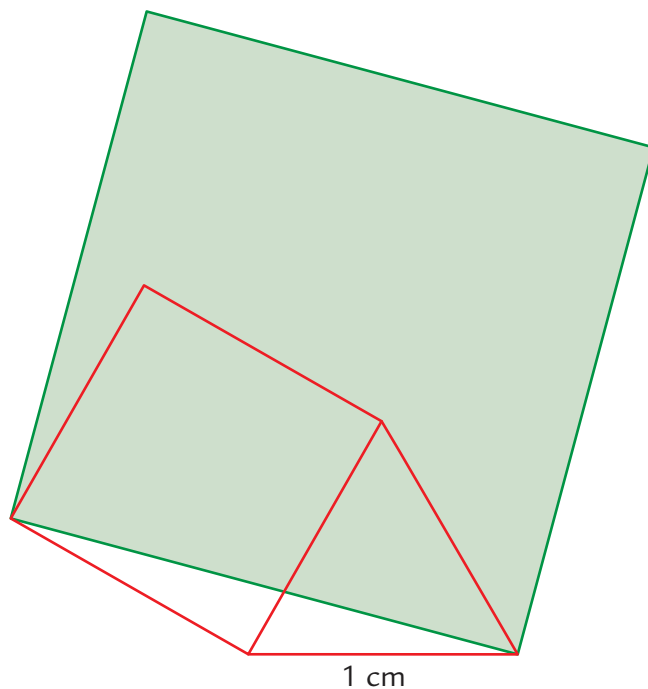
$$c - d = \pm i \cdot (a - b).$$

De esto resulta que:

$$\frac{a+d}{2} - \frac{a+c}{2} = \frac{d-c}{2} = \pm i \frac{b-a}{2} = \pm i \left(\frac{b+c}{2} - \frac{a+c}{2} \right).$$

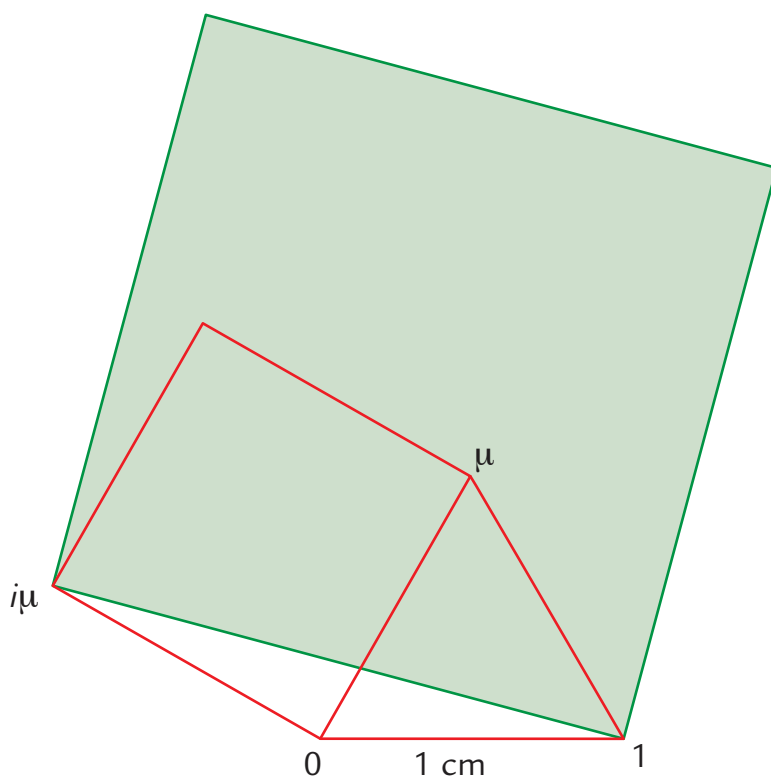
Esto muestra que los lados que concurren en $\frac{a+c}{2}$ son perpendiculares y de igual longitud. Por otra parte, las sumas de los pares de vértices opuestos coinciden en $\frac{a+b+c+d}{2}$, por este motivo el cuadrilátero es un paralelogramo y, entonces, debe ser un cuadrado cuyos lados tienen por longitud a $\frac{l}{2}$, la mitad de la longitud de los segmentos ab y cd . Finalmente, el cuadrado del enunciado tiene área l^2 , puesto que las medidas de sus lados son el doble que las del cuadrado de puntos medios.

Problema 10 En la figura, el cuadrado no sombreado comparte un lado de 1 cm con el triángulo equilátero. Hallar el área del cuadrado sombreado.



Solución

Podemos ubicar la figura de modo que los vértices del triángulo coincidan con los números complejos 0 , 1 y $\mu = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, como se indica a continuación.



Entonces, dos vértices en un lado del cuadrado sombreado son $i\mu$ y 1 ; en consecuencia, el área de este cuadrado está dada por:

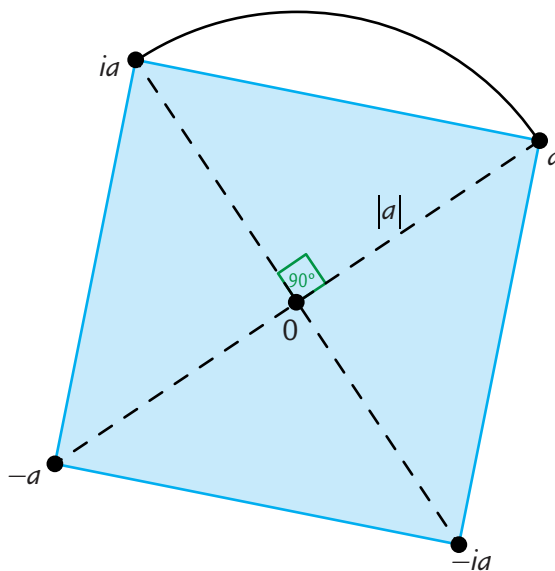
$$|i\mu - 1|^2 = |i\mu|^2 - 2\operatorname{Re}(i\mu) + 1 = 2 + \sqrt{3},$$

es decir, $(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2$

Problema 11 Dado el número complejo a no nulo, construir un cuadrado con vértices a, b, c, d cuya área sea igual a $2|a|^2$.

Solución

Si rotamos a 90° en sentido antihorario alrededor del origen 0 , obtenemos $i \cdot a$; haciendo lo mismo con $i \cdot a$, obtenemos $i^2 \cdot a = -a$ y si hacemos lo mismo con $-a$ obtenemos $i^3 \cdot a = -ia$.

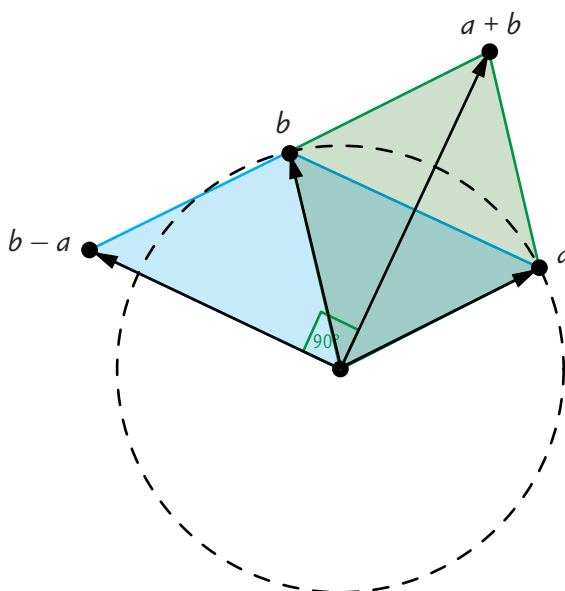


Estos cuatro números son los vértices de un cuadrado cuya diagonal mide $2 \cdot |a|$, en consecuencia su área es $2|a|^2$.

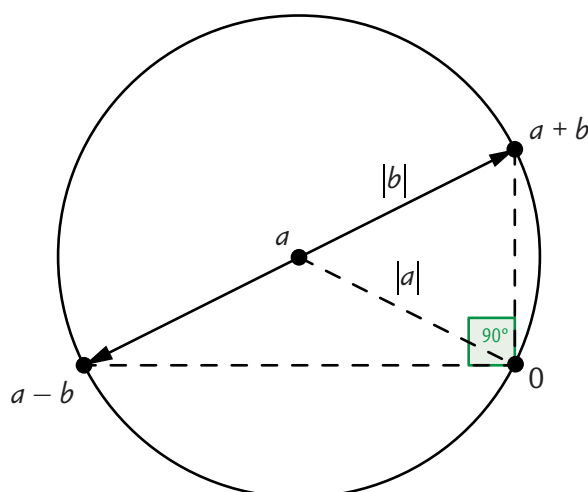
Problema 12 Si los números complejos a y b , con $b \neq \pm a$, tienen el mismo módulo, mostrar que $a + b$ y $a - b$ son perpendiculares. Recíprocamente, si $a + b$ y $a - b$ son perpendiculares, mostrar que a y b tienen el mismo módulo.

Solución

Si a y b son números complejos con el mismo módulo, los números $0, a, a + b$ y b son los vértices de un rombo; por lo tanto, sus diagonales son perpendiculares. Por otro lado, $0, a, b$ y $b - a$ son los vértices de un paralelogramo, de donde resulta que $a + b$ y $b - a$ son vectores perpendiculares.



Recíprocamente, si $a + b$ y $a - b$ son perpendiculares, entonces, por cuestiones de arco capaz, el origen 0 debe estar en la circunferencia que tiene por uno de sus diámetros el segmento de vértices $a + b$ y $a - b$, y, consecuentemente, el centro en a , punto medio de dicho segmento.



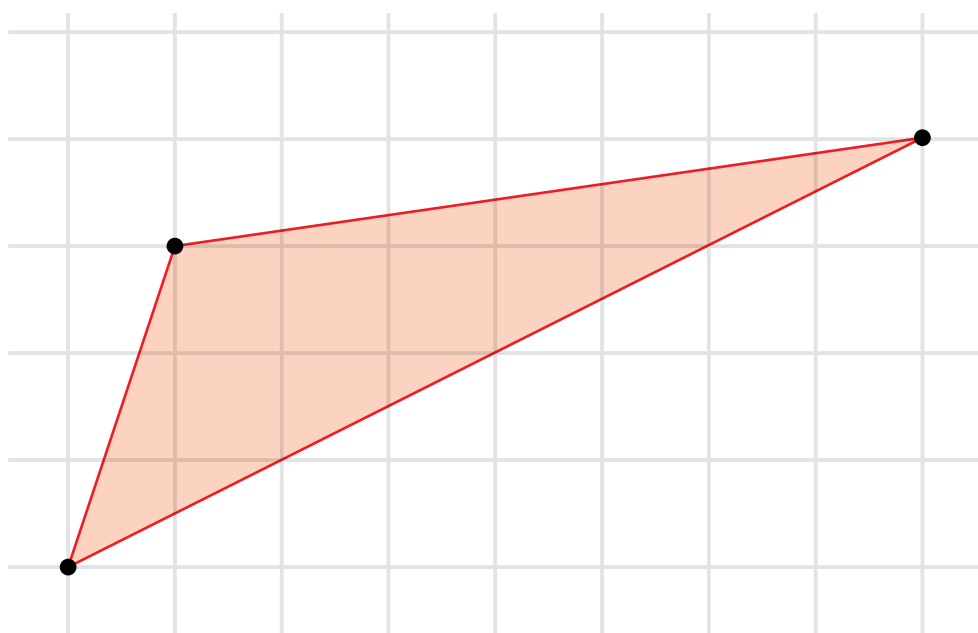
Se concluye que a y b tienen el mismo módulo.

Problema 13 Supongamos que el triángulo abc tiene el circuncentro en el origen de los números complejos. Mostrar que el ortocentro de abc es el punto $a + b + c$.

Solución

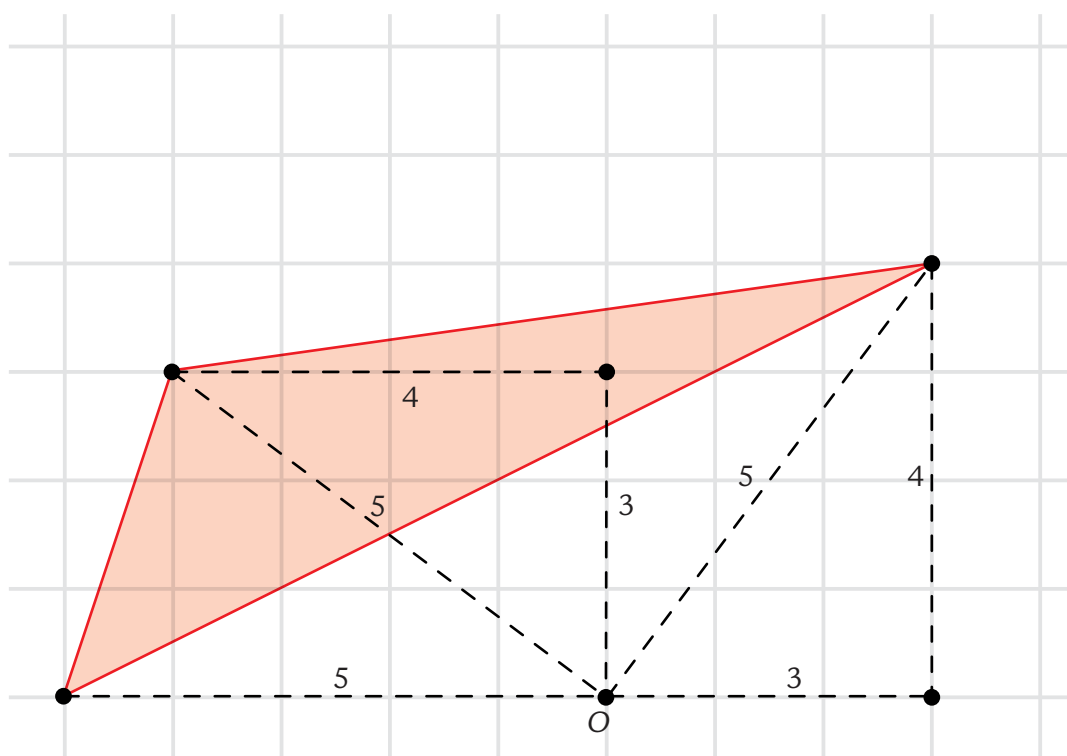
La recta que une a con $a + b + c$ es paralela a $a + b + c - a = b + c$ y la recta que une b con c es paralela a $c - b$. Como b y c tienen el mismo módulo, $b + c$ y $b - c$ son perpendiculares (ver Problema 12). En consecuencia, la prolongación de la altura que parte desde a pasa por $a + b + c$. Este mismo razonamiento se aplica a las otras alturas, por tanto, $a + b + c$ es el ortocentro del triángulo abc .

Problema 14 Usando solo un lápiz, ¿se puede marcar el ortocentro del triángulo dado en la cuadrícula de la siguiente figura? ¿Alcanza el trozo de cuadrícula presentado para marcar el ortocentro?



Solución

Ubicamos el punto O de la cuadrícula, que es el centro de la circunferencia circunscripta al triángulo.



Si hacemos coincidir O con el origen de los números complejos, los vértices del triángulo quedan representados por números complejos a , b , c , de modo que el ortocentro puede calcularse como la suma $a + b + c$. Según la figura, para llegar al ortocentro partiendo desde el origen es necesario subir 7 cuadritos y moverse 6 cuadritos hacia la izquierda. La respuesta al problema es, entonces, que se podría marcar el ortocentro del triángulo, pero el trozo de cuadrícula no alcanza.

Problema 15 Representar, usando regla y compás, los polígonos cuyos vértices son las soluciones de la ecuación $x^n = 1$, para $n = 3, 4, 5, 6$.

Nota: Las soluciones de la ecuación $x^n = a$, donde n es un número natural y a un número complejo, se llaman raíces n -ésimas de a ; en el caso en que a es igual a 1, se llaman raíces de la unidad.

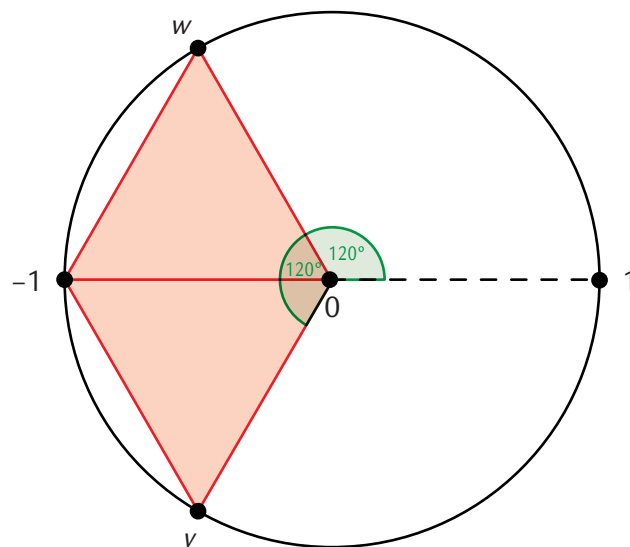
Solución

Si $n = 3$, se trata de calcular las raíces cúbicas de 1, cuyo argumento es cero. Las raíces cúbicas de 1 deben tener un argumento α tal que $3 \cdot \alpha$ sea $0^\circ, 360^\circ, 720^\circ$, es decir, α es $0^\circ, 120^\circ$ o 240° . Además, las raíces cúbicas deben tener un módulo que, elevado al cubo, resulte igual a 1, dado que:

$$|x|^3 = |x^3| = 1$$

Con la información precedente podemos representar las raíces cúbicas a partir de sus respectivas formas polares.

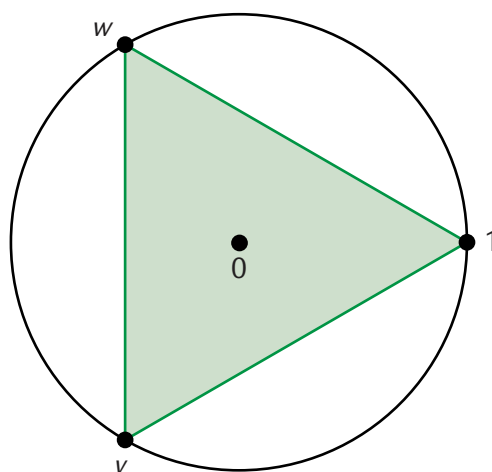
Construyendo dos triángulos equiláteros con el segmento -10 como lado común, observamos que los vértices indicados con w y v son dos de las raíces cúbicas de 1.



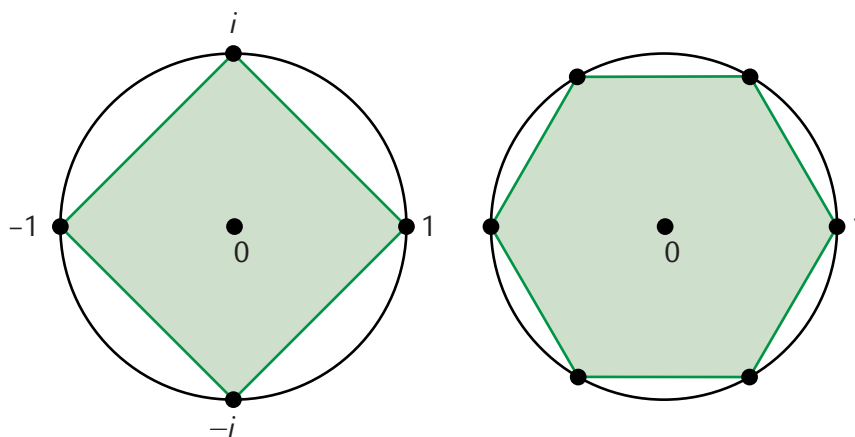
Notar que se cumplen las identidades:

$$v = w^2, w = v^2, v = \bar{w}.$$

El polígono que tiene por vértices a las raíces cúbicas de 1 es el triángulo equilátero que muestra la figura:

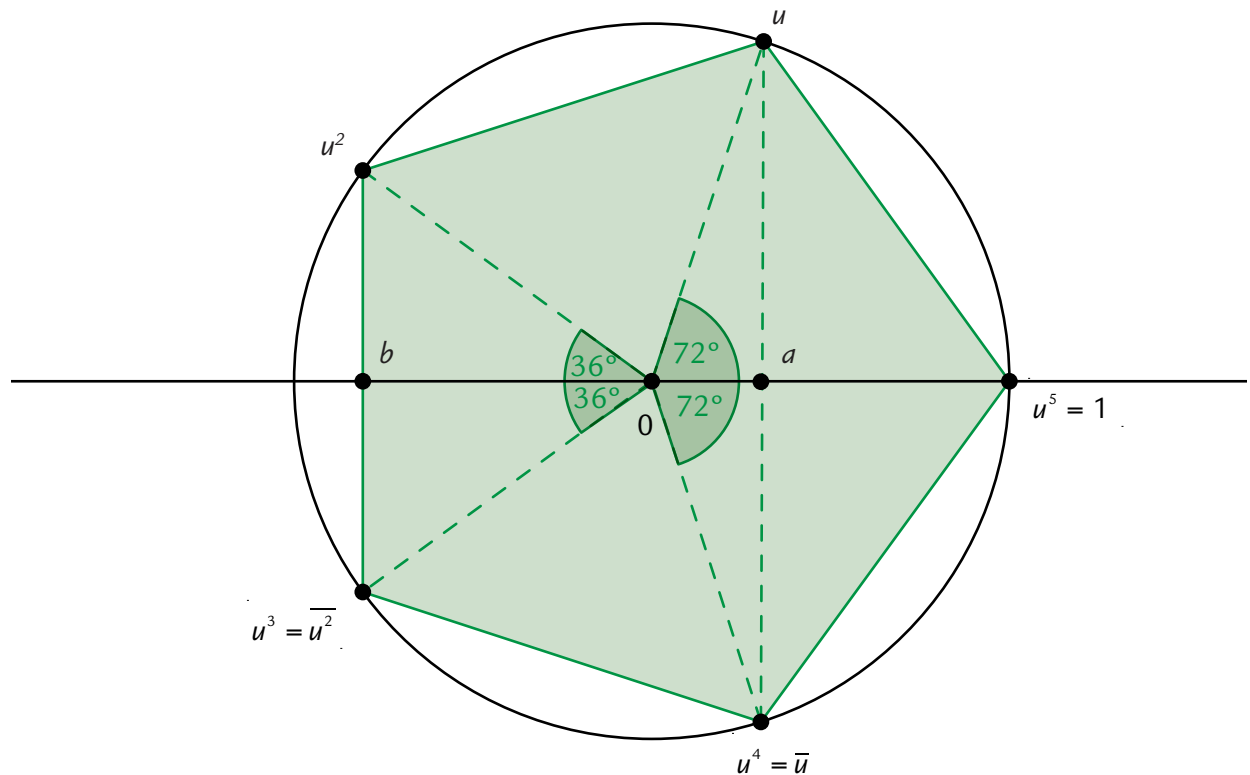


En forma similar, se pueden tratar los casos $n = 4$ y $n = 6$ para obtener el cuadrado y el hexágono regular dados en la figura siguiente:



El caso $n = 5$ es un tanto más elaborado. En este caso, los argumentos de las raíces quintas son 0° , 72° , 144° , 216° y 288° . Dado que éstas son números complejos de módulo 1, será suficiente construir con regla y compás un ángulo de 72° que tenga a la semirrecta 01 como uno de sus lados.

Si denotamos con u a la raíz cuyo argumento es 72° , las raíces restantes son u^2, u^3, u^4, u^5 .



De los datos expresados en la figura precedente, surgen las identidades:

$$u^3 = \overline{u^2}, u^4 = \overline{u}$$

Para construir las raíces, bastará con construir su parte real de u , dada por $a = \frac{u + \overline{u}}{2} = \frac{u + u^4}{2}$.

Dado que $u \neq 1$, de la identidad:

$$u \cdot (1 + u + u^2 + u^3 + u^4) = u + u^2 + u^3 + u^4 + 1$$

surge que:

$$1 + u + u^2 + u^3 + u^4 = 0$$

Denotando con $b = \frac{u^2 + \overline{u^2}}{2} = \frac{u^2 + u^3}{2}$, podemos establecer una ecuación cuadrática que tenga a a y b por raíces. Esta ecuación está dada por:

$$(x - a) \cdot (x - b) = x^2 - (a + b)x + ab.$$

Calculamos:

$$a + b = \frac{u + u^4}{2} + \frac{u^2 + u^3}{2} = -\frac{1}{2}$$

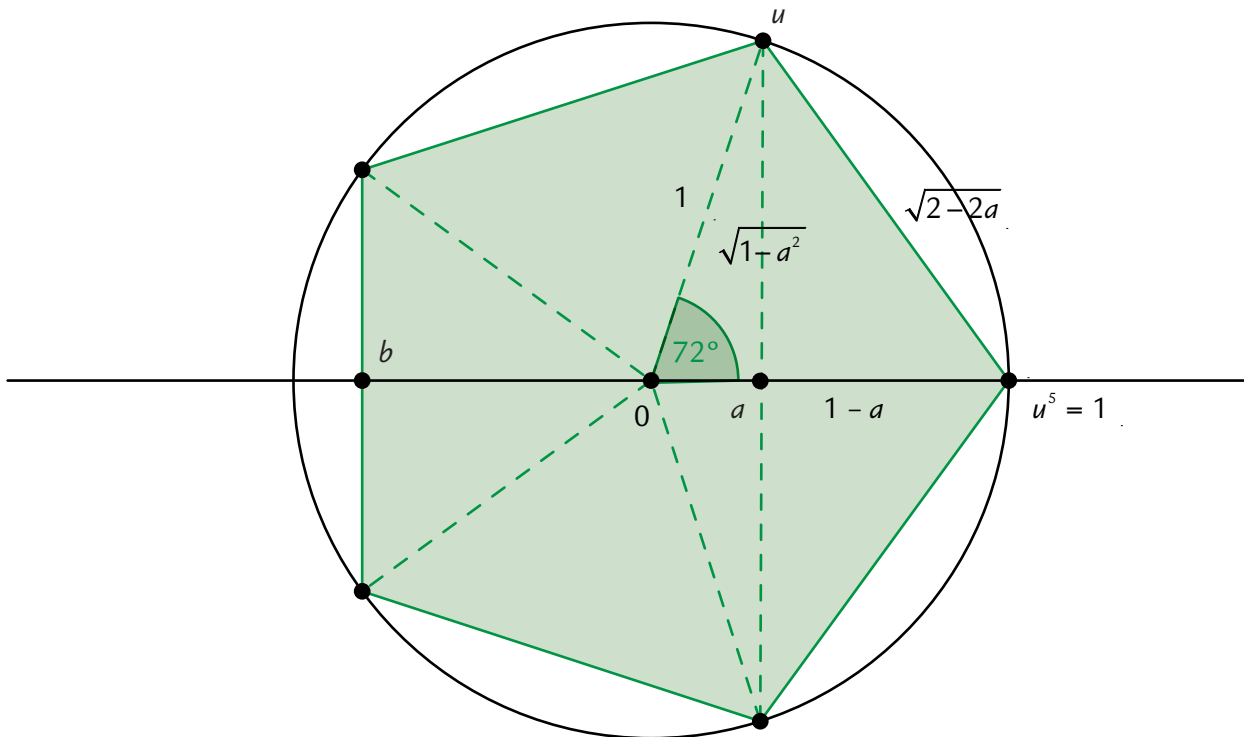
$$a \cdot b = \left(\frac{u + u^4}{2} \right) \cdot \left(\frac{u^2 + u^3}{2} \right) = \frac{u^3 + u^4 + u^6 + u^7}{4} = \frac{u^3 + u^4 + u + u^2}{4} = -\frac{1}{4}$$

Entonces, a y b son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0,$$

es decir, $a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, b = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Con el valor de a podemos calcular la distancia entre u y 1 usando el *teorema de Pitágoras*.

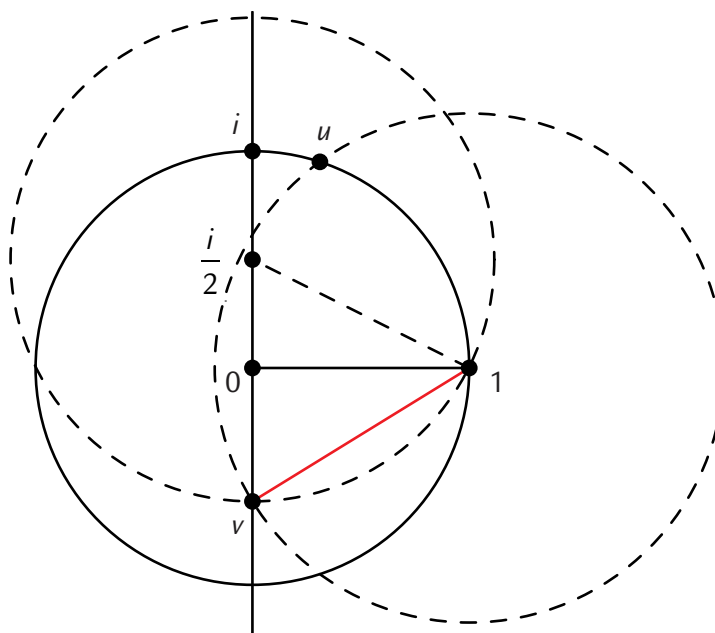


En el triángulo rectángulo $01u$ encontramos que $|u-a| = \sqrt{1-a^2}$ y en el triángulo rectángulo $a1u$ vemos que $|u-1| = \sqrt{2-2a} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Es conveniente observar que:

$$\frac{5-\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$$

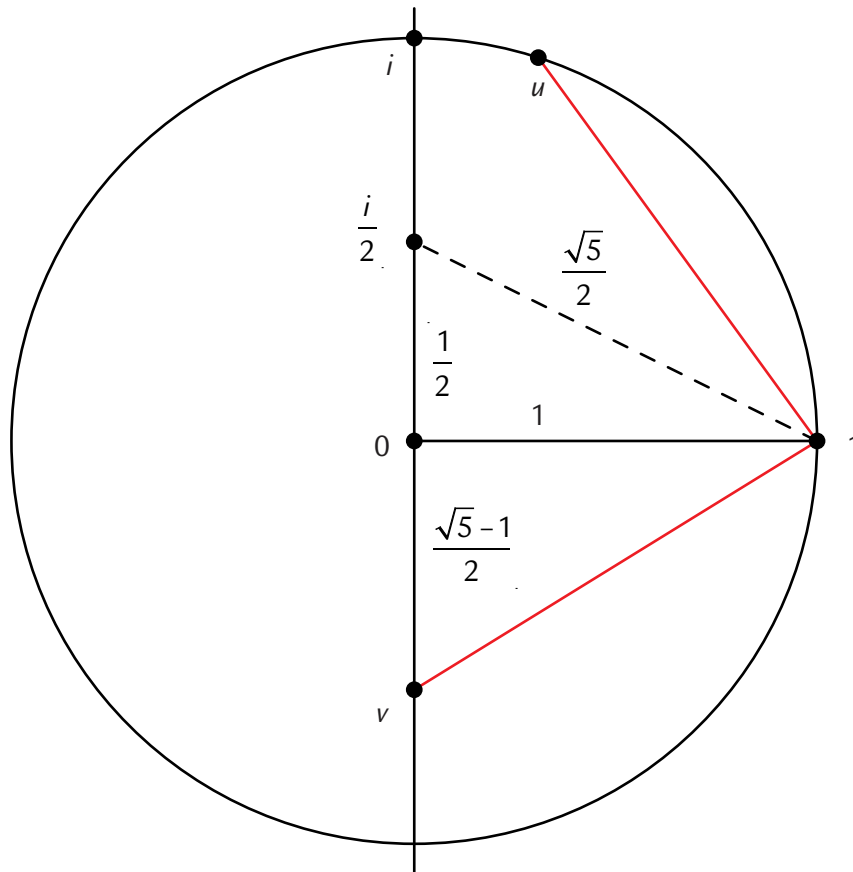
Con esto vemos que la distancia desde u hasta 1, o sea $|u-1|$, puede obtenerse como la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 1 y $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

La siguiente figura ilustra los pasos a seguir para construir la raíz u .



- Trazamos la circunferencia con centro en 0 y radio 1.
- Trazamos el eje imaginario y marcamos i en su intersección con la circunferencia.
- Tomamos el punto medio $\frac{i}{2}$ entre i y 0.
- Con centro en $\frac{i}{2}$ trazamos la circunferencia que pasa por 1 y corta al eje imaginario en v .
- Con centro en 1 trazamos la circunferencia que pasa por v y esta corta la circunferencia con centro en 0 en la u .

Los datos numéricos, en la figura a continuación, justifican la construcción de u .



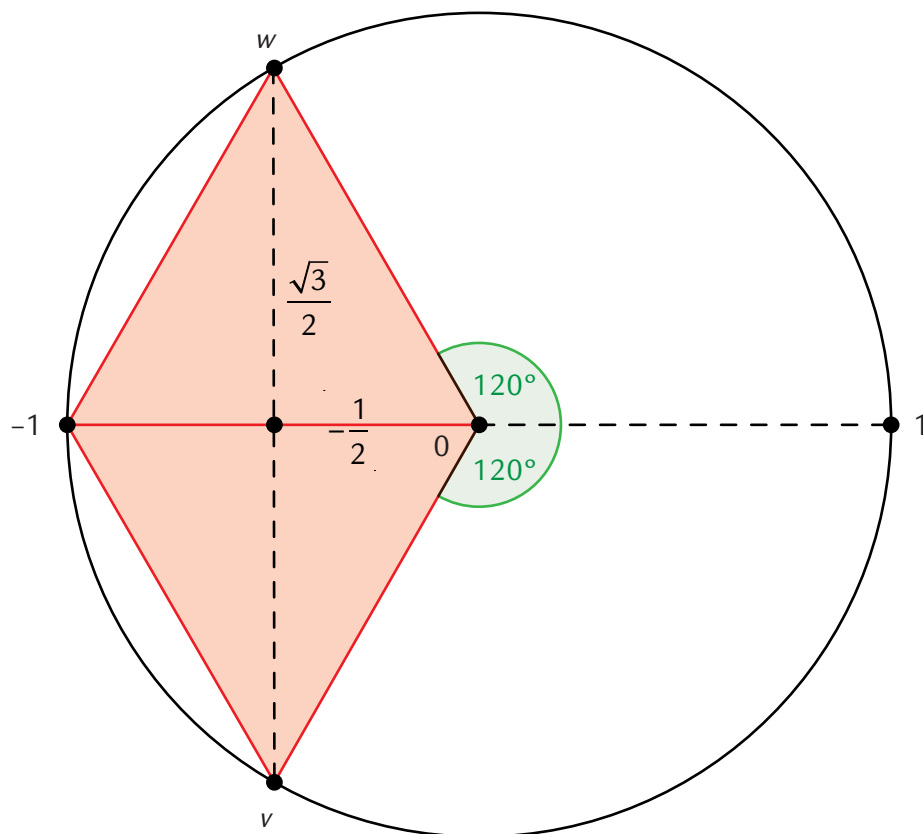
Problema 16 Hallar las formas binómicas de las soluciones de la ecuación $x^n = 1$, para $n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Solución

Para $n = 2$, las raíces son 1 y -1 . Los casos restantes se pueden obtener a partir de las construcciones del Problema 6.

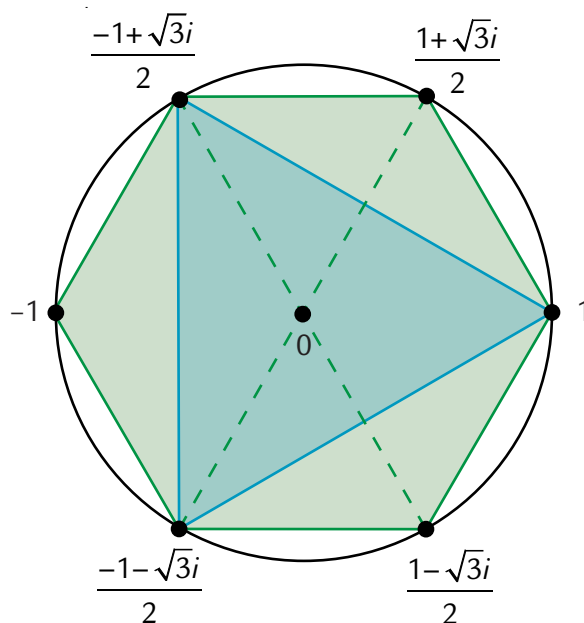
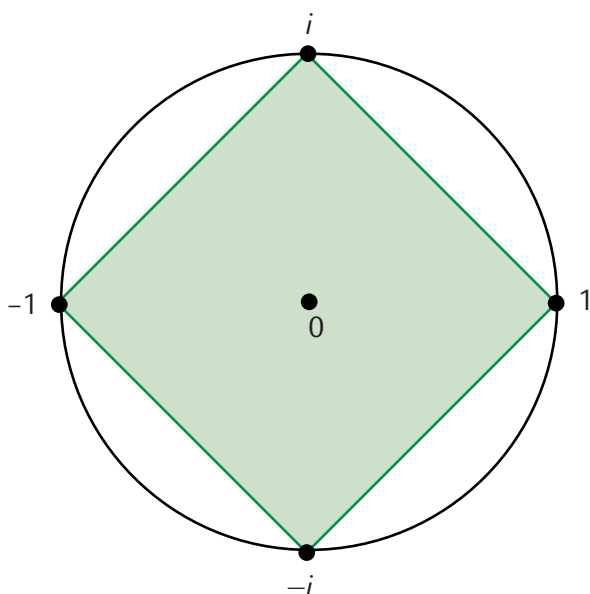
Para $n = 3$, usamos la figura:





Las raíces son $1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$.

Para $n = 4$ y $n = 6$ de las figuras a continuación,

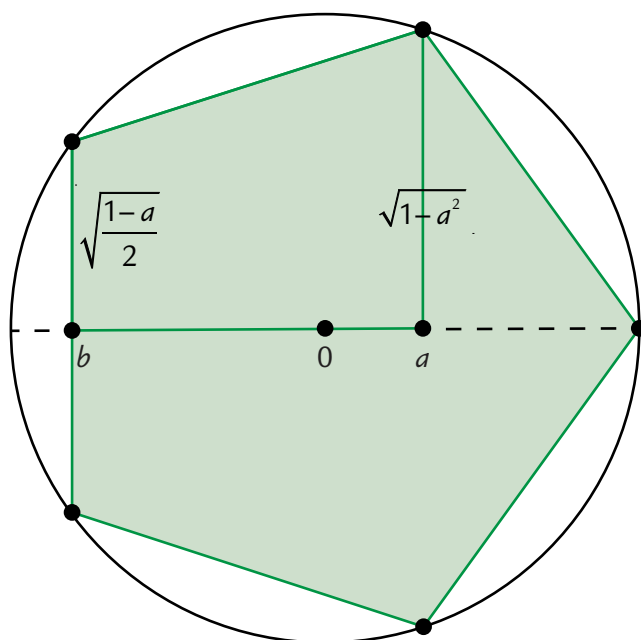


se tiene que las raíces cuartas son $1, i, -1, -i$, y las raíces sextas son:

$$1, \frac{1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, -1, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

Finalmente, para $n = 5$, usamos los datos de la figura:





$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$b = \frac{-\sqrt{5}-1}{4}$$

Las raíces quintas son:

$$1, \frac{\sqrt{5}-1+\sqrt{10+2\sqrt{5}}i}{4}, \frac{-\sqrt{5}-1+\sqrt{10-2\sqrt{5}}i}{4}, \frac{-\sqrt{5}-1-\sqrt{10-2\sqrt{5}}i}{4}, \frac{\sqrt{5}-1-\sqrt{10+2\sqrt{5}}i}{4}$$

Problema 17 Construir con regla y compás las raíces de las ecuaciones $x^5 = -1$ y $x^6 = -1$.

Solución

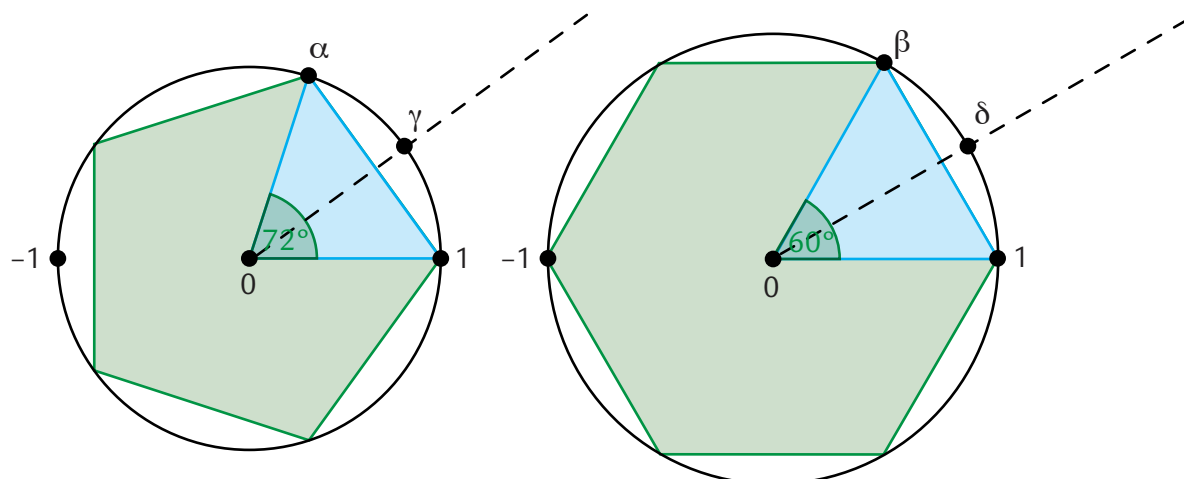
Dado que $|x^n| = |x|^n$ para cualquier número natural n , las raíces de estas ecuaciones son complejos de módulo 1 por ser:

$$|x|^5 = |x^5| = |-1| = 1$$

$$|x|^6 = |x^6| = |-1| = 1$$

Construimos una raíz de -1 , ya sea raíz quinta o raíz sexta, dividiendo su argumento de 180° en 5 partes iguales o 6 partes iguales según corresponda y buscamos complejos de módulo 1 con esos argumentos.

En el Problema 6 vimos cómo construir geoméricamente algunas raíces de la unidad; en particular, las raíces quintas y las raíces sextas de la unidad son, respectivamente, los vértices del pentágono regular y el hexágono regular que muestra la figura:

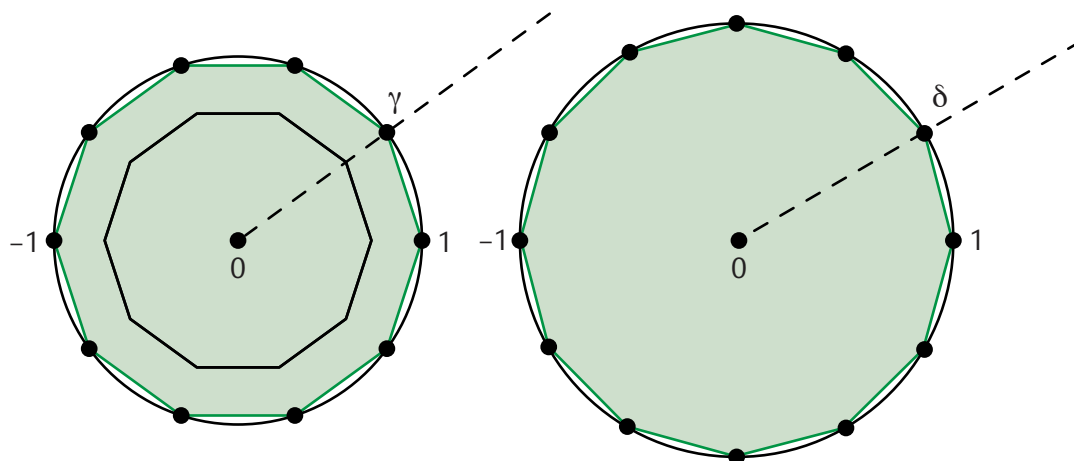


Si α y β son, respectivamente, las raíces quinta y sexta de la unidad cuyos correspondientes argumentos son 72° y 60° , trazamos las bisectrices de los ángulos 10α y 10β , las que cortan a la circunferencia de radio 1 y centro 0 en los puntos γ y δ , respectivamente.

Teniendo en cuenta que los argumentos de γ y δ son 36° y 30° , resulta:

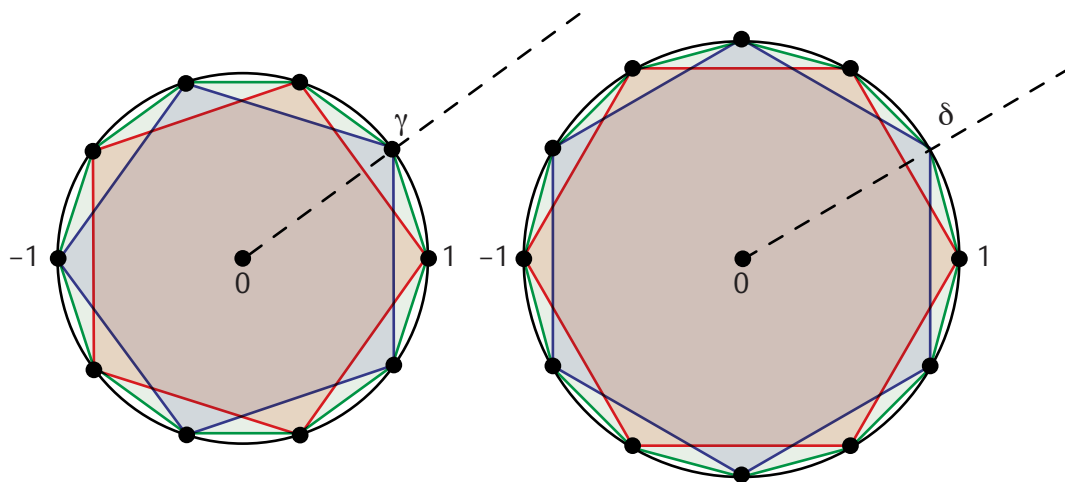
$$\gamma^5 = -1, \delta^5 = -1.$$

Es oportuno observar que las potencias γ son los vértices de un decágono regular, en tanto que las potencias de δ son los vértices de un dodecágono regular.



En realidad, los vértices de estos polígonos son, respectivamente, las raíces décimas de la unidad y las raíces duodécimas de la unidad. Es claro que las raíces n -ésimas de -1 sean raíces $2n$ -ésimas de 1, dado que si $x^n = -1$ entonces $x^{2n} = 1$.

Tanto las raíces décimas como las duodécimas pueden ser separadas en dos grupos,



Las raíces décimas incluyen a las raíces quintas de la unidad, estas son los vértices del pentágono destacado en color rojo. Las raíces restantes son los vértices de otro pentágono destacado en color azul y son precisamente las raíces quintas de -1 .

Se observa que los vértices en el pentágono azul se pueden obtener multiplicando por γ cada vértice del pentágono rojo. El mismo análisis es válido para las raíces duodécimas.

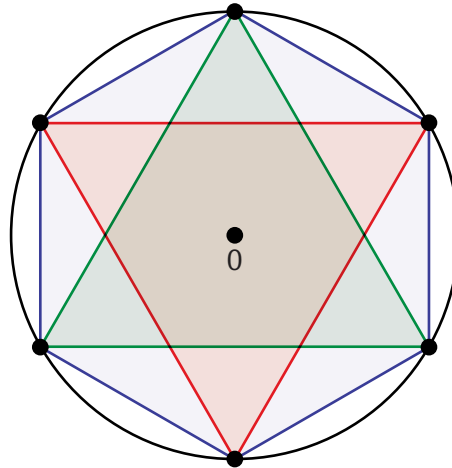
Podríamos decir que la clasificación realizada en cada caso se asocia con la factorización:

$$x^{10} - 1 = (x^5 + 1) \cdot (x^5 - 1)$$

$$x^{12} - 1 = (x^6 + 1) \cdot (x^6 - 1)$$

También podemos considerar otras agrupaciones en el caso de las raíces sextas de -1 . Si μ es una raíz sexta de -1 , entonces μ^3 es una raíz cuadrada de -1 , es decir, μ^3 es i o $-i$.

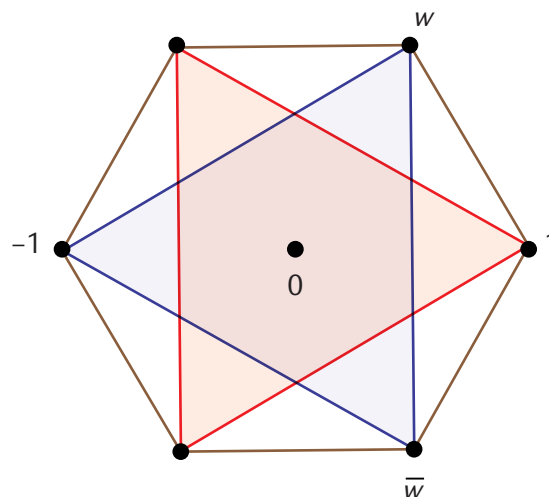
En la figura se agrupan las raíces según, elevadas al cubo, den como resultado i o $-i$.



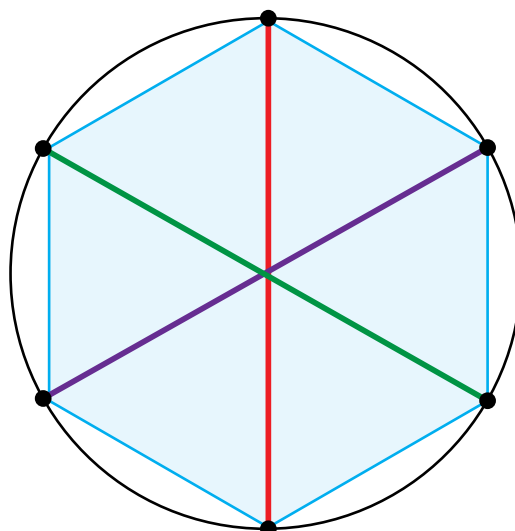
Las raíces que, elevadas al cubo, dan i , son los vértices del triángulo coloreado en azul; las que dan $-i$ son los vértices del triángulo coloreado en rojo. Esta descomposición en raíces cúbicas de i y raíces cúbicas de $-i$ se asocia con la factorización:

$$x^6 + 1 = (x^3 + i) \cdot (x^3 - i)$$

También podemos considerar μ^2 , que es raíz cúbica de -1 . Las raíces cúbicas de -1 son las raíces sextas de la unidad, que no son raíces cúbicas de la unidad.



Podemos descomponer ahora las raíces sextas de -1 en tres grupos, según μ^2 sea -1 , w , $\bar{w}$.



Las raíces en la diagonal roja al cuadrado dan -1 , las de la diagonal azul al cuadrado dan w y las de la diagonal verde dan $\bar{w}$.

Esta descomposición en raíces cuadradas de -1 , w , $\bar{w}$ se asocia con la factorización:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 - w) \cdot (x^2 - \bar{w})$$

que puede escribirse como:

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1) \cdot (x^4 - x^2 + 1)$$

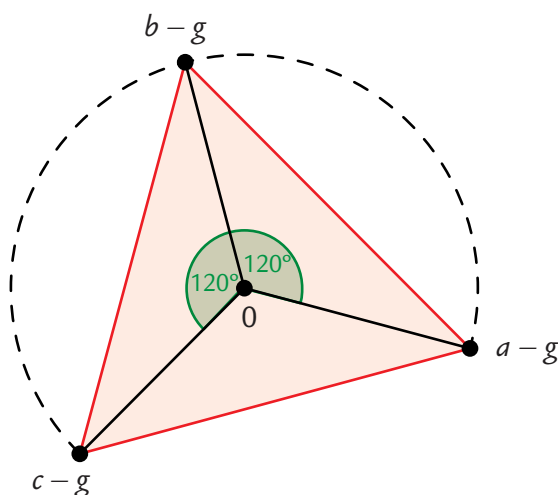
dando una factorización en polinomios con coeficientes enteros.

Problema 18 Si los números complejos a , b , c son los vértices de un triángulo equilátero, mostrar que estos pueden ser obtenidos mediante una traslación del conjunto de raíces cúbicas de un cierto número complejo.

Solución

Sea g el baricentro del triángulo. El triángulo de vértices $a - g$, $b - g$, $c - g$ tiene a 0 como baricentro, puesto que:

$$\frac{a - g + b - g + c - g}{3} = 0$$



Sea $\mu = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ la raíz cúbica de la unidad cuyo argumento es 120° . Se tiene:

$$\mu \cdot (a - g) = b - g, \quad \mu \cdot (b - g) = c - g,$$

de modo que:

$$(a - g)^3 = (b - g)^3 = (c - g)^3$$

Denotando con $d = (a - g)^3$, resulta que $a - g$, $b - g$, $c - g$ son las raíces cúbicas de d . La traslación que transforma las raíces en los vértices del triángulo está dada por $t(x) = x + g$.

Nota: Un resultado más general puede ser establecido y su enunciado sería:

Los vértices de un polígono regular de n lados pueden obtenerse como traslación de las raíces n -ésimas de un cierto número complejo.

Las raíces n -ésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados.

Problema 19 Construir geoméricamente las raíces de la ecuación:

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 9 = 0$$

Solución

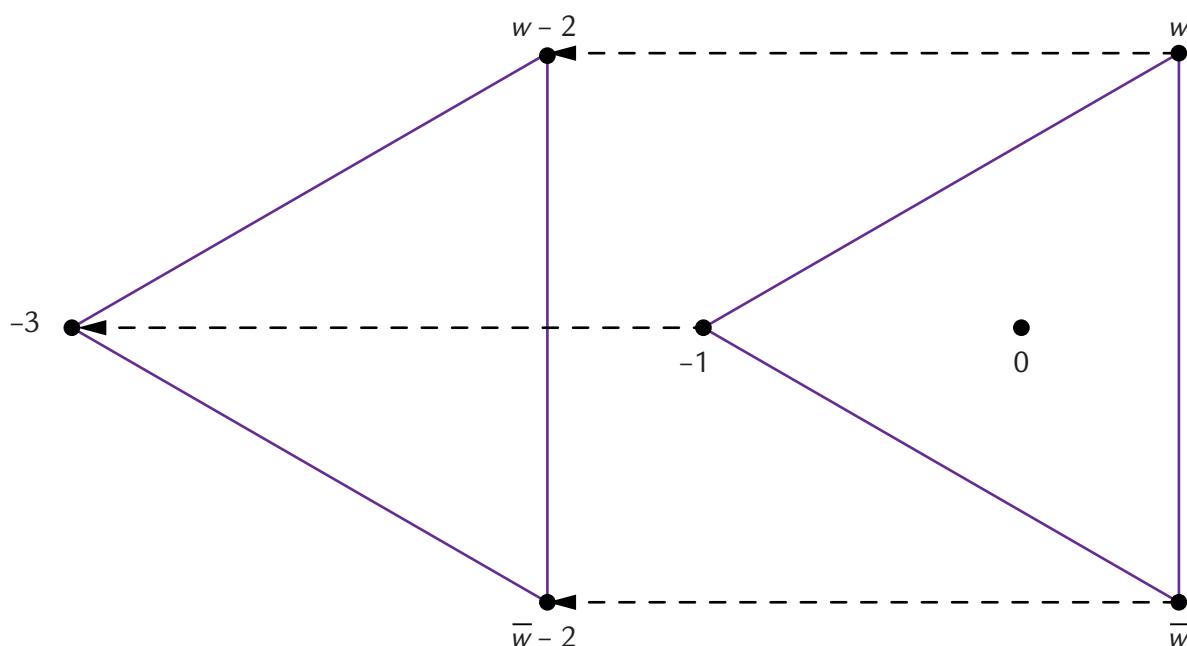
La ecuación puede escribirse como:

$$x^3 + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 + 1 = 0,$$

o bien:

$$(x + 2)^3 = -1.$$

Las raíces de esta ecuación son las raíces cúbicas de -1 desplazadas en dos unidades hacia la izquierda.



Problema 20 Mostrar que si los números complejos a, b, c, d son los sucesivos vértices de un paralelogramo, entonces $a + c = b + d$.

Recíprocamente, si los números complejos a, b, c, d verifican la identidad $a + c = b + d$, entonces a, b, c, d son los sucesivos vértices de un paralelogramo.

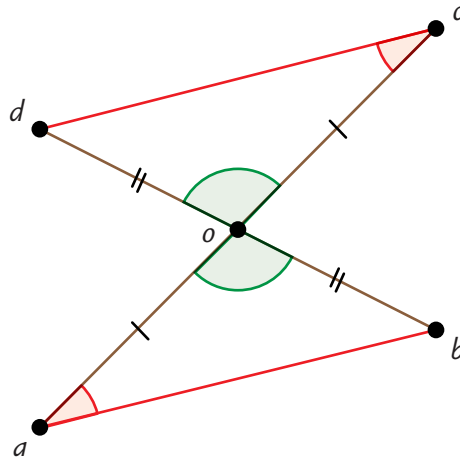
Solución

En la primera situación, los puntos medios de las diagonales están dados por $\frac{a+c}{2}$ y $\frac{b+d}{2}$.

Como se trata de un paralelogramo, las diagonales se cortan en sus puntos medios, es decir $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$, de modo que $a + c = b + d$.

En la situación de la recíproca, se cumple la identidad $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$, de modo que las diagonales del cuadrilátero a, b, c, d se cortan en sus puntos medios.

La siguiente figura se utiliza para mostrar, en ambas direcciones, que una afirmación es consecuencia de la otra. Aquí o es el punto de intersección de las diagonales.



Si ab y cd son paralelos, los triángulos abo y cdo son semejantes. Si, además, ab y cd tienen igual longitud, entonces abo y cdo son congruentes; en tal caso, ab y cd se cortan en sus puntos medios.

Recíprocamente, si ac y bd se cortan en sus puntos medios, entonces los triángulos abo y cdo son congruentes, luego ab y cd son paralelos y de igual longitud.

Nota: Si a, b, c, d son los sucesivos vértices de un paralelogramo, entonces:

$$c = b + d - a = 2 \frac{b+d}{2} - a,$$

es decir, si a, b y d son conocidos, c puede ser obtenido como el simétrico de a respecto del punto medio de b y d .

Problema 21 Los números complejos a, b, c son los vértices de un triángulo equilátero si, y solo si, verifican la identidad:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0.$$

Solución

Usaremos el hecho de que en un paralelogramo con vértices sucesivos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ se cumple:

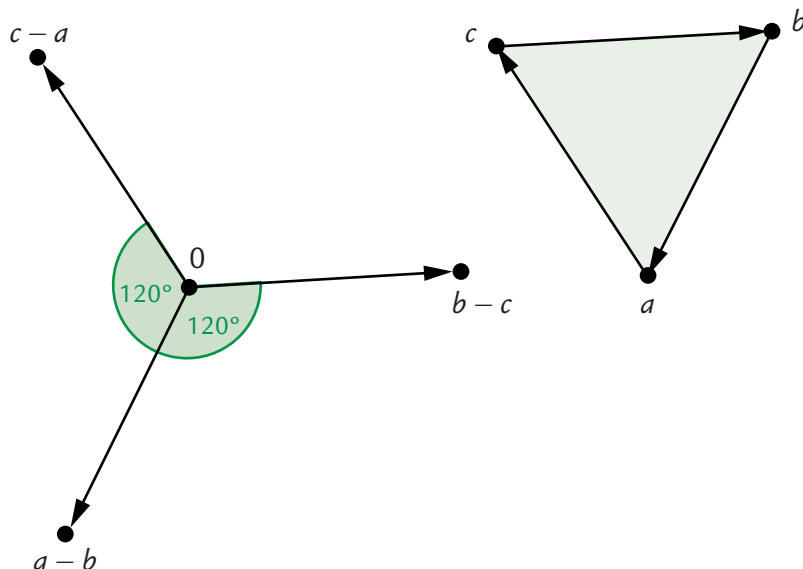
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$

y también es válida la afirmación recíproca (ver el Problema 10).

Los números $0, a-b, a, b$ son los vértices de un paralelogramo, entonces los segmentos $0(a-b)$ y ba son paralelos y de igual longitud. Por las mismas razones, los segmentos $0(b-c)$ y $0(c-a)$ son respectivamente paralelos y de igual módulo que cb y ac .

La siguiente figura ilustra la situación.





Si $\mu = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ es la raíz cúbica de la unidad cuyo argumento es 120° , resulta que:

$$b - c = \mu \cdot (a - b), \quad c - a = \bar{\mu} \cdot (a - b)$$

de modo que:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{1}{a-b} \cdot \left(1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\bar{\mu}}\right).$$

Como $\mu \cdot \bar{\mu} = 1$, se tiene que:

$$1 + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\bar{\mu}} = 1 + \mu + \bar{\mu} = 0.$$

Concluimos que:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0.$$

Para probar la afirmación recíproca, denotemos $p = a - b$, $q = b - c$, $r = c - a$. Se cumple que:

$$p + q + r = 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 0.$$

Además:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{qr + pr + pq}{pqr}.$$

Entonces, $qr + pr + pq = 0$. Los números p, q, r son las raíces de la ecuación:

$$(x - p) \cdot (x - q) \cdot (x - r) = 0.$$

Teniendo en cuenta la identidad:

$$(x - p) \cdot (x - q) \cdot (x - r) = x^3 - (p + q + r)x^2 + (pq + qr + rp)x - pqr$$

y puesto que $p + q + r = 0$, $pq + qr + rp = 0$; p, q, r son las raíces de la ecuación:

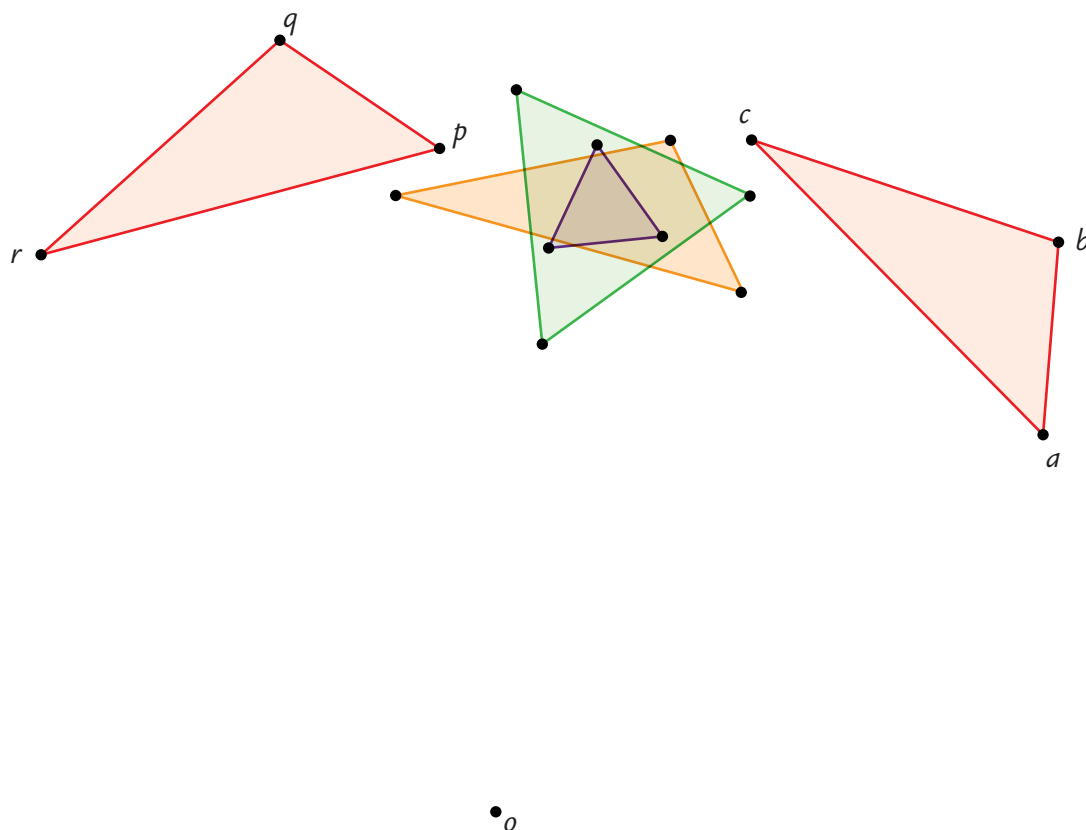
$$x^3 = pqr.$$

Ahora bien, como p es raíz de la ecuación, $\mu \cdot p$, $\bar{\mu} \cdot p$ también son raíces, y estas coinciden con q y r en algún orden. Encontramos que p, q, r son los vértices de un triángulo equilátero centrado en 0, y tenemos presente que $p + q + r = 0$. Como los lados del triángulo ab, bc, ca son paralelos a $0p, 0q$,

Or, respectivamente, en conformidad con lo observado al comienzo de esta solución, resulta que los ángulos de abc miden 60° ; con esto, abc es equilátero.

Problema 22 Dados el triángulo abc y un punto o , se hace rotar abc 60° alrededor de o , en sentido horario o antihorario, y se obtiene el triángulo pqr , donde a se corresponde con p , b con q y c con r . Mostrar que:

1. Los puntos medios de ap , bq y cr son los vértices de un triángulo semejante a abc .
2. Los puntos medios de aq , br y cp son los vértices de un triángulo equilátero.
3. Los puntos medios de ar , bp y cq son los vértices de un triángulo equilátero.



¿Qué relaciones hay entre las áreas de estos triángulos?

Solución

Podemos elegir como origen el punto o y denotar con μ el complejo unitario de argumento 60° . Los puntos medios en el primer caso están dados por:

$$\frac{a+\mu \cdot a}{2} = \frac{1+\mu}{2} \cdot a, \quad \frac{b+\mu \cdot b}{2} = \frac{1+\mu}{2} \cdot b, \quad \frac{c+\mu \cdot c}{2} = \frac{1+\mu}{2} \cdot c.$$

Los vértices de este triángulo se obtienen multiplicando los vértices de abc por el número complejo $\frac{1+\mu}{2}$, cuyo argumento es de 30° y su módulo es $\frac{\sqrt{3}}{2}$, en consecuencia, el área de este triángulo es $\frac{3}{4}$ del área de abc .

Los puntos medios en el segundo caso están dados por:

$$\frac{a+\mu \cdot b}{2}, \quad \frac{b+\mu \cdot c}{2}, \quad \frac{c+\mu \cdot a}{2}.$$

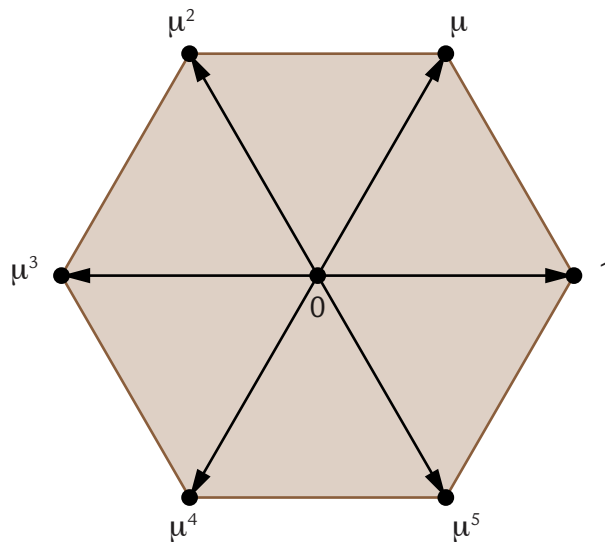
Este triángulo es homotético al triángulo de vértices:

$$a + \mu \cdot b, \quad b + \mu \cdot c, \quad c + \mu \cdot a.$$

Para ver si un triángulo es equilátero, usamos el criterio con las raíces cúbicas de la unidad, representadas por $1, \mu^2, \mu^4$.

$$\begin{aligned} a + \mu \cdot b + \mu^4(b + \mu \cdot c) + \mu^2(c + \mu \cdot a) = \\ (1 + \mu^3) \cdot a + (\mu + \mu^4) \cdot b + (\mu^2 + \mu^5) \cdot c = 0 \end{aligned}$$

La suma precedente da cero, debido a que en la expresión cada raíz sexta esta sumada con su opuesta.



Como en el caso anterior, el tercer caso puede ser tratado en forma similar, considerando los puntos dados por:

$$a + \mu \cdot c, \quad b + \mu \cdot a, \quad c + \mu \cdot b.$$

En cada caso, las áreas de los triángulos de puntos medios son un cuarto de las respectivas áreas de los triángulos de $a + \mu \cdot b, b + \mu \cdot c, c + \mu \cdot a$ y $a + \mu \cdot c, b + \mu \cdot a, c + \mu \cdot b$, que por ser ambos equiláteros pueden calcularse como:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} |b - a + (c - b)\mu|^2, \quad \frac{\sqrt{3}}{4} |b - a + (a - c)\mu|^2.$$

Por otra parte, el área de abc puede calcularse como:

$$\frac{1}{4} |(b - a) \cdot \overline{(c - a)} - \overline{(b - a)} \cdot (c - a)|.$$

Denotando $x = b - a, y = c - a$ las tres expresiones de las áreas consideradas pueden escribirse como:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} |x + (y - x)\mu|^2, \quad \frac{\sqrt{3}}{4} |x - y\mu|^2, \quad \frac{1}{4} |x\bar{y} - \bar{x}y|.$$

Teniendo en cuenta que $1 - \mu = \mu^5$ y que $\mu^4 = -\mu$, resulta:

$$|x + (y - x)\mu| = |\mu^5 x + \mu y| = |\mu| \cdot |\mu^4 x + y| = |-\mu x + y|.$$

Calculando los cuadrados de los módulos:

$$\begin{aligned} |-\mu x + y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 - \mu x \bar{y} - \overline{\mu x} y \\ |x - \mu y|^2 &= |x|^2 + |y|^2 - x \overline{\mu y} - \overline{x} \mu y. \end{aligned}$$

El módulo de la resta, miembro a miembro, de estas expresiones es:

$$|(\bar{\mu} - \mu)(x\bar{y} - \bar{x}y)| = \sqrt{3} \cdot |x\bar{y} - \bar{x}y|.$$

Consecuentemente, el módulo de la diferencia entre las áreas de los triángulos de puntos medios es:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot |x\bar{y} - \bar{x}y| = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} |x\bar{y} - \bar{x}y|.$$

Se concluye que el módulo de la diferencia entre las áreas de los triángulos de puntos medios es tres cuartos del área de abc .

Nota: Otros dos triángulos equiláteros pueden generarse usando la rotación en sentido contrario, es decir, tomando μ como complejo unitario con 300° de argumento, pero no se obtendría nada nuevo. ¿Por qué?

Problema 23 Un paralelogramo $abcd$ se rota alrededor de un punto 90° , en sentido horario o anti-horario, para obtener el paralelogramo $pqrs$, donde a, b, c, d se corresponden con p, q, r, s , respectivamente. Mostrar que los puntos medios de los segmentos aq, br, cs, dp y los puntos medios de los segmentos as, bp, cq, dr son vértices de cuadrados. Mostrar también que el módulo de la diferencia entre las áreas de estos cuadrados es igual al área del paralelogramo.

Solución

Usaremos el hecho de que, en un paralelogramo, las sumas de los pares de vértices opuestos coinciden.

Podemos suponer que el centro de la rotación es el origen 0 . En tal caso se tiene:

$$p = i \cdot a, q = i \cdot b, r = i \cdot c, s = i \cdot d.$$

En lugar de los promedios podemos considerar las sumas, teniendo en el primer caso:

$$a + b \cdot i, b + c \cdot i, c + d \cdot i, d + a \cdot i.$$

Si trasladamos este cuadrilátero restando $a + bi$, tendremos el cuadrilátero cuyos vértices son:

$$0, b - a + (c - b)i, c - a + (d - b)i, d - a + (a - b)i.$$

Como $a + c = b + d$, resulta:

$$b - a + (c - b)i = i(d - a + (a - b)i)$$

$$c - a + (d - b)i = b - a + (c - b)i + d - a + (a - b)i.$$

Las identidades precedentes muestran que los vértices son de la forma $0, v, v + iv, iv$, que son los vértices de un cuadrado.

El caso de los otros promedios se trata en forma análoga. Las áreas de los cuadrados obtenidos están dadas por:

$$\frac{1}{4}|b - a + (c - b)i|^2, \quad \frac{1}{4}|b - a + (a - d)i|^2, \quad \frac{1}{2}|(b - a)(\overline{d - a}) - (\overline{b - a})(d - a)|.$$

Poniendo $x = b - a, y = d - a$, resulta $c - b = d - a = y$, y las áreas están dadas por:

$$\frac{1}{4}|x + yi|^2, \quad \frac{1}{4}|x - yi|^2, \quad \frac{1}{2}|x\bar{y} - \bar{x}y|.$$

Desarrollando los cuadrados queda:



$$\frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2 + i(\bar{x}y - x\bar{y}))$$

$$\frac{1}{4}(|x|^2 + |y|^2 + i(x\bar{y} - \bar{x}y)).$$

Resulta claro que el módulo de la diferencia entre estas dos áreas es igual al área del paralelogramo.

Problema 24 Dado un paralelogramo, construir dos cuadrados cuyas áreas difieran en el área del paralelogramo usando regla y compás.

Solución

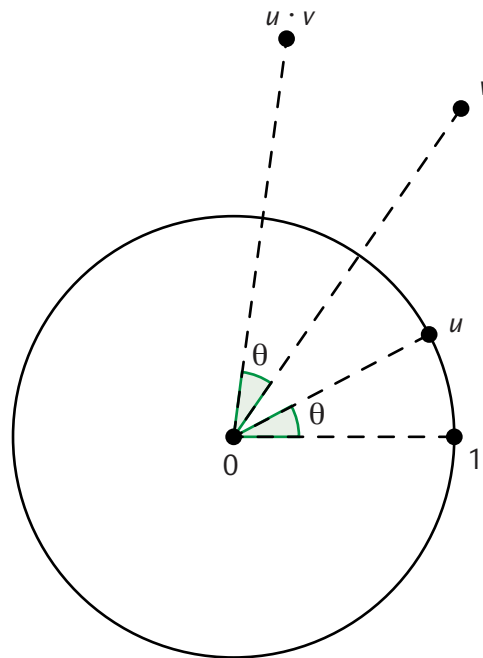
Ver el Problema 23.

Problema 25 Dados los números complejos a y b , hallar un complejo u tal que:

- i) $a, b, (1 - u) \cdot a + u \cdot b$ sean los vértices de un triángulo equilátero.
- ii) $a, b, (1 - u) \cdot a + u \cdot b$ sean los vértices de un triángulo rectángulo isósceles.
- iii) $a, b, (1 - u) \cdot a + u \cdot b$ sean los vértices de un triángulo semejante al triángulo de lados 3, 4, 5.

Solución

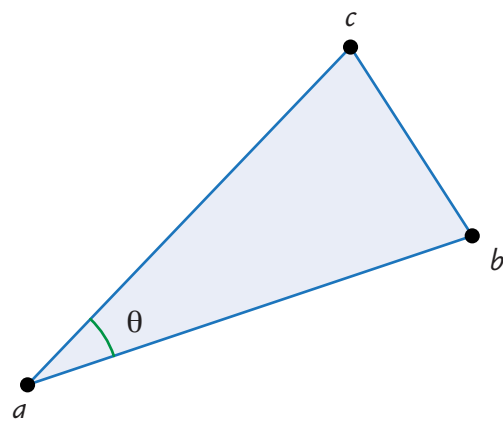
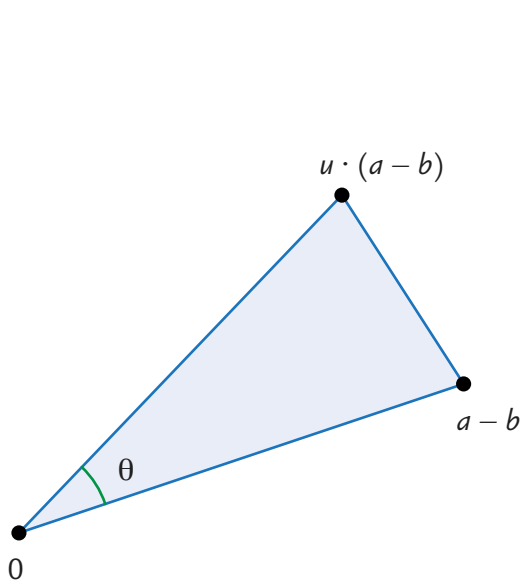
Consideremos u un número complejo de módulo 1 y argumento θ . Dado un complejo v , el producto $u \cdot v$ coincide con el vector obtenido al rotar v en sentido antihorario alrededor del origen, hasta barrer el ángulo θ .



Notemos $c = (1 - u) \cdot a + u \cdot b$, el triángulo de vértices a, b, c es isósceles puesto que:

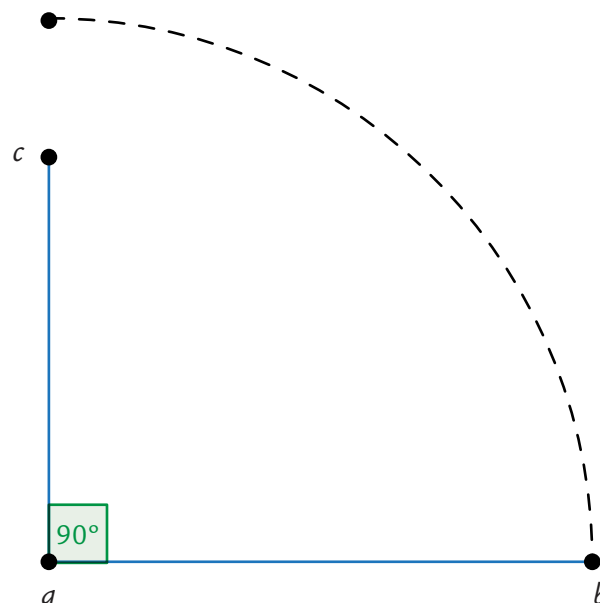
$$|(1 - u) \cdot a + u \cdot b - a| = |u \cdot (b - a)| = |u| \cdot |b - a| = |b - a|.$$

Además, el ángulo bac es igual al ángulo $(b - a)0(c - a)$, pero $c - a = u \cdot (b - a)$ y el ángulo es entonces igual a θ .



Para resolver el problema bastará tomar $u = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ en el primer caso y $u = i$ en el segundo caso.

Para el tercer caso, dado que el triángulo necesariamente es rectángulo, podemos obtener c rotando b 90° alrededor de a y contraer para que la relación $ab:ac$ sea 4:3.

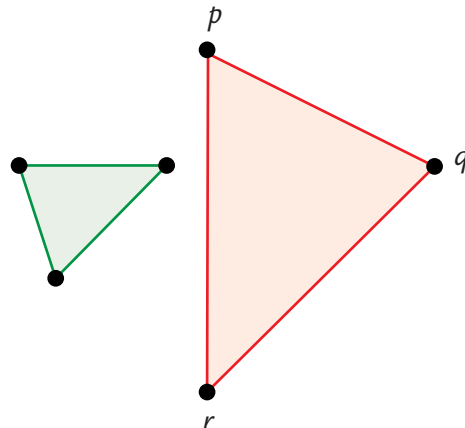
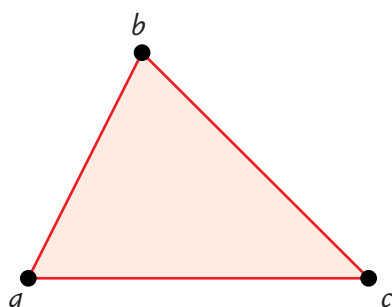


Aquí:

$$c = \frac{3}{4}i(b-a) + a = \left(1 - \frac{3}{4}i\right) \cdot a + \frac{3}{4}i \cdot b.$$

Es decir, $u = \frac{3}{4}i$.

Problema 26 Sean abc y pqr triángulos directamente semejantes. Mostrar que los baricentros de los triángulos aqr , bpr y cpq son los vértices de un triángulo semejante a abc .



Solución

Existe un número complejo u tal que $c = u \cdot a + (1 - u) \cdot b$ y puesto que abc y pqr son directamente semejantes, debe ser $r = u \cdot p + (1 - u) \cdot q$. El triángulo que tiene los baricentros considerados como vértices es directamente semejante al triángulo de vértices:

$$a + q + r, b + p + r, c + p + q$$

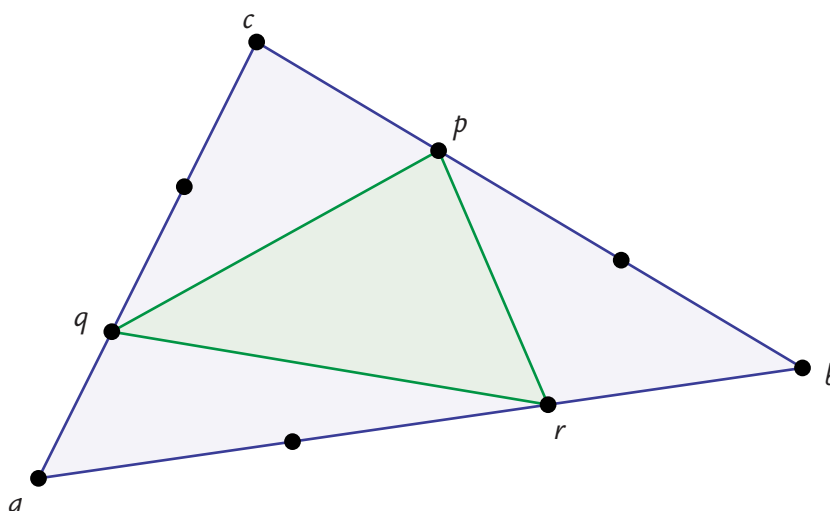
calculando:

$$u(a + q + r) + (1 - u)(b + p + r) = c + u \cdot q + (1 - u) \cdot p + r =$$

$$c + u \cdot q + (1 - u) \cdot p + u \cdot p + (1 - u) \cdot q = c + p + q.$$

De modo que el triángulo formado con los baricentros es directamente semejante a abc .

Problema 27 Los lados del triángulo abc se dividen en tres partes iguales. Con puntos de la división se forma el triángulo pqr indicado en la figura.



Reconstruir abc a partir de pqr .

Solución 1

Podemos expresar:

$$p = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}b, \quad q = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c, \quad r = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a.$$

Se observa que $p + q + r = a + b + c$, de modo que abc y pqr tienen el mismo baricentro o dado por:

$$o = \frac{a+b+c}{3}.$$

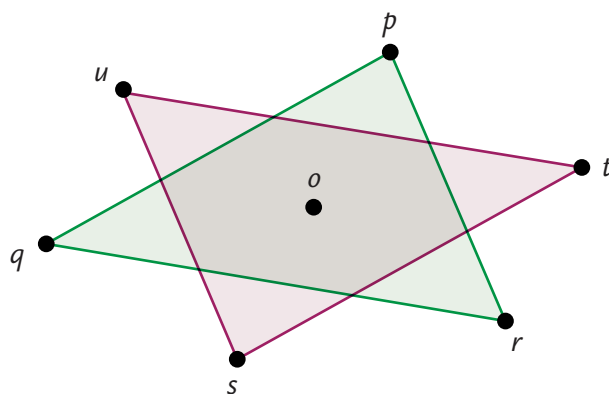
Si calculamos los puntos simétricos de p, q y r respecto de o , obtenemos:

$$2o - p = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b, \quad 2o - q = \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}c, \quad 2o - r = \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}a,$$

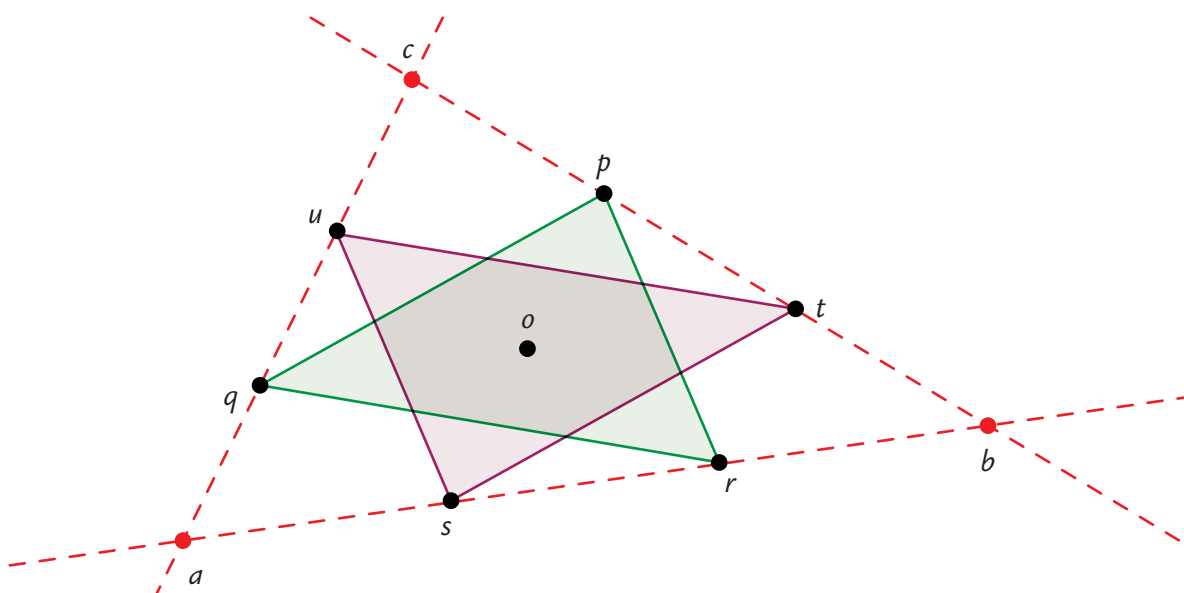
que son los puntos restantes en la división de los lados de abc .

Del análisis precedente surgen los siguientes pasos para obtener la reconstrucción de abc .

1. Marcamos el baricentro o de pqr .
2. Simetrizamos pqr respecto de o para obtener el triángulo stu .
3. Trazamos la recta pt que pasa por b y c , la recta qu que pasa por a y c y la recta rs que pasa por b y a .

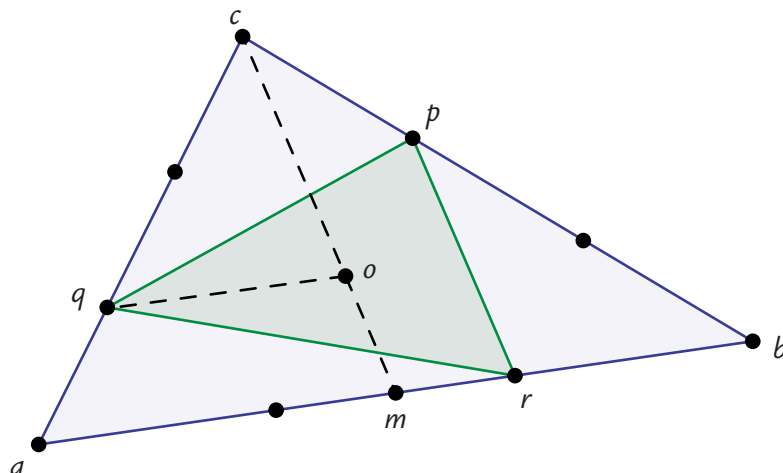


Sobre la figura precedente realizamos el tercer paso para obtener el triángulo buscado, según se ilustra a continuación:

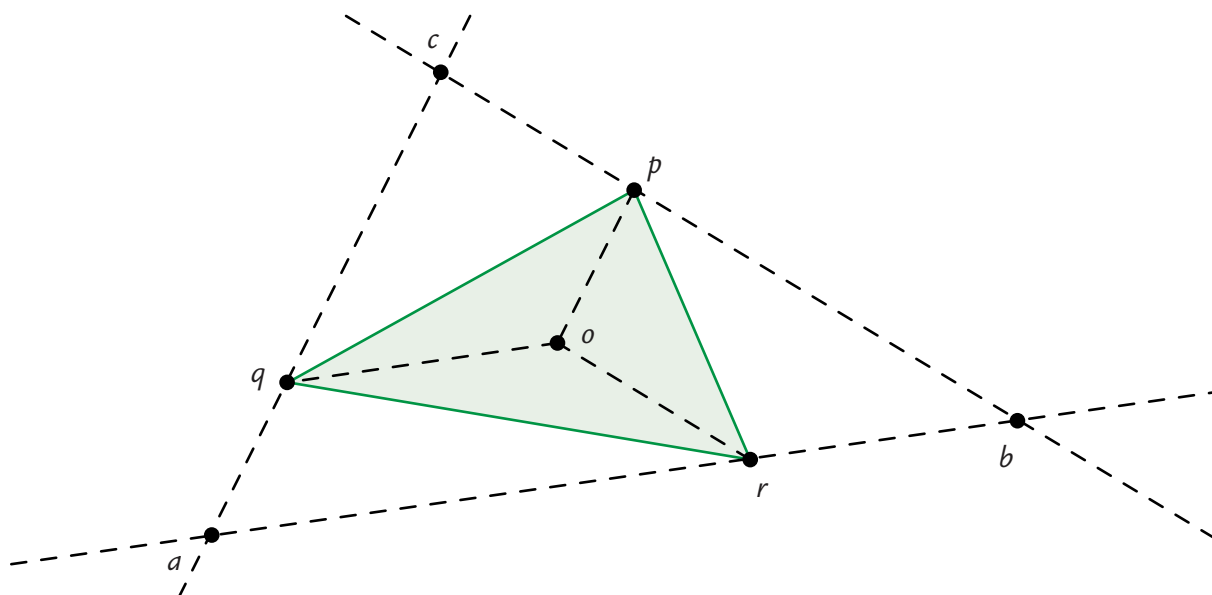


Solución 2

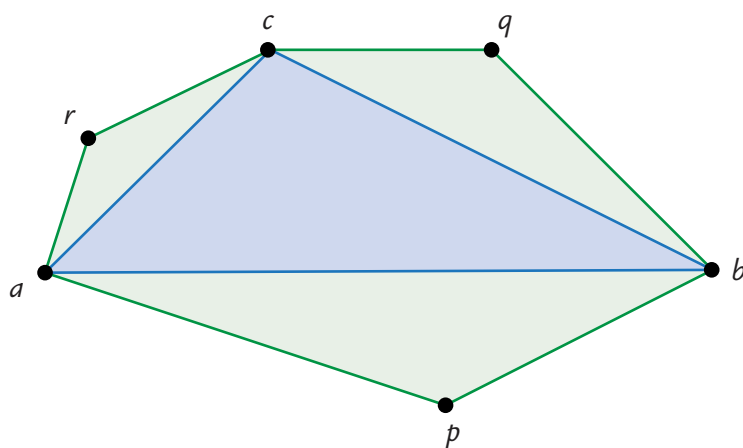
Habiendo observado que abc y pqr tienen el mismo baricentro o , trazando la mediana cm y teniendo en cuenta que la relación $co:om$ es 2:1, encontramos, por el *teorema de Thales*, que ab es paralelo a qo .



En forma similar puede mostrarse que bc es paralelo a ro y que ac es paralelo a po . Para reconstruir abc , trazamos por r una paralela a qo , por p una paralela a ro y por q una paralela a po .



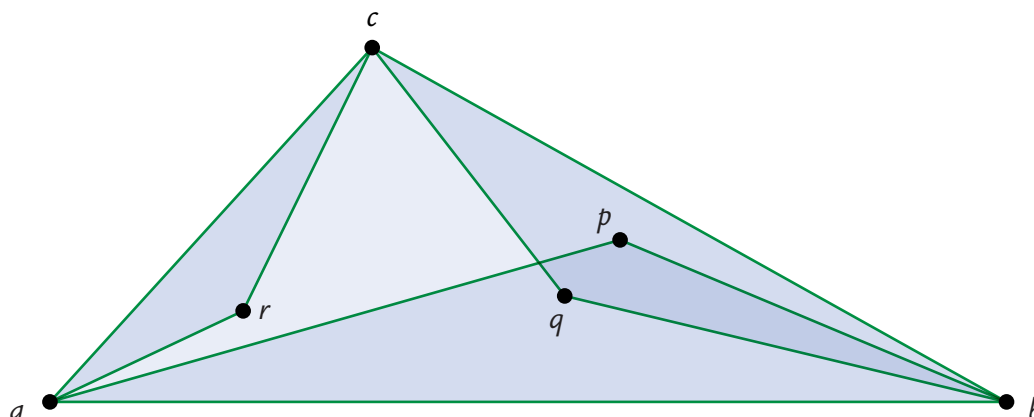
Problema 28 Si, sobre los lados de un triángulo abc , se dibujan triángulos directamente semejantes, acr , cbq y bap como se ilustra en la figura, mostrar que los triángulos abc y pqr tienen el mismo baricentro.



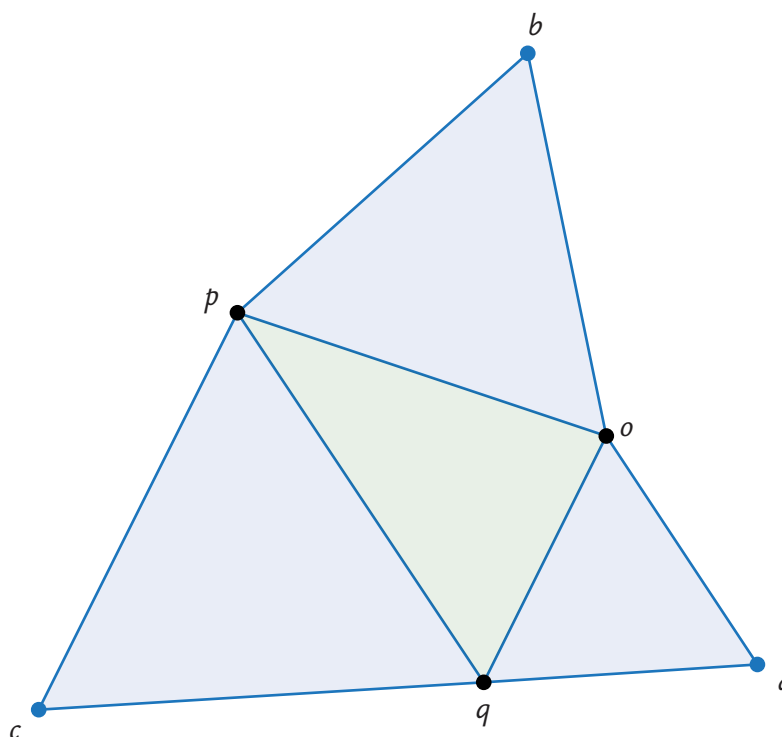
Solución

Sea u un número complejo tal que $r = u \cdot a + (1 - u) \cdot c$; por ser los triángulos dibujados directamente semejantes, debe ser $q = u \cdot c + (1 - u) \cdot b$, $p = u \cdot b + (1 - u) \cdot a$; de estas expresiones resulta $p + q + r = a + b + c$.

Nota: Los triángulos podrían estar dibujados hacia el interior de abc , como en la figura.



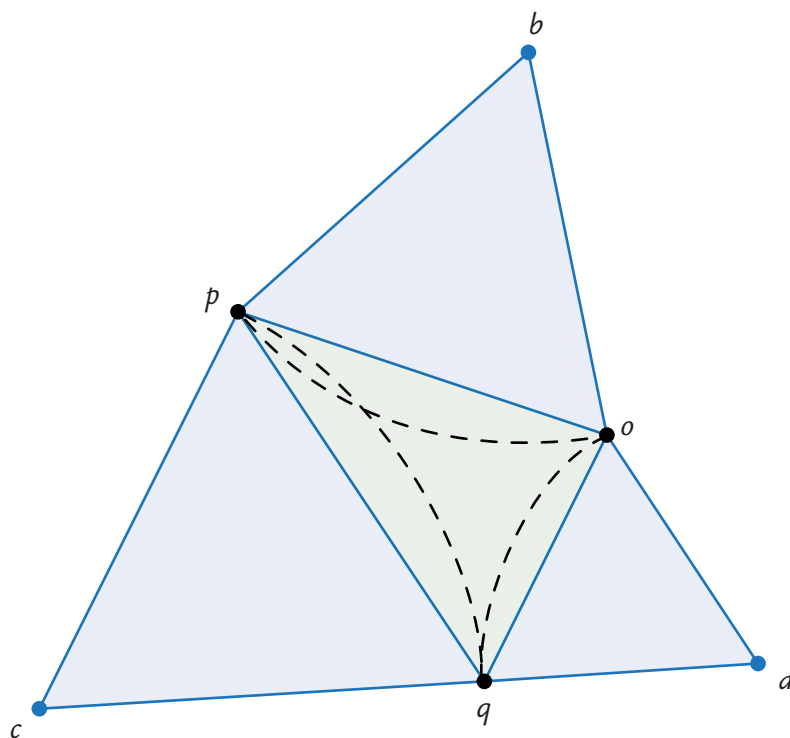
Problema 29 Sobre los lados del triángulo opq se dibujan triángulos equiláteros, como muestra la figura.



Indicar cómo reconstruir opq a partir de abc .

Solución

Se observa que si se rota q 60° alrededor de a en sentido horario, se obtiene o ; si se rota o 60° alrededor de b en sentido horario, se obtiene p ; y si se rota p 60° alrededor de c en sentido horario, se vuelve al punto q .



Sea $u = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ la raíz sexta de la unidad cuyo argumento es 240° . Según lo que acabamos de observar, debe ser:

$$o = u \cdot (q - a) + a$$

$$p = u \cdot (u \cdot (q - a) + a - b) + b$$

$$q = u \cdot (u \cdot (u \cdot (q - a) + a - b) + b - c) + c$$

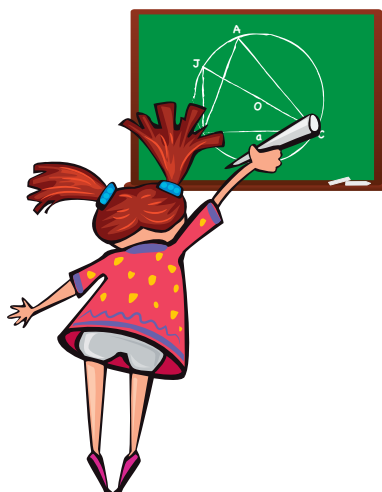
Dado que $u^3 = -1$ y $u^2 = -\bar{u}$, desarrollando la última igualdad se tiene:

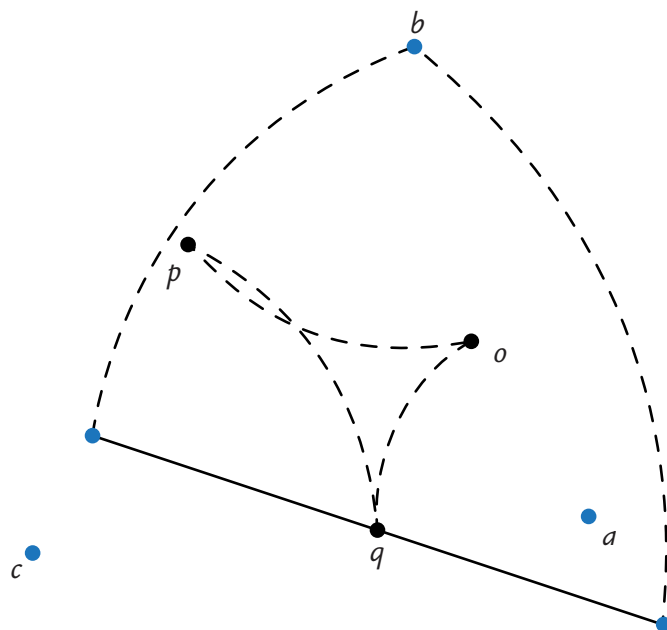
$$q = \bar{u} \cdot (b - a) + a + u \cdot (b - c) + c - q,$$

es decir:

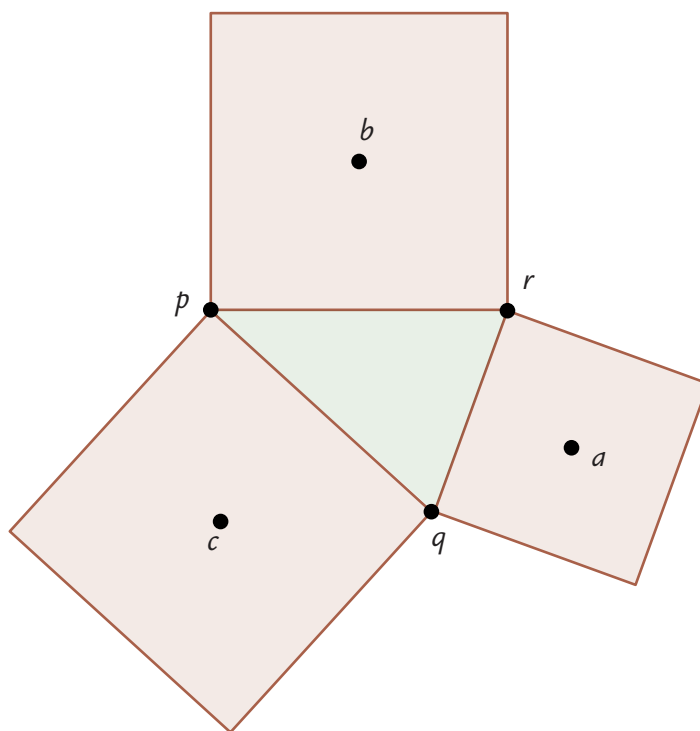
$$q = \frac{\bar{u} \cdot (b - a) + a + u \cdot (b - c) + c}{2}.$$

Resulta entonces que q es el promedio de $\bar{u} \cdot (b - a) + a$ y $u \cdot (b - c) + c$, el primero se obtiene al rotar b 60° en sentido antihorario alrededor de a , el segundo se obtiene al rotar b 60° en sentido horario alrededor de c .





Problema 30 Sobre los lados del triángulo pqr se dibujan cuadrados, todos orientados hacia el exterior del triángulo. Reconstruir pqr a partir de los centros a , b y c de los cuadrados.



Solución

Dado que r se obtiene al rotar q alrededor de a 90° en sentido horario, p se obtiene al rotar r alrededor de b 90° en sentido horario y q se obtiene al rotar p alrededor de c 90° en sentido horario, podemos poner:

$$r = -i \cdot q + (1 + i) \cdot a$$

$$p = -i \cdot r + (1 + i) \cdot b$$

$$q = -i \cdot p + (1 + i) \cdot c$$

es decir que:

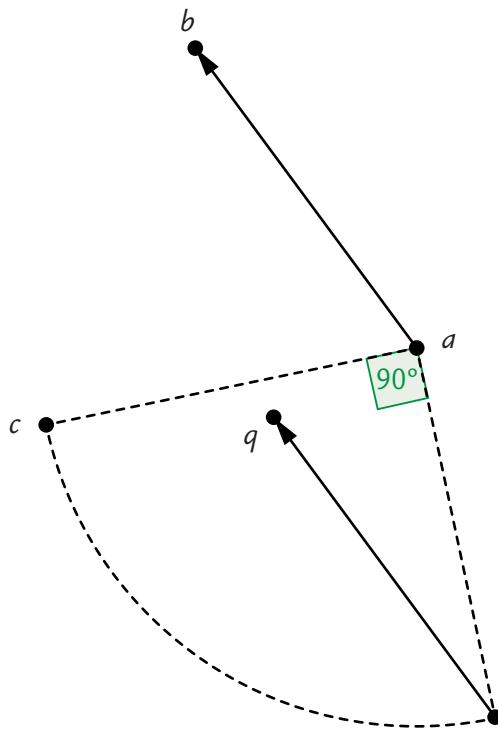
$$p = -i(-i \cdot q + (1+i) \cdot a) + (1+i) \cdot b = -q + (1-i) \cdot a + (1+i) \cdot b$$

$$q = -i \cdot (-q + (1-i) \cdot a + (1+i) \cdot b) + (1+i) \cdot c = i \cdot q - (1+i) \cdot a + (1-i) \cdot b + (1+i) \cdot c$$

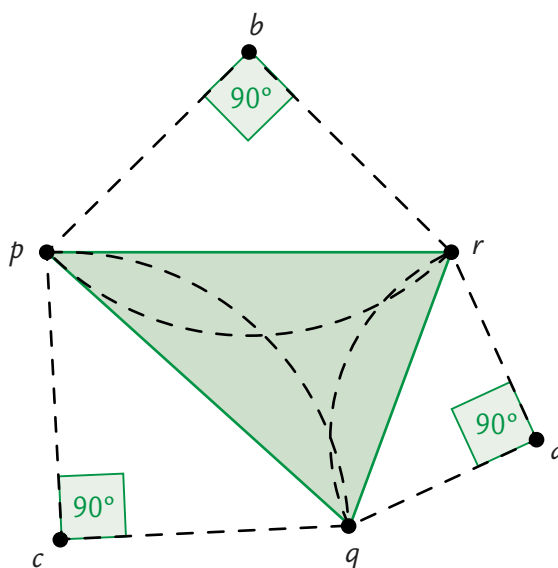
resulta:

$$q = \frac{-(1+i) \cdot a + (1-i) \cdot b + (1+i) \cdot c}{1-i} = i \cdot (c-a) + b.$$

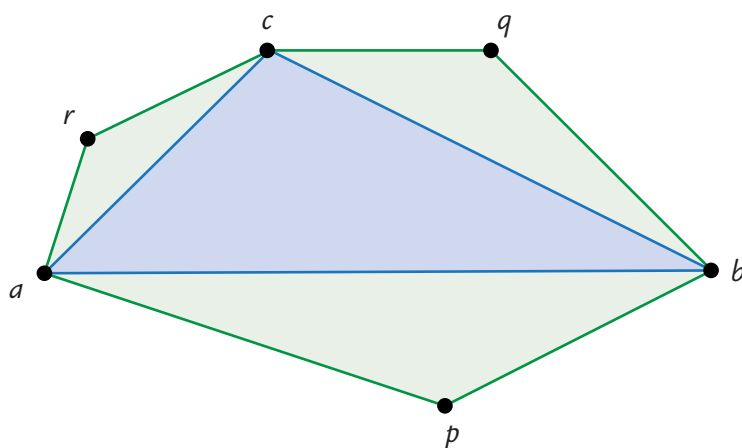
En consecuencia, podemos obtener q rotando c 90° en sentido antihorario alrededor a y luego trasladarlo con $b-a$. La figura a continuación muestra la construcción.



A partir de q , por las rotaciones sucesivas indicadas al comienzo, encontramos gráficamente los vértices r y p .



Nota: Se puede considerar el problema más general de dibujar triángulos directamente semejantes sobre los lados de un triángulo abc , como se indica en la figura a continuación, y plantearse la posibilidad de reconstruir abc a partir de pqr .



Que los triángulos alrededor de abc sean directamente semejantes significa que existe un número complejo u no real tal que:

$$p = u \cdot a + (1 - u) \cdot b$$

$$q = u \cdot b + (1 - u) \cdot c$$

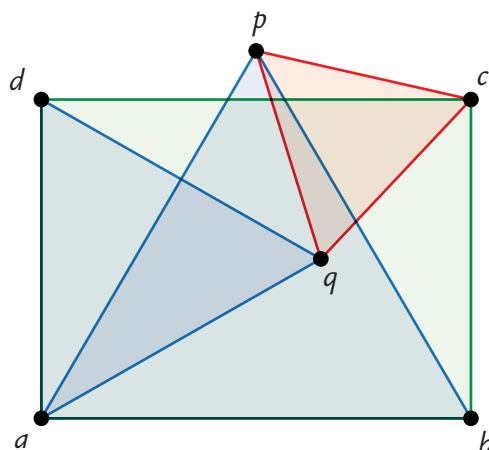
$$r = u \cdot c + (1 - u) \cdot a$$

Este sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas puede ser resuelto usando la *regla de Crámer* mientras el determinante de la matriz del sistema no sea cero. Por ejemplo:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} p & 1-u & 0 \\ q & u & 1-u \\ r & 0 & u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} u & 1-u & 0 \\ 0 & u & 1-u \\ 1-u & 0 & u \end{vmatrix}} = \frac{(p+q+r) \cdot u^2 - (q+2r) \cdot u + r}{3u^2 - 3u + 1}$$

en el caso en que $3u^2 - 3u + 1 \neq 0$. La reconstrucción es posible salvo cuando $u = \frac{3+\sqrt{3}i}{6}, \frac{3-\sqrt{3}i}{6}$, ya que estos son los números que anulan al determinante del sistema. En tal situación, la reconstrucción no es posible pues el sistema no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

Problema 31 Sobre dos lados del rectángulo $abcd$ se dibujan dos triángulos equiláteros, tal como muestra la figura.



Mostrar que el triángulo cpq también es equilátero.

Solución

Podemos trasladar la figura de modo que a quede en el origen, es decir, supondremos que a es 0.

En esta situación, si $\mu = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, se tiene:

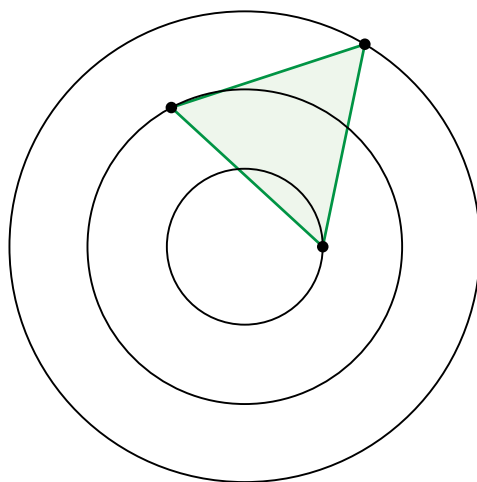
$$p = \mu \cdot b, q = \bar{\mu} \cdot d, c = b + d.$$

Como pqc está orientado en sentido antihorario, pqc es equilátero si se verifica la igualdad:

$$\mu^2 \cdot p + \bar{\mu}^2 \cdot q + c = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\mu^3 = -1$, así como las expresiones de p , q y c , tiene lugar la identidad precedente.

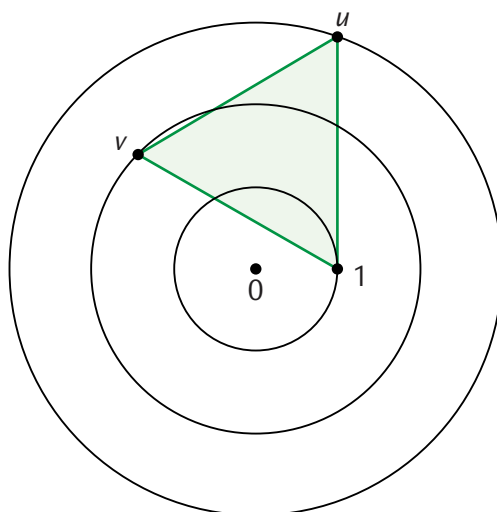
Problema 32 Un triángulo equilátero tiene sus vértices en circunferencias concéntricas de radios 1, 2 y 3. Hallar el área del triángulo.



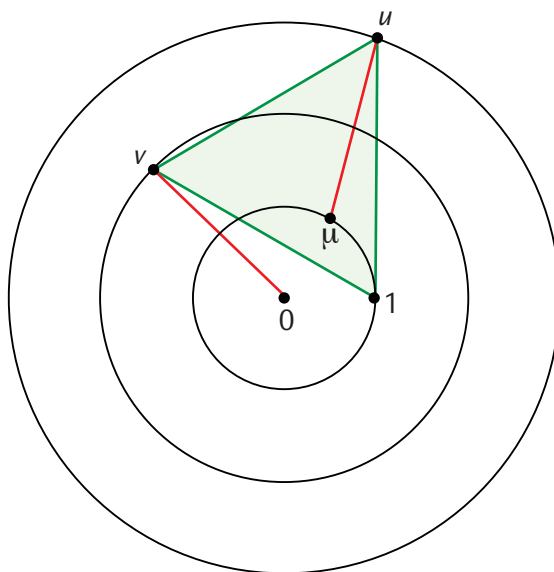
Solución

Podemos trasladar la figura de manera que el centro común de las circunferencias sea 0. Luego, rotarla para que un vértice del triángulo sea 1. Finalmente, podemos simetrizar la figura, si fuera necesario, y suponer que el triángulo está en la parte superior del plano.

Indiquemos con u el vértice de módulo 3 y con v el vértice de módulo 2.



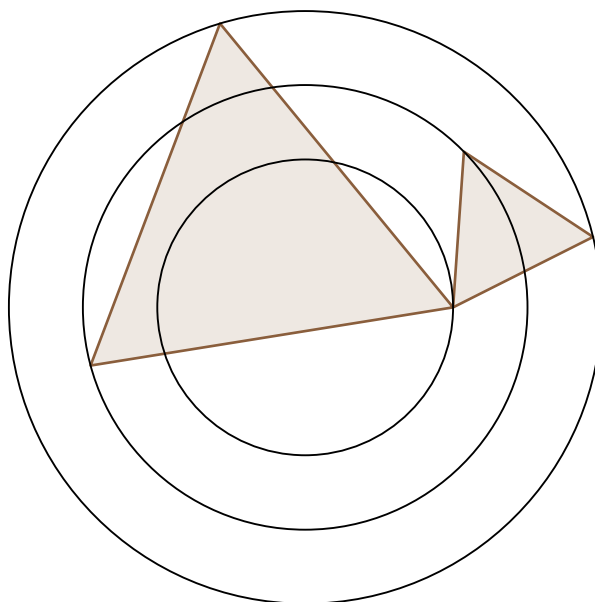
Consideremos $\mu = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ la raíz sexta de la unidad de argumento 60° . Si giramos 0 en sentido horario 60° alrededor de 1, obtenemos μ ; si hacemos lo mismo con μ , obtenemos u . Es decir que el segmento μu se obtiene al rotar el segmento 0μ en sentido horario 60° alrededor de 1.



Teniendo en cuenta que: $|\mu| = 1$, $|u| = 3$ y $|u - \mu| = 2$, los puntos 0, μ y u deben estar alineados, es decir, $u = 3 \cdot \mu$. El área del triángulo está dada por:

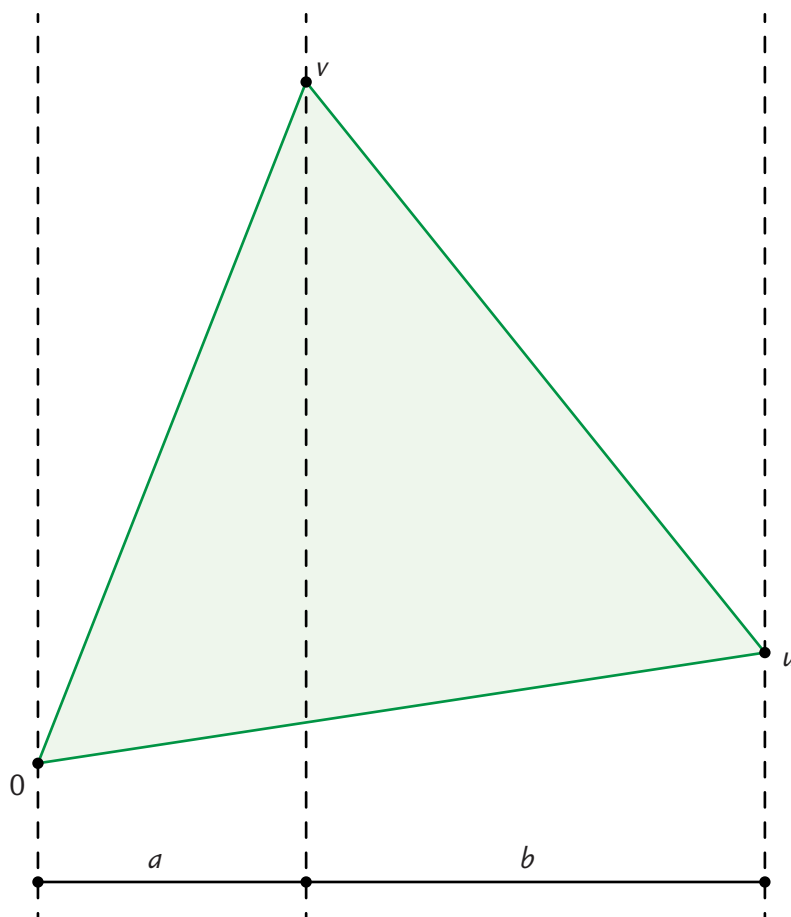
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |u - 1|^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |3 \cdot \mu - 1|^2 = 7 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Nota: De la relación entre los radios de las circunferencias pueden surgir dos resultados correspondientes a la pregunta del problema, por ejemplo, la figura ilustra el caso de radios 2, 3, 4.



Problema 33 Hallar la expresión del área del triángulo equilátero inscrito en tres rectas paralelas donde dos consecutivas están separadas por distancias a y b .





Solución

Podemos suponer que los vértices del triángulo son los números complejos 0 , u , v . Escribiendo:

$$u = a + b + ci, \quad v = a + di,$$

de la identidad:

$$v = \left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) u$$

resulta:

$$a = \operatorname{Re}(v) = \operatorname{Re} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \right) \cdot u \right) = \frac{a+b}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Es decir, $c = \frac{b-a}{\sqrt{3}}$, luego:

$$|u|^2 = \frac{4}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

y el área del triángulo será:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} |u|^2 = \frac{\sqrt{3}}{3} (a^2 + ab + b^2).$$

Problema 34 Los números complejos a , b , c , d son los sucesivos vértices de un cuadrado. Si a es de la forma $1 + ki$, c es de la forma $9 + mi$ y d de la forma $7 + li$, hallar el área de $abcd$.

Solución

Como a, b, c, d son los sucesivos vértices del cuadrado, a y c son vértices opuestos; entonces, el centro del cuadrado tiene la forma $5 + hi$ por ser precisamente $\frac{a+c}{2}$.

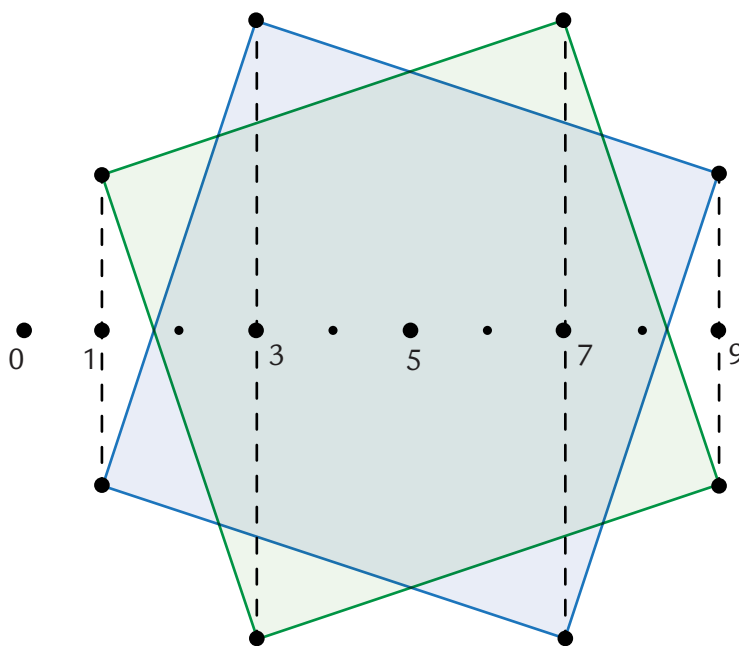
Desplazamos el cuadrado en dirección vertical hasta que el centro coincida con 5, es decir, trasladamos usando el vector asociado con $-hi$.

El centro es también el promedio entre b y d , de modo queda b es de la forma $3 + li$. Rotando a alrededor del centro 90° , en sentido horario o antihorario, debemos caer en b , es decir:

$$(1 + ki - 5) \cdot i + 5 = 3 + li$$

$$(1 + ki - 5) \cdot (-i) + 5 = 3 + li$$

En el primer caso, queda $k = 2$ y $l = -4$; en el segundo caso, $k = -2$ y $l = 4$.



En cualquier caso, el área está dada por $|b - a|^2 = 2^2 + 6^2 = 40$.

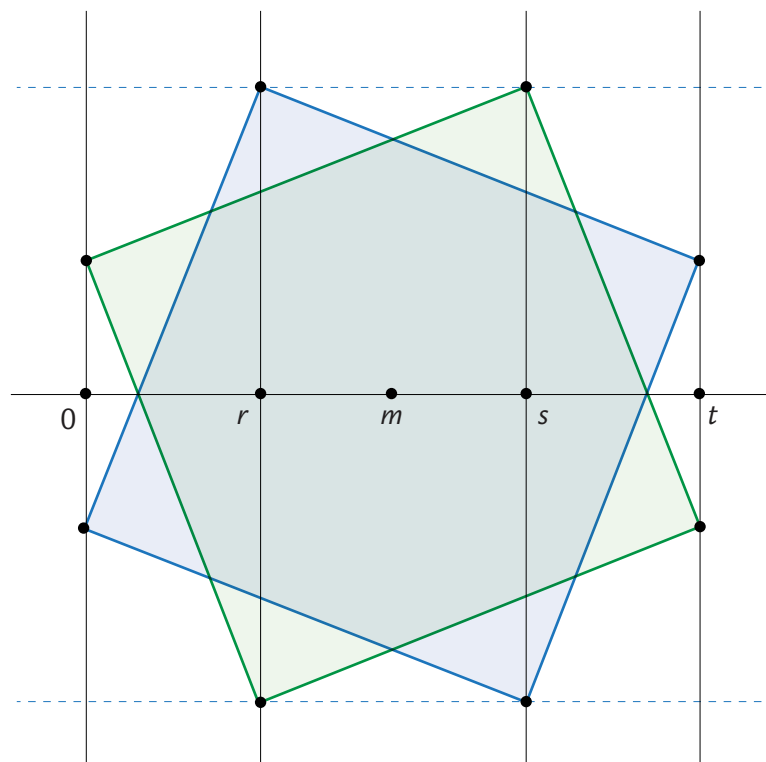
Problema 35 Cuatro rectas paralelas pasan por los vértices de un cuadrado, siendo a, b y c las sucesivas distancias entre rectas contiguas. Mostrar que $a = c$ y hallar el área del cuadrado a partir de a y b .

Solución

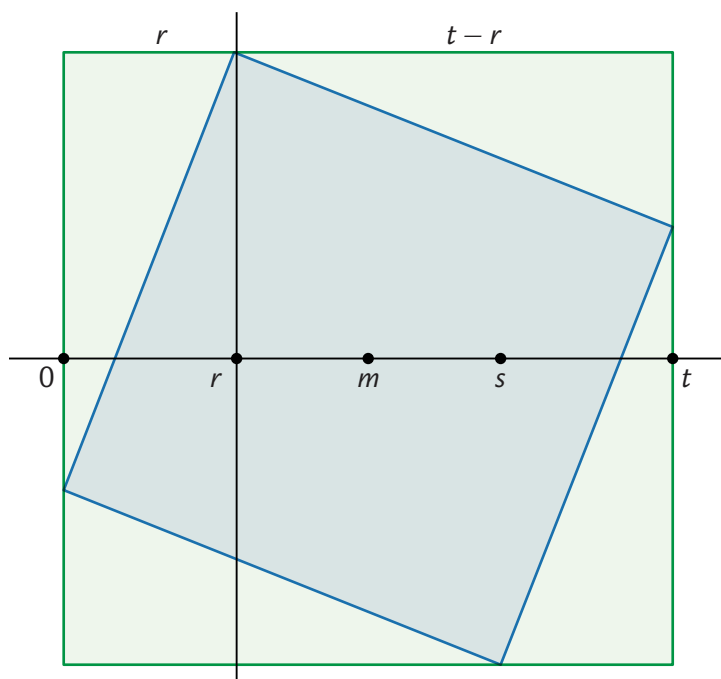
Ubicamos la figura en el plano de modo que una recta esté sobre el eje imaginario y las restantes pasando por los números reales $r = a, s = a + b, t = a + b + c$, y de manera que los sucesivos vértices del cuadrado tengan por parte real a los números $0, r, s$ y t , respectivamente.

El centro del cuadrado es promedio entre los pares de vértices opuestos del cuadrado, entonces los pares $0, t$ y r, s deben tener el mismo promedio m , lo que solo ocurre si $a = c$.

Como en el Problema 34, se puede encontrar dos vértices vecinos del cuadrado rotando el eje imaginario 90° , tanto en sentido horario como en sentido antihorario, y tomar la intersección con la paralela al eje que pasa por r . Se obtendrán dos soluciones, los vértices de un cuadrado son los conjugados de los vértices del otro cuadrado.



Notemos que los cuadrados quedan inscritos en un cuadrado de lado t , como lo ilustra la figura.

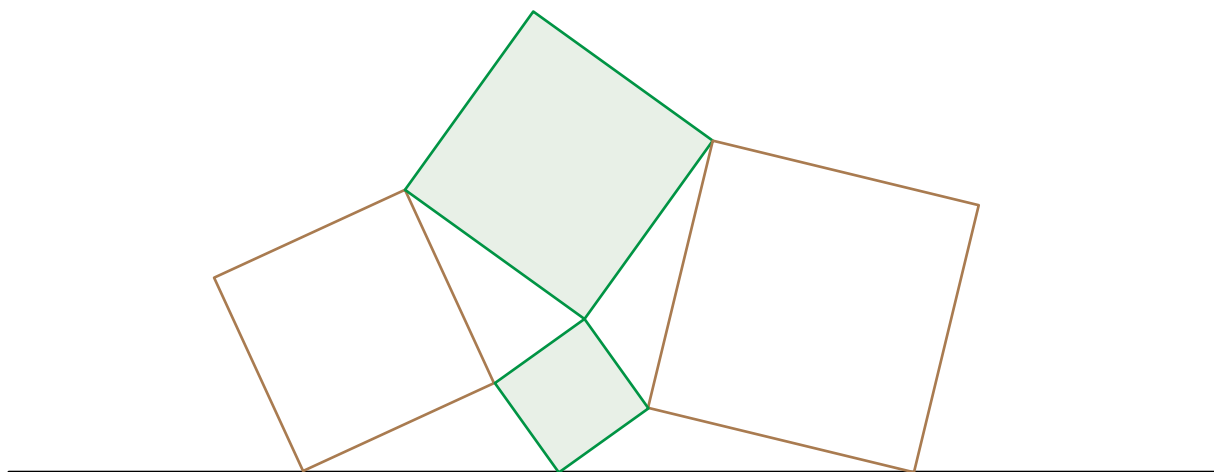


Podemos calcular el área de los cuadrados como $t^2 - 4 \frac{r \cdot (t-r)}{2} = 2a^2 + 2ab + b^2$.

Nota: En la situación del problema, dados los valores a y b hay solo dos posiciones, salvo traslaciones, en las que puede inscribirse un cuadrado entre las paralelas al eje que pasan por 0 y t , y una posición es simétrica de la otra respecto de una línea paralela al eje real.

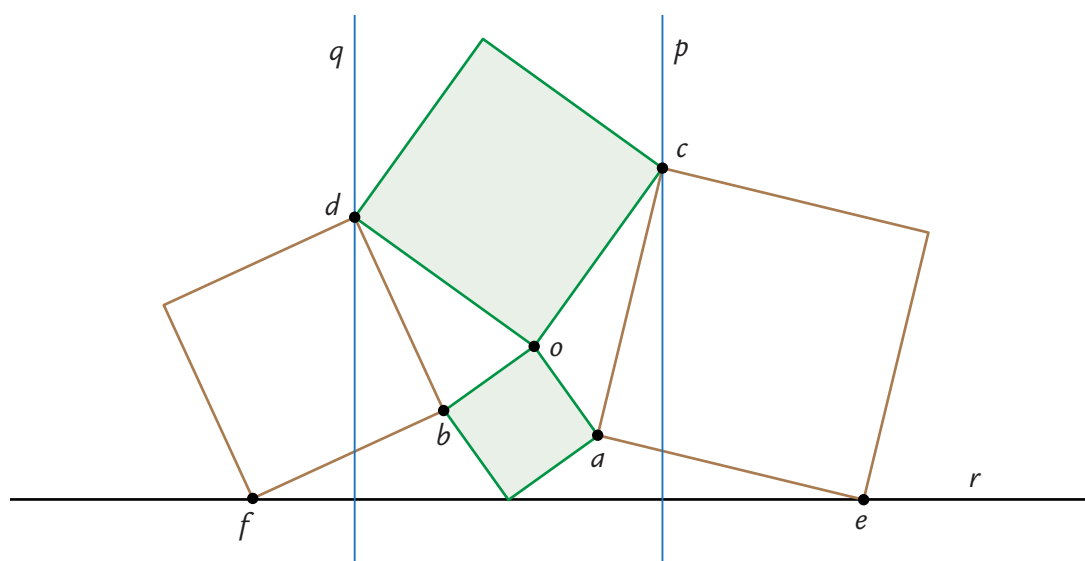
Problema 36 Problema de los cuatro cuadrados abisagrados (1826).

Hallar la relación entre las áreas de los cuadrados sombreados dados en la figura:

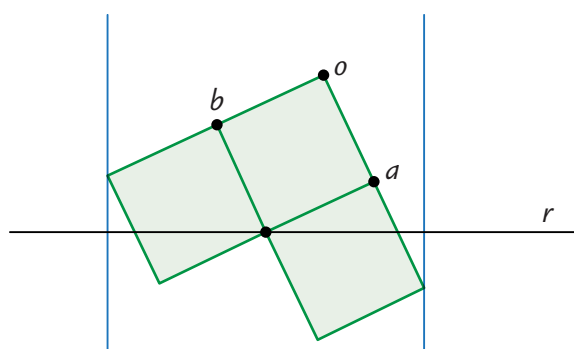


Solución

En la figura a continuación, el punto c se obtiene rotando el punto e 90° en sentido antihorario alrededor de a , de modo que debe estar en la recta p que se obtiene rotando la recta r 90° en sentido antihorario alrededor de a . En forma similar, el punto d se obtiene rotando el punto f 90° en sentido antihorario alrededor de b , de modo que debe estar en la recta q que se obtiene rotando la recta r 90° en sentido antihorario alrededor de b .

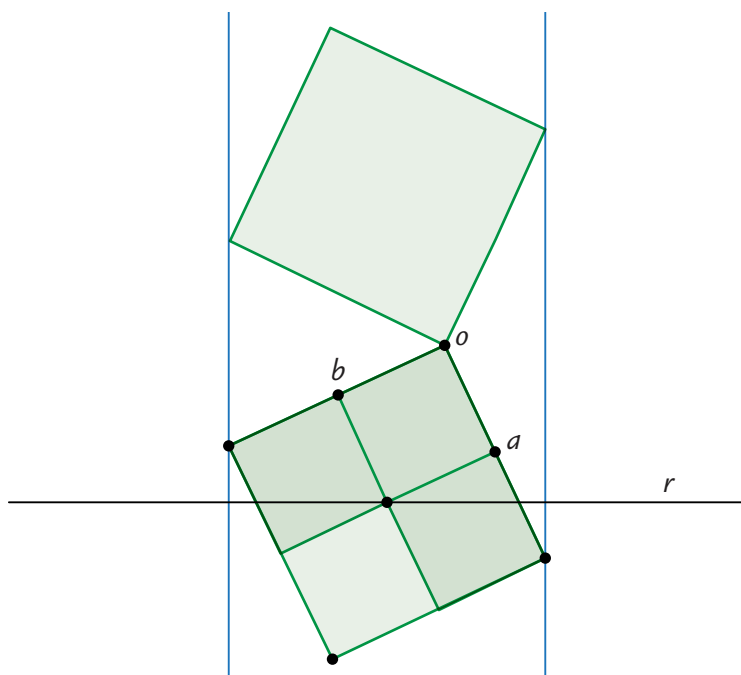


Podemos hacer la siguiente construcción: partiendo de un cuadrado y una recta r que pase por uno de sus vértices, rotamos r alrededor de los vértices opuestos, a y b que no están en r , 90° en ambos casos, de modo de obtener dos rectas paralelas, como en la siguiente figura.



Si rotamos el cuadrado inicial 90° en sentido antihorario alrededor de a y 90° en sentido horario alrededor de b , obtenemos una figura que puede ser completada a un cuadrado inscripto en las rectas

paralelas y que tenga un vértice en el punto o . Por la nota del Problema 35, hay solo dos cuadrados inscritos en las rectas paralelas que tengan a o como uno de sus vértices: el que se obtiene completando la figura anterior y el simétrico de este respecto de la recta paralela a r que pasa por o .

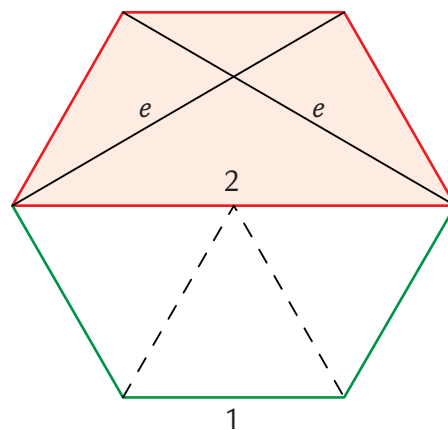
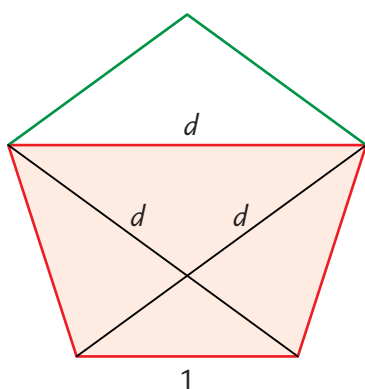


El área del cuadrado mayor es cuatro veces el área del cuadrado menor.

Problema 37 Calcular las longitudes de las diagonales de un pentágono y un hexágono, ambos regulares y de lado 1.

Solución

Todas las diagonales del pentágono regular tienen un mismo valor d . En el hexágono regular hay diagonales que miden el doble del lado y otras que toman un valor e . La figura ilustra la situación.



Como se trata de polígonos inscriptibles, es decir, por sus vértices pasa una circunferencia, podemos aplicar el *teorema de Ptolomeo* a los cuadriláteros sombreados dados en la figura.

Resulta:

$$d^2 = d \cdot 1 + 1 \cdot 1 = d + 1$$

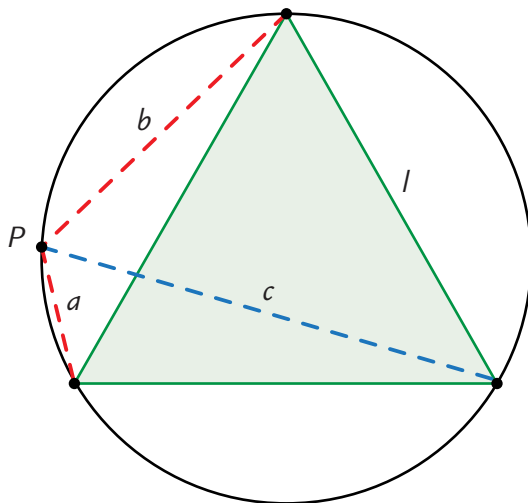
$$e^2 = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3$$

Entonces, $d = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $e = \sqrt{3}$.

Problema 38 Si un triángulo equilátero está inscrito en su circunferencia mostrar que, para un punto P en la circunferencia, la mayor distancia desde P a los vértices del triángulo es igual a la suma de las dos distancias restantes.

Solución

Con las notaciones en la figura,

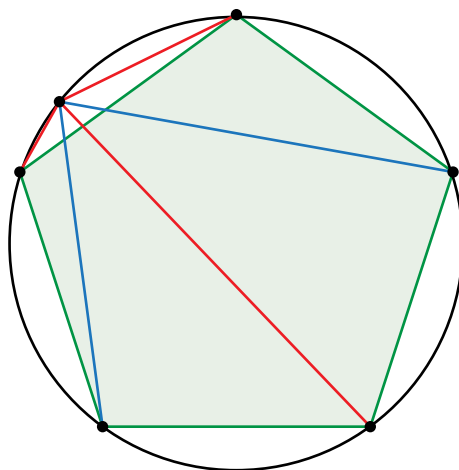


debemos mostrar que $c = a + b$. Aplicando el *teorema de Ptolomeo* al cuadrilátero cuyos vértices son P y los vértices del triángulo equilátero de lado l , se tiene:

$$c \cdot l = a \cdot l + b \cdot l = (a + b) \cdot l.$$

Luego, $c = a + b$.

Problema 39 Los vértices del pentágono regular y el punto de la figura están en una circunferencia. Mostrar que la suma de las longitudes de las cuerdas dadas en color azul es igual a la suma de las longitudes de las cuerdas dadas en color rojo.



Solución

Indicando con l y d , respectivamente, la longitud de los lados y la longitud de las diagonales del pentágono, podemos proceder como en el Problema 38 para establecer la identidad:

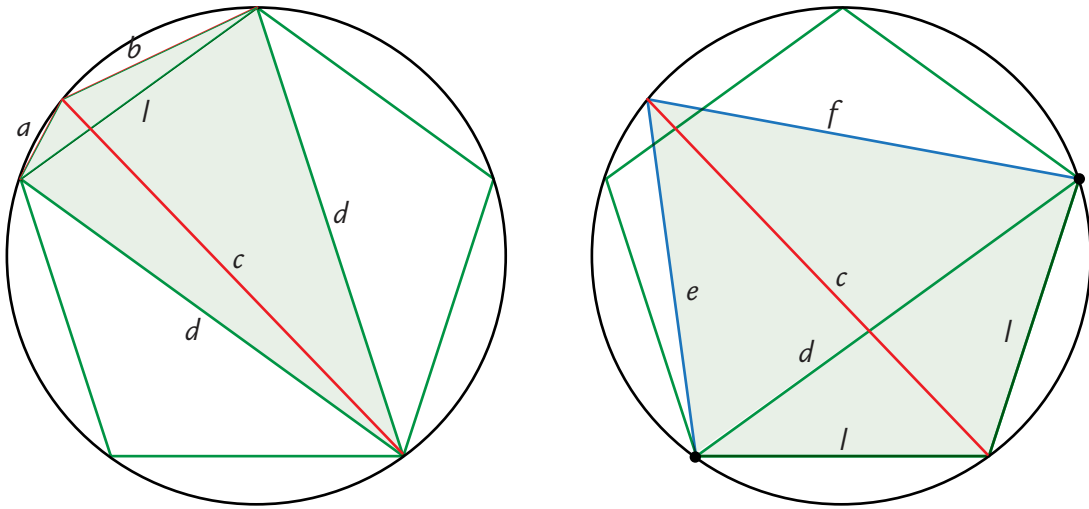
$$d^2 = d \cdot l + l^2$$

o bien:



$$\frac{d}{l} - \frac{l}{d} = 1.$$

Aplicando el *teorema de Ptolomeo* a los cuadriláteros indicados en la figura, donde a , b y c denotan las longitudes de las cuerdas rojas y e y f , las longitudes de las cuerdas azules:



resulta:

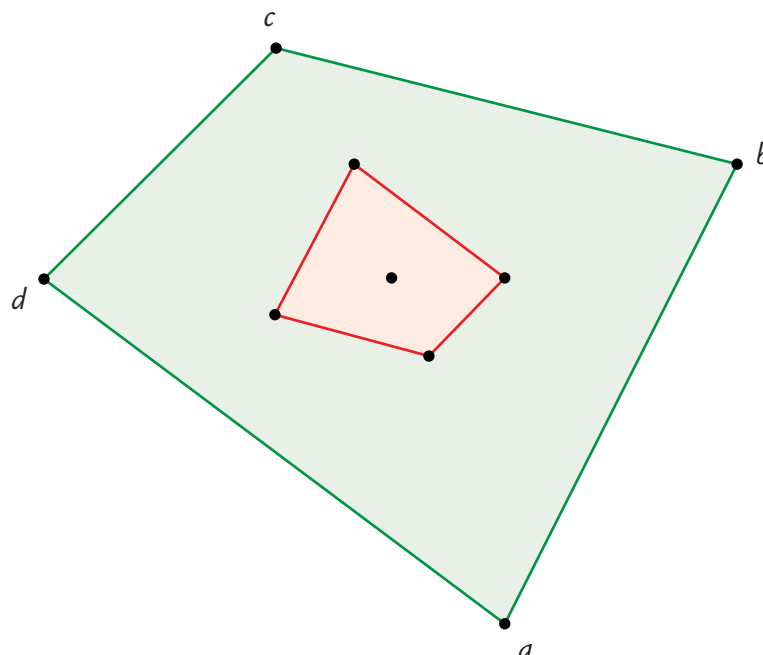
$$(a + b) \cdot d = c \cdot l, \quad (e + f) \cdot l = c \cdot d,$$

con lo que:

$$e + f - (a + b) = c \cdot \left(\frac{d}{l} - \frac{l}{d} \right) = c,$$

donde la segunda igualdad surge de la observación realizada al comienzo de la solución respecto de las longitudes del lado y la diagonal del pentágono regular.

Problema 40 Los números a, b, c, d son los vértices de un cuadrilátero. Mostrar que los baricentros de los triángulos bcd , cda , dab y abc son los vértices de un cuadrilátero homotético a $abcd$.



Solución

Los sucesivos baricentros están dados por:

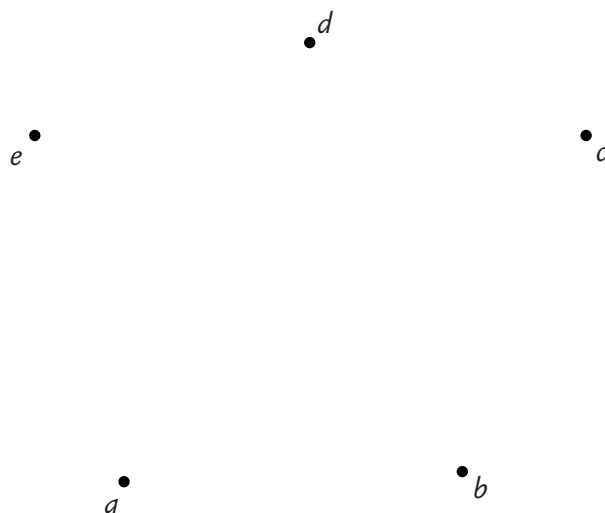
$$\frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+a}{3}, \frac{d+a+b}{3}, \frac{a+b+c}{3}.$$

Estos también pueden ser expresados como:

$$\frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3}a, \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3}b, \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3}c, \frac{a+b+c+d}{3} - \frac{1}{3}d,$$

es decir, son las respectivas imágenes de la homotecia $h(x) = \frac{4}{3}o - \frac{1}{3}x$ de razón $-\frac{1}{3}$ y que tiene por centro el punto $o = \frac{a+b+c+d}{4}$.

Problema 41 Los números complejos a, b, c, d, e son los puntos medios de los lados de un pentágono. Hallar los vértices del pentágono.



Solución 1

Sea p el vértice del pentágono en los lados de este que tienen los puntos medios e y a .

Los sucesivos puntos del pentágono pueden ser obtenidos a partir de p usando las simetrías respecto de a, b, c, d y e ; estos son:

$$2a - p, 2b - (2a - p), 2c - (2b - (2a - p)), \\ 2d - (2c - (2b - (2a - p))), 2e - (2d - (2c - (2b - (2a - p))))$$

El último debe ser igual a p , o sea:

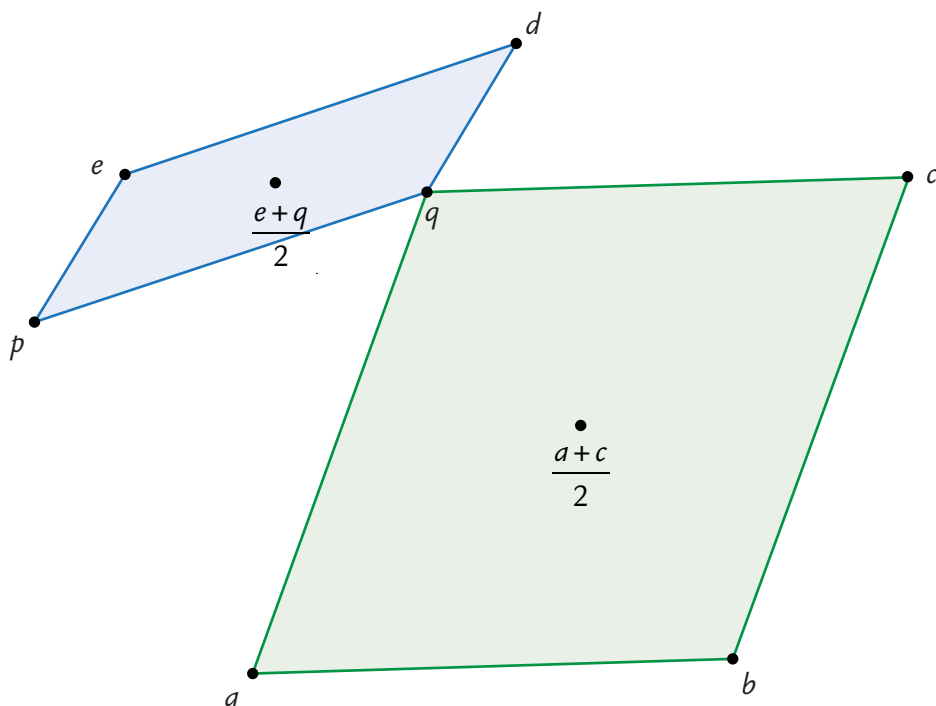
$$p = 2e - 2d + 2c - 2b + 2a - p$$

o bien:

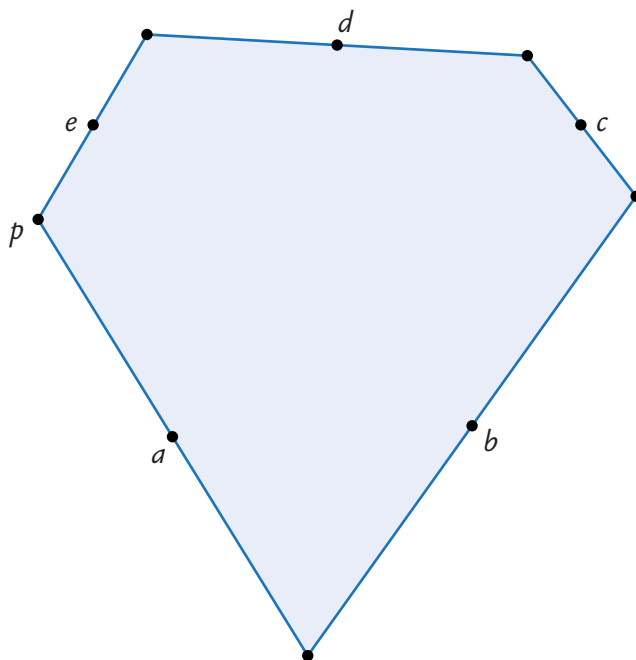
$$p = e - d + c - b + a.$$

Teniendo en cuenta la relación entre los vértices de un paralelogramo (ver el Problema 20) y notando $q = c - b + a$, resulta $p = e - d + q$, de modo que podemos obtener q simetrizando b respecto del punto medio entre a y c , luego obtener p simetrizando d respecto del punto medio entre e y q .

La figura muestra la construcción de p .



A partir de p construimos el pentágono realizando las sucesivas simetrías.



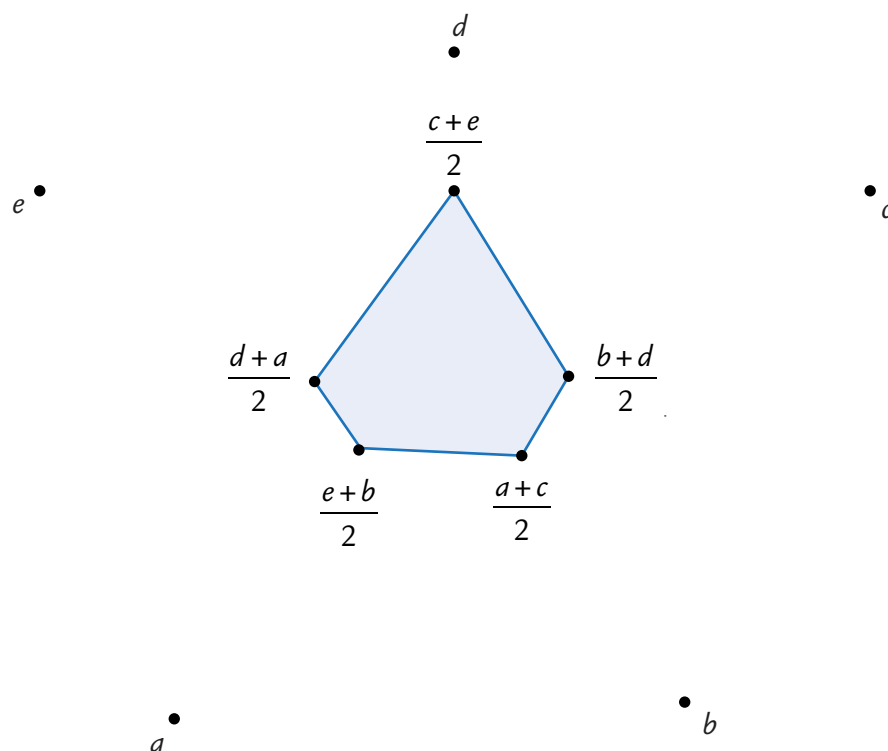
Solución 2

Supongamos que o, p, q, r, s son los vértices del polígono a construir de modo que los puntos a, b, c, d y e están dados por:

$$\frac{o+p}{2}, \frac{p+q}{2}, \frac{q+r}{2}, \frac{r+s}{2}, \frac{s+o}{2}.$$

Construimos el pentágono auxiliar, cuyos vértices son los promedios:

$$\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{c+e}{2}, \frac{d+a}{2}, \frac{e+b}{2}.$$



Se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{a+c}{2} &= \frac{o+p+q+r}{4} = \frac{o+p+q+r+s}{4} - \frac{1}{4}s = \\ &= \frac{5}{4} \left(\frac{o+p+q+r+s}{5} \right) - \frac{1}{4}s\end{aligned}$$

o sea:

$$s = 5 \left(\frac{o+p+q+r+s}{4} \right) - 4 \left(\frac{a+c}{2} \right).$$

Notando $m = \frac{o+p+q+r+s}{5}$ y $h(x) = 5m - 4x$ la homotecia de razón -4 y centro m , resulta:

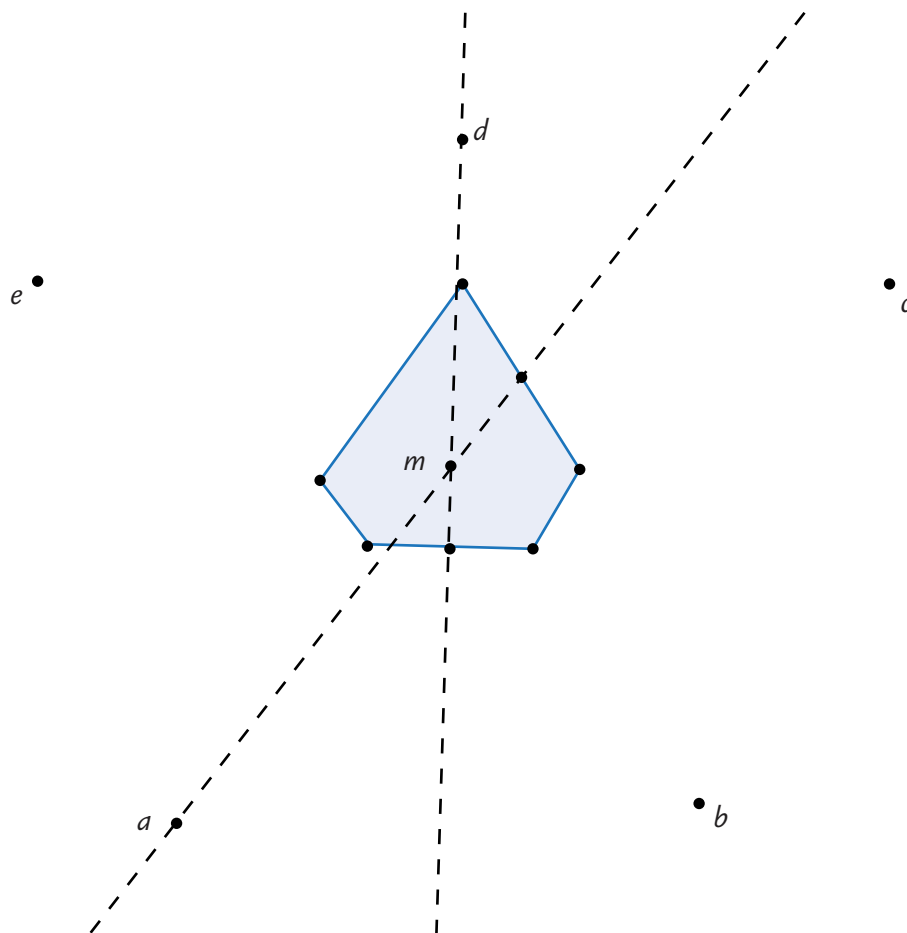
$$h\left(\frac{a+c}{2}\right) = s.$$

Procediendo en forma análoga, se pueden comprobar las identidades:

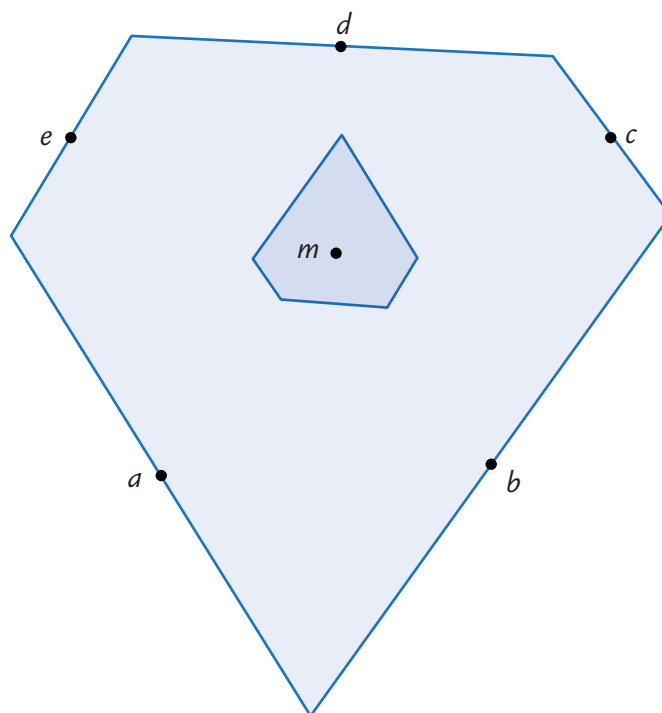
$$h\left(\frac{b+d}{2}\right) = o, h\left(\frac{c+e}{2}\right) = p, h\left(\frac{d+a}{2}\right) = q, h\left(\frac{e+b}{2}\right) = r.$$

El pentágono buscado se obtendrá aplicando la homotecia h al pentágono auxiliar, solo se necesita ubicar el centro m .

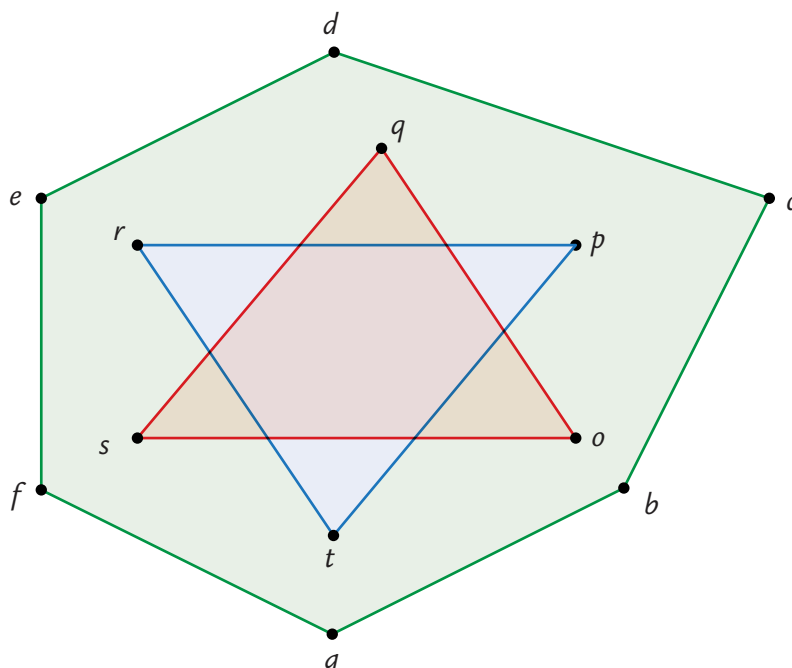
Dado que la homotecia debe transformar los puntos medios de los lados del pentágono auxiliar en los puntos a, b, c, d, e , podemos ubicar m en la intersección de dos rectas que unan vértices correspondientes según la homotecia, como se ilustra en la siguiente figura.



Finalmente, transformamos el pentágono auxiliar mediante la homotecia h para obtener el pentágono buscado.



Problema 42 Los números complejos a, b, c, d, e, f son los vértices de un hexágono. Los puntos o, p, q, r, s, t son los baricentros de los triángulos $abc, bcd, cde, def, efa, fab$. Mostrar que los triángulos oqs y prt son congruentes.



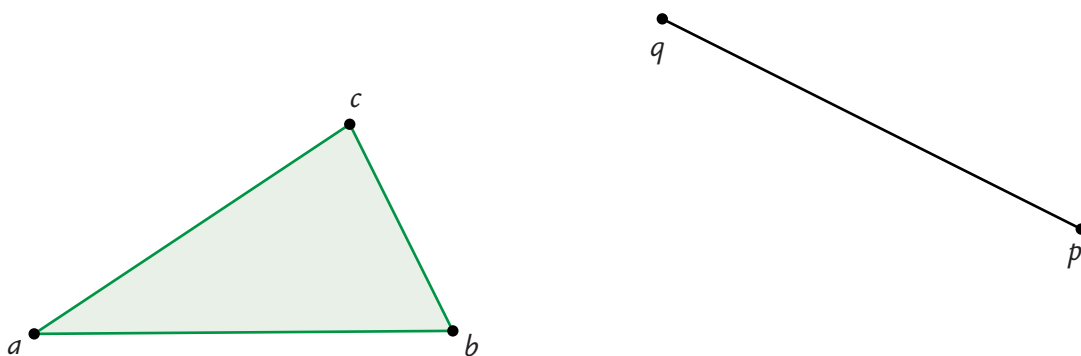
Solución

Teniendo en cuenta que:

$$\frac{o+r}{2} = \frac{p+s}{2} = \frac{q+t}{2} = \frac{a+b+c+d+e+f}{2},$$

resulta que la simetría respecto del punto $m = \frac{a+b+c+d+e+f}{2}$ transforma o en r , p en s y q en t , es decir que transforma el triángulo oqs en el triángulo prt .

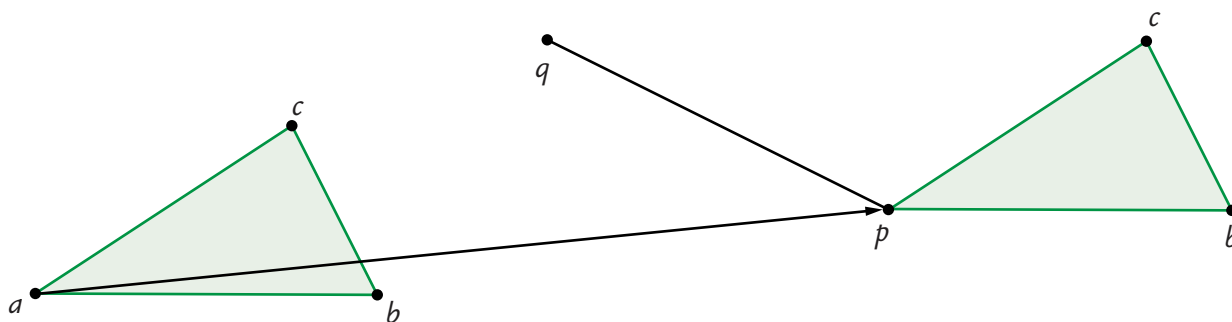
Problema 43 Dados el triángulo abc y el segmento pq en la figura, construir, usando GeoGebra, un triángulo pqr que sea directamente semejante a abc .



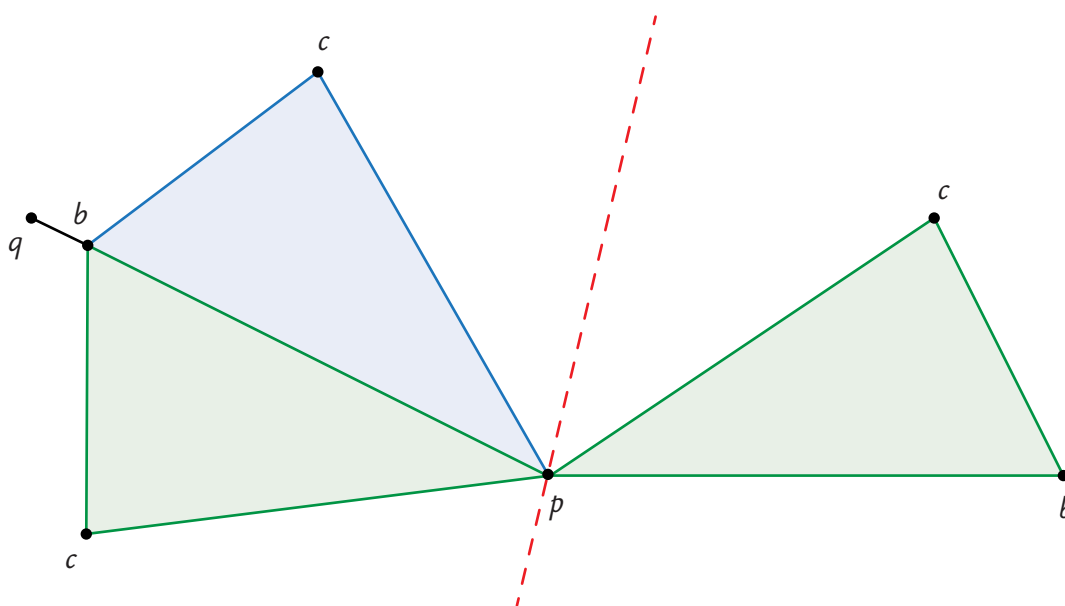
Solución

Hay varias maneras de hacerlo: que ab se corresponda con pq , que bc se corresponda con pq , o que ca se corresponda con pq . Haremos la primera manera, las restantes se pueden resolver en forma similar.

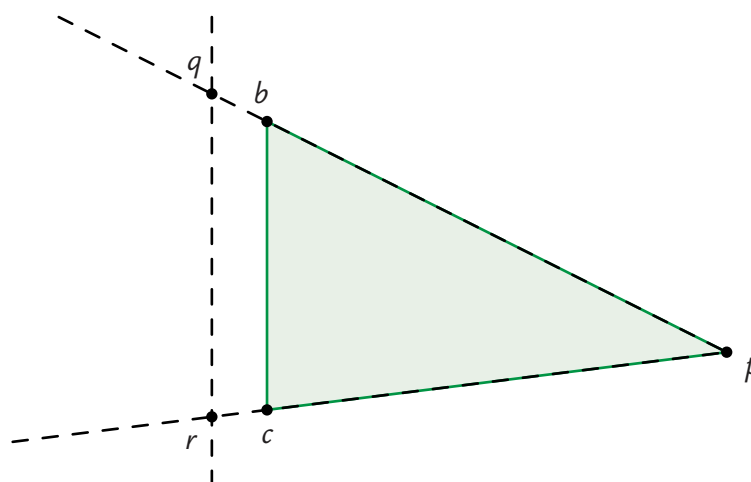
Marcamos el vector con origen en a y terminal p , con este vector trasladamos abc de modo que a coincida con p .



Luego trazamos la bisectriz del ángulo bpq , reflejamos el triángulo dos veces: primero respecto de la bisectriz, luego respecto de la recta pq .

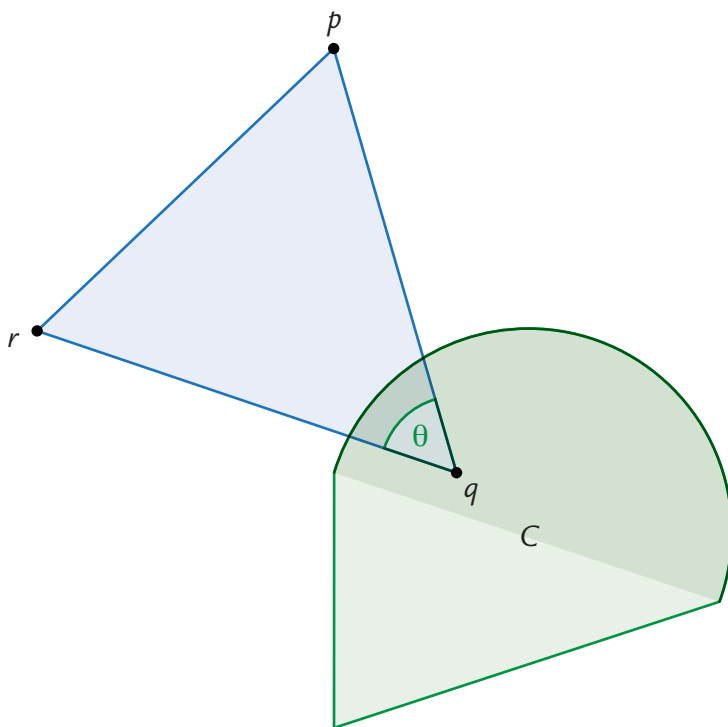


Finalmente, en el último triángulo trazamos las semirrectas pq y pc y una paralela a bc que pase por q .

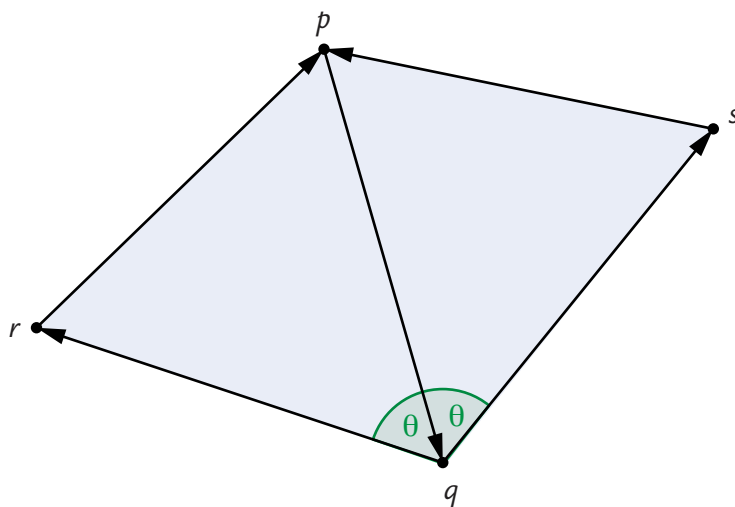


De esta manera encontramos el triángulo pqr buscado.

Problema 44 Dados el punto p y conjunto C , para cada punto q en C se marca un punto r tal que el triángulo pqr quede recorrido en sentido horario, $pq = pr$ y el ángulo en el vértice q sea θ . Determinar el lugar geométrico de los puntos r al variar q en C .



Nota: Dado el segmento pq , hay dos triángulos isósceles que tienen a pq como uno de los lados iguales y con ángulo θ en el vértice q . Estos triángulos se muestran en la figura:



Decimos que el triángulo pqr está orientado en el sentido horario, porque, al movernos desde p hasta q , desde q hasta r y desde r hasta p , estamos girando como las agujas del reloj; en cambio, pqs queda recorrido en sentido contrario al de las agujas del reloj.

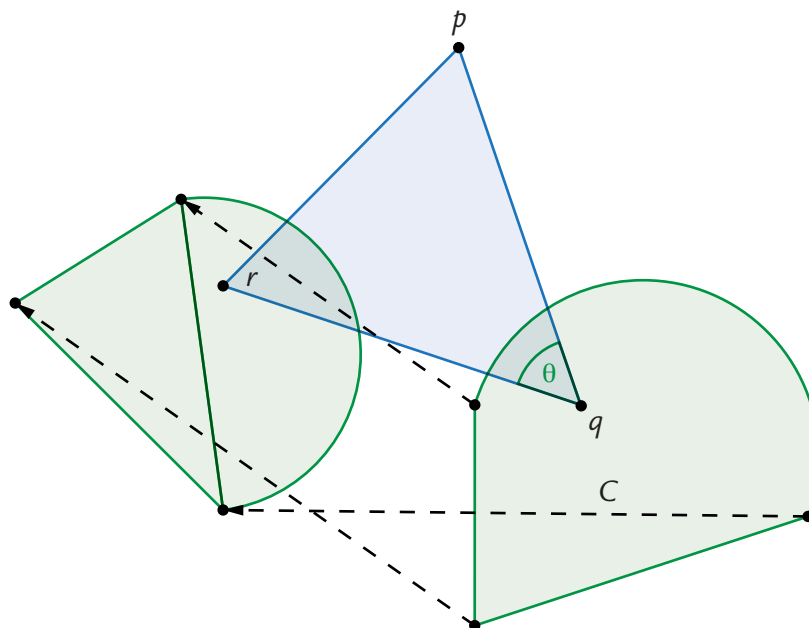
Solución

Si tomamos u un número complejo unitario de argumento θ , podemos expresar:

$$r = u \cdot (p - q) + q = u \cdot p + (1 - u) \cdot q.$$

Si notamos $a = 1 - u$, $b = u \cdot p$, resulta $r = a \cdot q + b$, es decir que los puntos r se obtienen por transformar los puntos q en C mediante la similitud $f(x) = a \cdot x + b$.

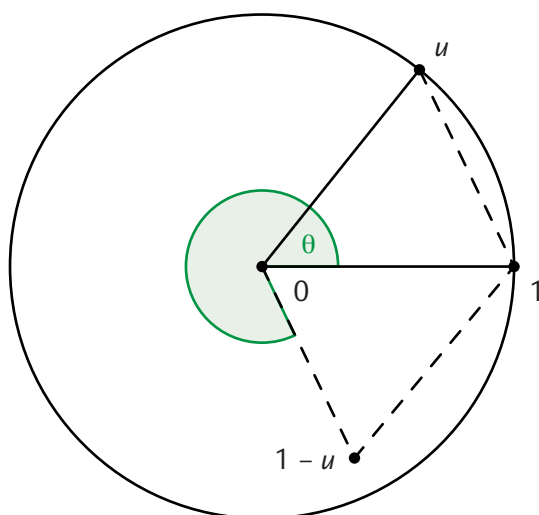
En el caso del problema, la figura está formada por un semicírculo y un triángulo. Para construir la transformación de la figura, bastará con transformar los vértices del triángulo usando los datos geométricos y, por ejemplo, un procedimiento similar al del Problema 43.



Las sucesivas transformaciones que la similitud $f(x) = a \cdot x + b$ le produce a una figura pueden describirse como sigue:

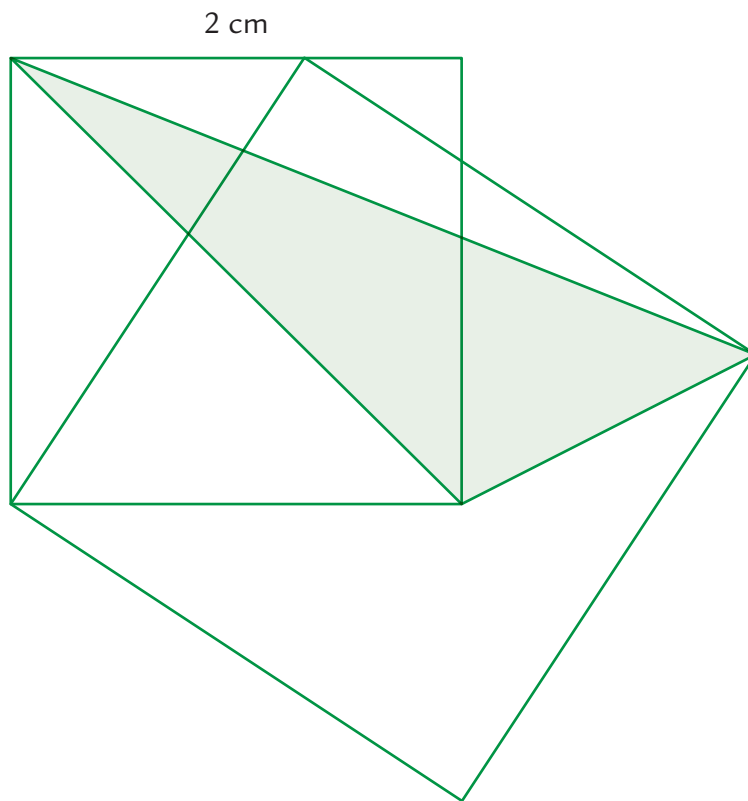
1. La rota alrededor del origen en sentido antihorario barriendo un ángulo equivalente al argumento de a .
2. Luego, la transforma con una homotecia con centro en el origen y razón igual al módulo de a .
3. Finalmente, la traslada según el vector b .

En el caso de este problema, teniendo en cuenta que $a = 1 - u$, $b = u \cdot p$, y siendo u como en la figura:



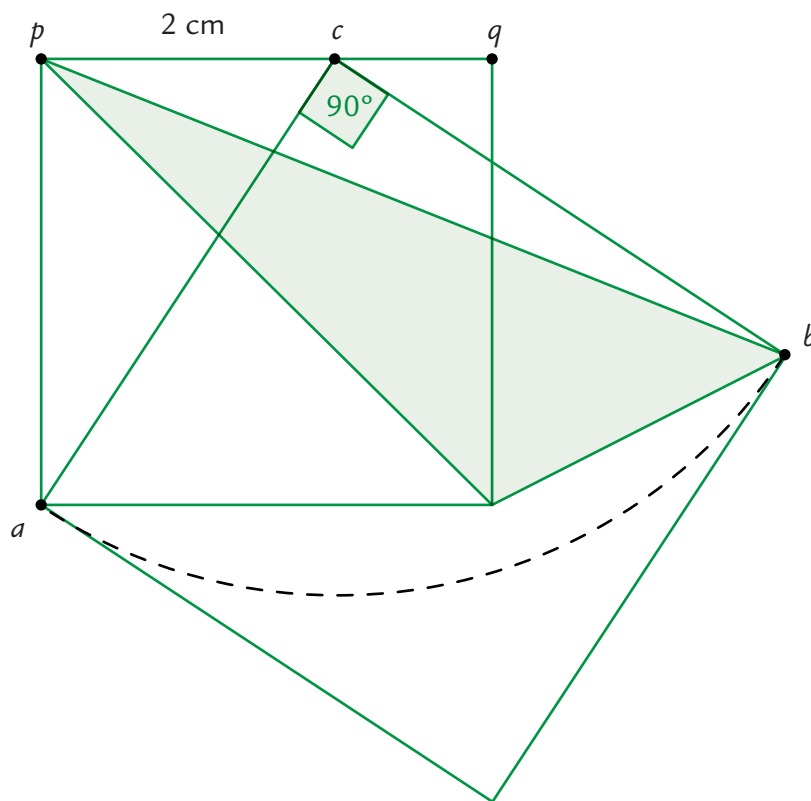
Puede apreciarse que el ángulo de rotación es $\frac{3\pi + \theta}{2}$ (compruebe esto) y el módulo de $1 - u$ es menor que 1, motivo por el que la figura transformada es más pequeña.

Problema 45 La figura muestra un cuadrado de 2 cm de lado. Otro cuadrado comparte un vértice con el anterior y tiene otro vértice sobre un lado de este. Hallar el área del triángulo sombreado.

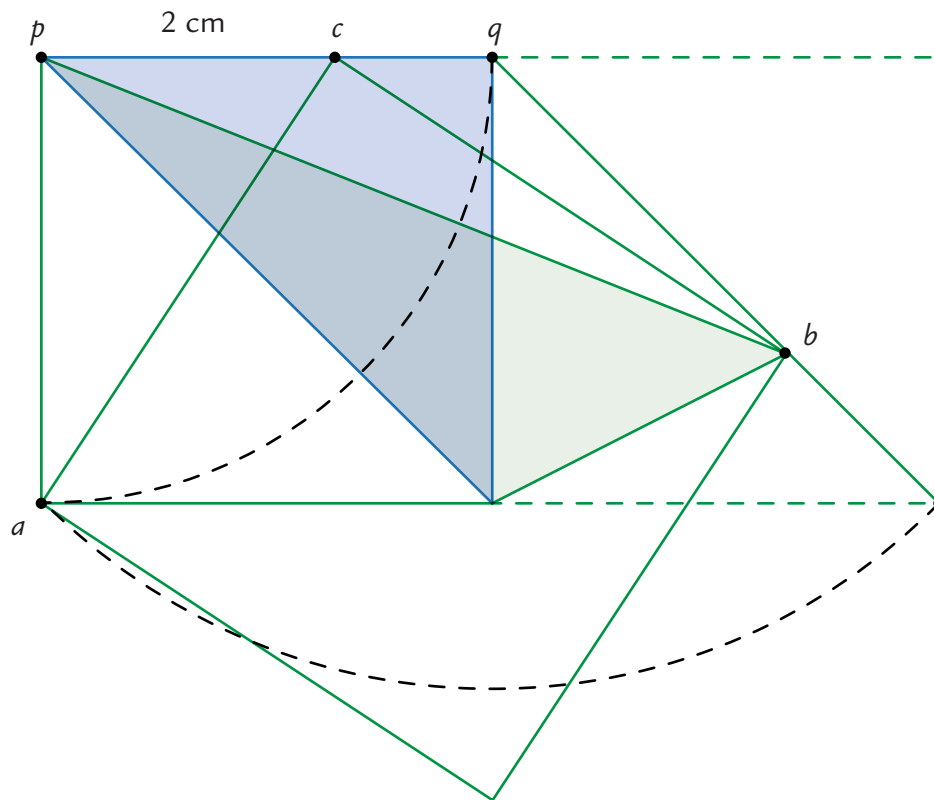


Solución

En la siguiente figura, el punto b se obtiene al rotar el punto a 90° en sentido antihorario alrededor del punto variable c sobre el lado del primer cuadrado.

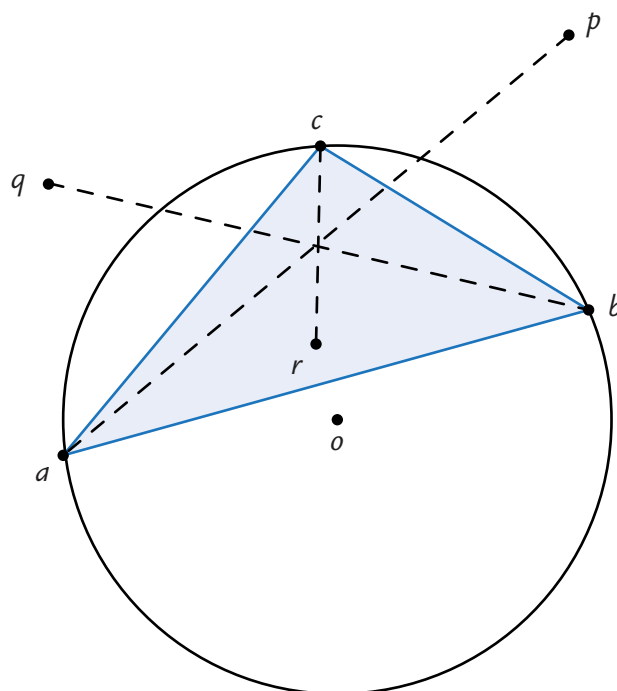


Por lo visto en el Problema 44, al moverse c en el lado pq , el punto b recorre un segmento cuyos extremos serán los puntos asociados con p y q , respectivamente, esto es: cuando c es p , b es q y cuando c es q , b es el punto que se obtiene de rotar a 90° en sentido antihorario alrededor de q .



Se observa que b recorre un segmento paralelo a la diagonal del cuadrado que parte desde el vértice p , en consecuencia, el área del triángulo es de 2 cm^2 .

Problema 46 El circuncentro o del triángulo abc se refleja en los puntos p, q, r respecto de las rectas que determinan los lados del triángulo, situación que muestra la figura.

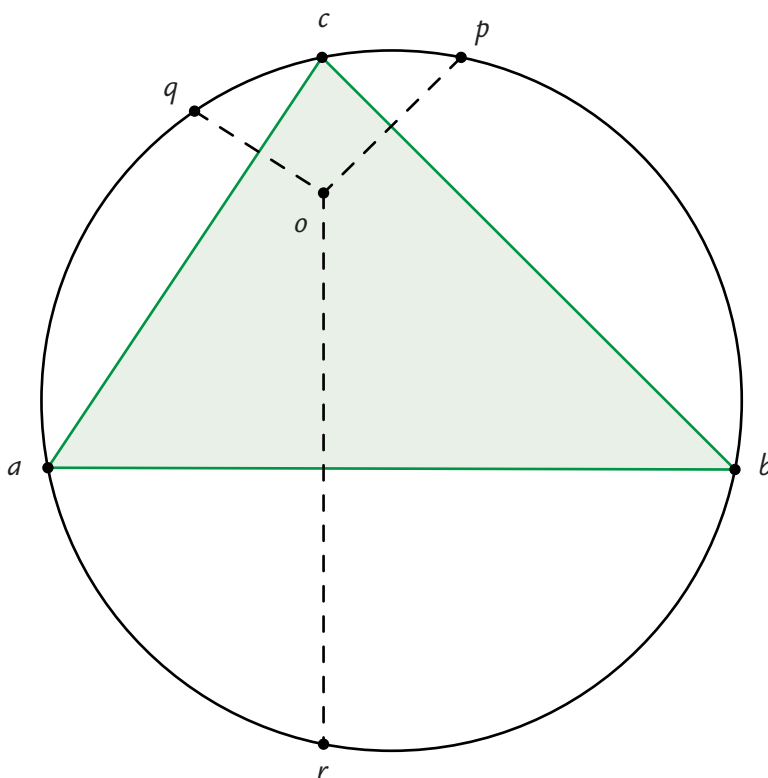


- i) Mostrar que las rectas ap , bq y cr son concurrentes en sus puntos medios.
- ii) Mostrar que los triángulos abc y pqr son congruentes.

Solución

- i) Fijamos el origen en el centro o de la circunferencia circunscripta y también podemos asumir que el radio de esta circunferencia es 1. En esta situación, las reflexiones de o vienen dadas por $p = b + c$, $q = c + a$, $r = a + b$, por lo que los segmentos ap , bq y cr concurren en sus respectivos puntos medios, en un punto dado por $\frac{a+b+c}{2}$.
- ii) Del análisis precedente resulta que la simetría puntual con centro en $\frac{a+b+c}{2}$ transforma el triángulo abc en el triángulo pqr , lo que muestra que son triángulos congruentes.

Problema 47 El ortocentro o del triángulo abc se refleja en los puntos p , q , r respecto de las rectas que determinan los lados del triángulo, situación que muestra la figura.



- i) Mostrar que p , q y r están en la circunferencia circunscripta a abc .
- ii) Mostrar que el hexágono $arbpcq$ tiene el doble de área que abc .

Solución

- i) Fijamos el origen en el ortocentro o y asumimos que el radio de la circunferencia circunscripta al triángulo es 1. En este caso, teniendo en cuenta que o puede obtenerse como $a + b + c$, las reflexiones de o vienen dadas por:

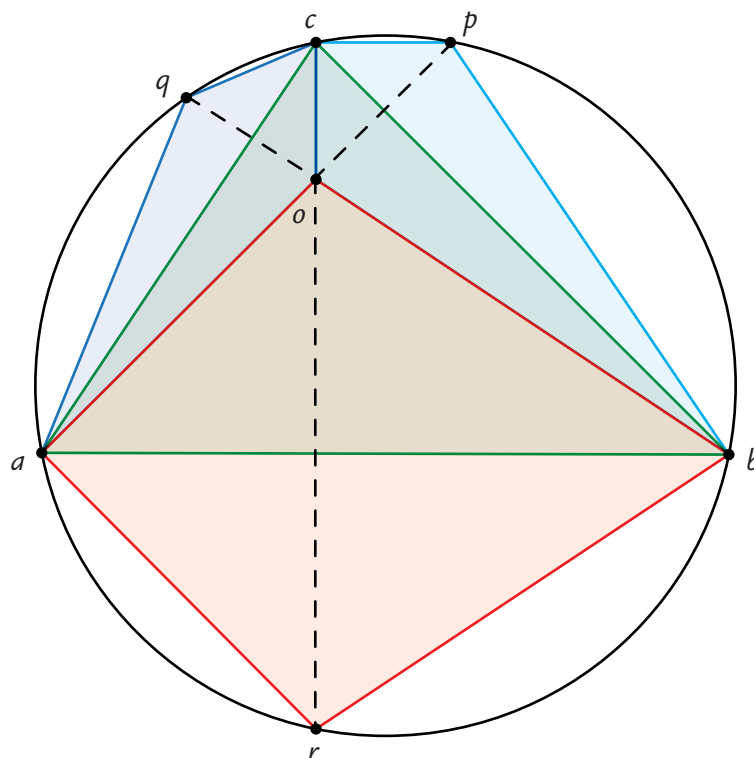
$$p = b + c - bc(a + b + c) = -\bar{a}bc$$

$$q = c + a - ca(a + b + c) = -\bar{a}bc$$

$$r = a + b - ab(a + b + c) = -\bar{a}bc$$

Como el módulo del producto es el producto de los módulos, queda claro que p , q y r son complejos de módulo 1, luego están en la circunferencia circunscrita al triángulo abc .

ii) La figura a continuación,



muestra que el hexágono puede descomponerse en tres romboidees y, a su vez, cada romboide en dos triángulos congruentes. Observando que tres de estos triángulos descomponen a abc , se concluye que el área del hexágono es el doble del área de abc .

Problema 48 Un punto p se hace rotar 45° en sentido antihorario alrededor de cada uno de los vértices de un polígono de 60 cm^2 de área y 70 cm de perímetro. Hallar el área y el perímetro del polígono cuyos vértices son los puntos que se obtienen al realizar las rotaciones sobre p .

Solución

Tomemos el número complejo unitario $u = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ de argumento 45° . La rotación de p alrededor de un vértice v del polígono está dada por la expresión:

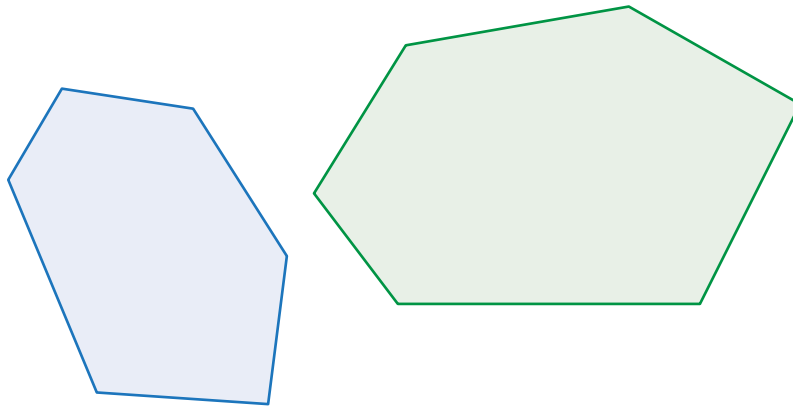
$$u \cdot (p - v) + v = u \cdot p + (1 - u) \cdot v.$$

Podría decirse que las rotaciones de p también pueden ser obtenidas como los transformados de los vértices del polígono mediante la similitud dada por la función $f(z) = a \cdot z + b$, donde $a = 1 - u$ y $b = u \cdot p$. En consecuencia, el polígono obtenido es semejante al polígono dado, siendo la razón de semejanza el módulo de a , es decir $\left|1 - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

El área y el perímetro del polígono construido serán: $(2 - \sqrt{2}) \cdot 60 \text{ cm}^2$ y $\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot 70 \text{ cm}$.

La siguiente figura ilustra la situación.

p •



Problema 49 Los números complejos a, b, c, d, e son los sucesivos vértices de un pentágono regular centrado en el origen. Mostrar que:

$$a^5 = b^5 = c^5 = d^5 = e^5 = abcde.$$

Evaluar las expresiones siguientes:

$$s_1 = a + b + c + d + e$$

$$s_2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$$

$$s_3 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3$$

$$s_4 = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4$$

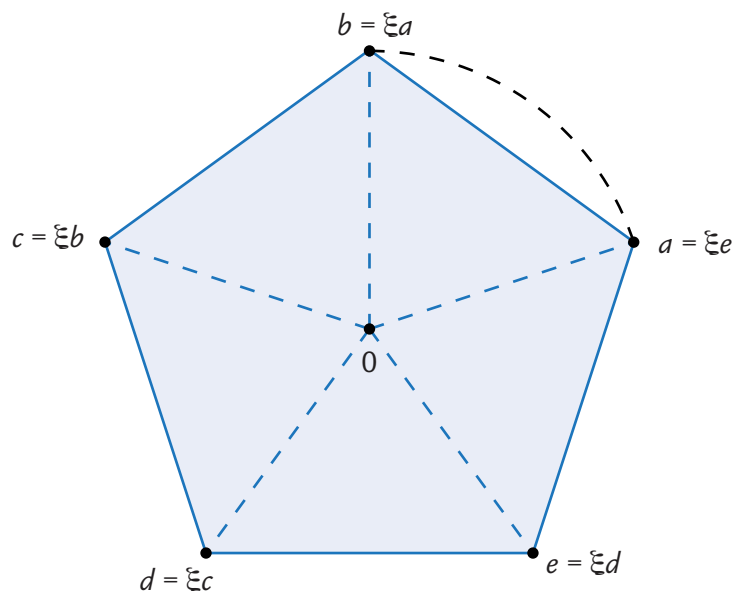
$$p_2 = ab + ac + ad + ae + bc + bd + be + cd + ce + de$$

$$p_3 = abc + abd + abe + acd + ace + ade + bcd + bce + bde + cde$$

$$p_4 = abcd + abce + abde + acde + bcde$$

Solución

Denotemos con ξ la raíz quinta de la unidad dada por el número complejo unitario de argumento 72° .



Cada vértice del pentágono se obtiene multiplicando por ξ al vértice vecino ubicado antes en el sentido antihorario. Esto permite escribir una tabla de identidades siguientes:

$$\begin{aligned}a &= a \\b &= \xi a \\c &= \xi^2 a \\d &= \xi^3 a \\e &= \xi^4 a\end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades precedentes, resulta:

$$abcde = \xi^{10} a^5 = a^5$$

Del mismo modo, podemos mostrar que las potencias b^5, c^5, d^5, e^5 coinciden con $abcde$.

Por otra parte, si sumamos miembro a miembro las igualdades de la tabla, tendremos:

$$a + b + c + d + e = (1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) \cdot a.$$

Como $\xi^5 = 1$ y $\xi \neq 1$, de la identidad:

$$\xi (1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4) = (\xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 + 1)$$

se desprende que $1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 = 0$, entonces, $s_1 = 0$.

De manera similar podemos ver que $s_2 = s_3 = s_4 = 0$; solo hay que tener presente que $\xi^5 = 1$.

Veamos $p_2 = 0$ nuevamente usando la tabla.

$$\begin{aligned}p_2 &= a\xi a + a\xi^2 a + a\xi^3 a + a\xi^4 a + \xi a\xi^2 a + \xi a\xi^3 a + \xi a\xi^4 a + \xi^2 a\xi^3 a + \xi^2 a\xi^4 a + \xi^3 a\xi^4 a = \\&= a^2(\xi + \xi^2 + \xi^3 + \xi^4 + \xi^3 + \xi^4 + \xi^4 + 1 + 1 + \xi + \xi^2) = 0\end{aligned}$$

Análogamente se ve que $p_3 = p_4 = 0$. Si denotamos $p_5 = abcde$, no es difícil establecer la identidad polinomial:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e) = x^5 - p_1 x^4 + p_2 x^3 - p_3 x^2 + p_4 x - p_5.$$

Identidad que vale, en general, pero en el caso en que a, b, c, d, e sean los vértices de un pentágono regular, la ecuación queda:

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e) = x^5 - p_5.$$

Esto indica que los vértices del pentágono regular son las raíces quintas de un número, en este caso, de p_5 .

Nota: Este resultado puede ser extendido al caso de polígonos regulares con n vértices.

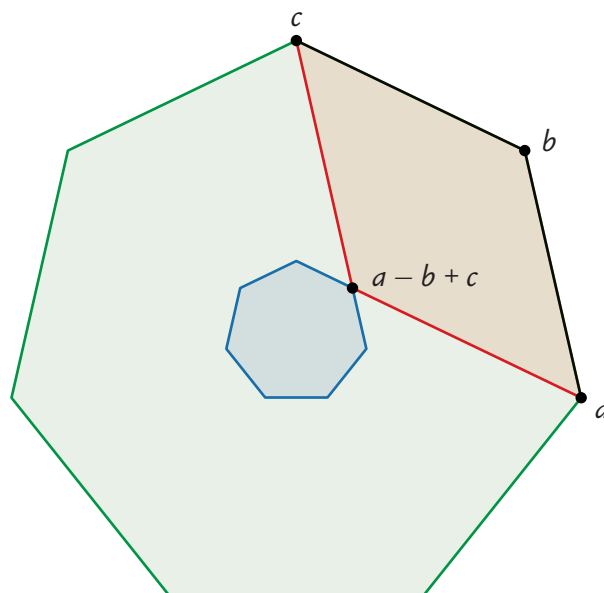
Problema 50 Sea $abcdefg$ un heptágono regular. Mostrar que los puntos:

$$a - b + c, b - c + d, c - d + e, d - e + f, e - f + g, f - g + a, g - a + b$$

son los sucesivos vértices de un heptágono también regular.

Solución

Observar que $a, b, c, a - b + c$ son los vértices del paralelogramo construido sobre los lados ab y bc del polígono que tiene a $a - b + c$ como vértice opuesto a b .



Si asumimos que el heptágono está centrado en el origen, como en el caso del Problema 49, podemos conectar sus vértices mediante una raíz de la unidad ξ de argumento $\frac{360^\circ}{7}$, entonces:

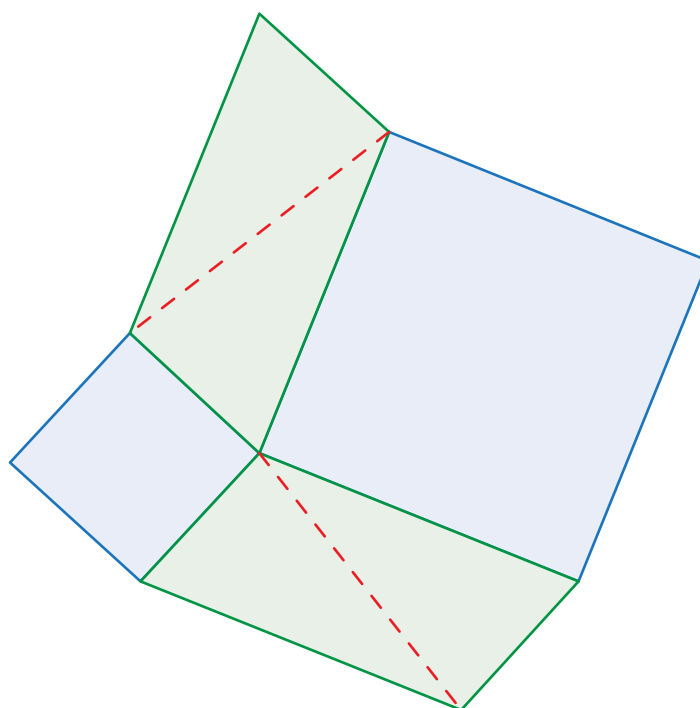
$$\xi(a - b + c) = \xi a - \xi b + \xi c = b - c + a.$$

Esta identidad y las similares correspondientes muestran que los vértices del nuevo pentágono también están conectados mediante ξ ; en consecuencia, es un heptágono regular.

Nota: Con excepción de $n = 3, 4, 6$, este resultado es válido para cualquier polígono regular de n lados y sirve para mostrar que no es posible inscribir un polígono regular de n lados en un retículo plano, salvo que $n = 3, 4$, o 6 . Un retículo es como una cuadrícula, pero con paralelogramos en lugar de cuadrados.

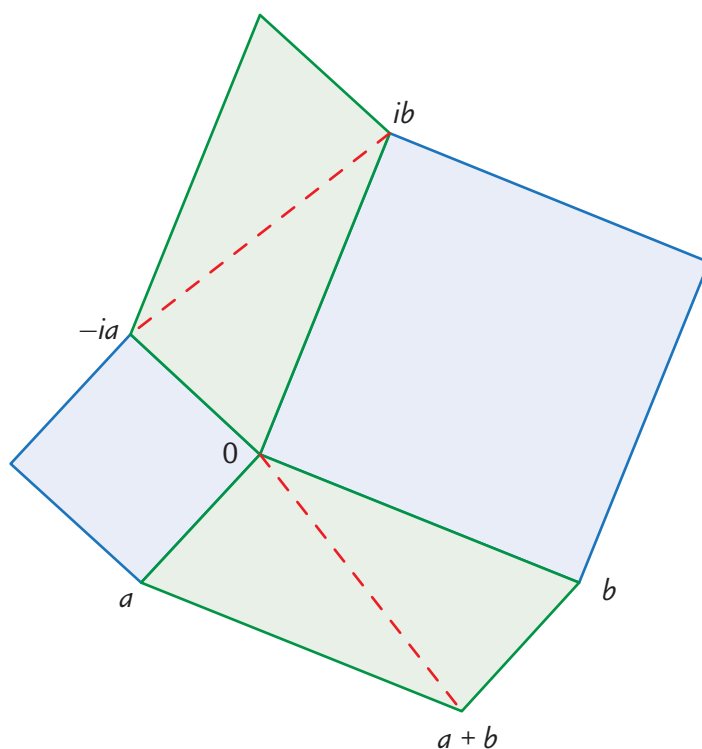


Problema 51 En la siguiente figura hay dos cuadrados y dos paralelogramos. Hallar el ángulo entre las diagonales de los paralelogramos que se indican en dicha figura.



Solución

Si ubicamos el origen en el vértice común de los cuadriláteros y asignamos a y b a dos vértices como se indica a continuación,



la diagonal en la parte inferior tiene la dirección de $a + b$, la diagonal en la parte superior es paralela a $ib - (-ia) = i(a + b)$, pero $a + b$ e $i(a + b)$ son perpendiculares.





Para trabajar esta *Nota de Geometría*, se requiere de cierta familiaridad con los números complejos; no obstante, algunos conceptos básicos serán incluidos en este apéndice.

Los números complejos serán tratados como puntos del plano coordenado o como vectores que parten desde el origen, sin considerar notaciones diferentes para cada caso.

Denotaremos con **C** el conjunto de los números complejos y con **R** el conjunto de los números reales.

Las operaciones, el conjugado y el módulo

Los números complejos tienen una *forma binómica* dada como $a + bi$, donde a y b son números reales. A partir de esta forma se pueden dar las operaciones de suma y producto de números complejos como sigue:

Suma

$$a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$$

Producto

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Tanto la suma como el producto son operaciones asociativas, conmutativas, con elemento neutro y con inverso, con la excepción de cero en el caso del producto. Estas propiedades se sintetizan en la siguiente tabla donde u , v y w son números complejos, con $u = a + bi$.

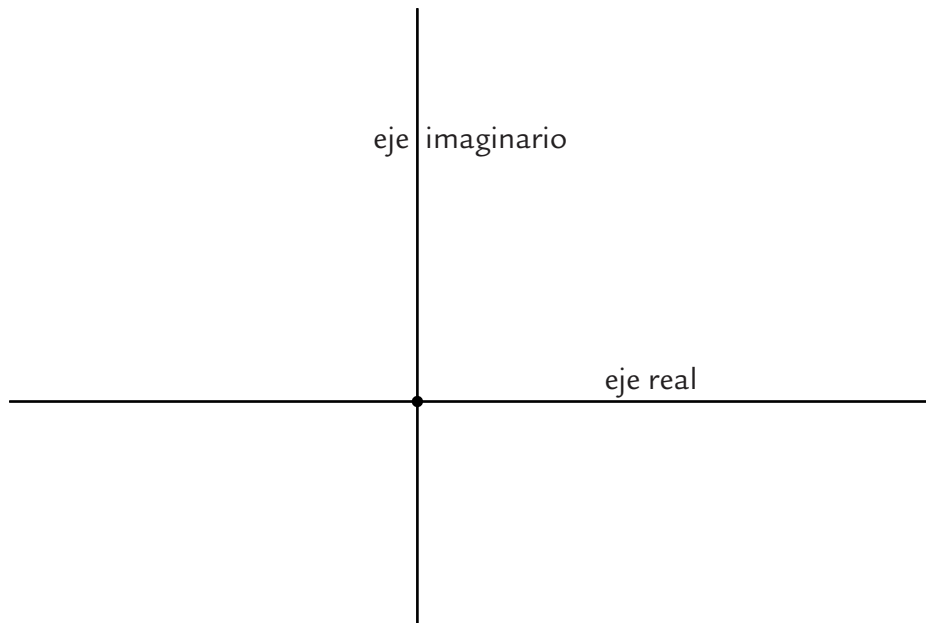
Suma	Propiedad	Producto
$u + (v + w) = (u + v) + w$	Asociativa	$(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$
$u + v = v + u$	Conmutativa	$u \cdot v = v \cdot u$
$u + 0 = u$	Elemento neutro	$u \cdot 1 = u$
$-u = -a - bi$	Inverso	$u^{-1} = \frac{\bar{u}}{ u } \quad (u \neq 0)$

Además se cumple la compatibilidad de suma y producto dada por:

$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$

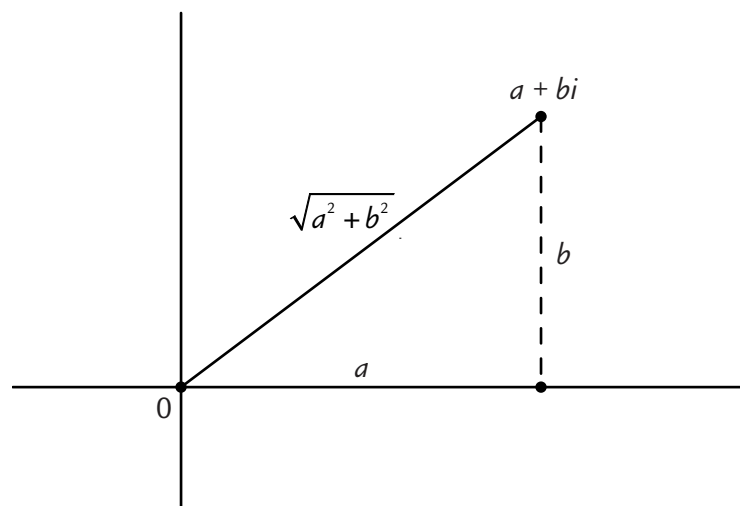
Los números complejos de la forma $a + 0 \cdot i = a$ son los que forman el llamado *eje real* y los de la forma $0 + bi = bi$ son los que forman el *eje imaginario*.



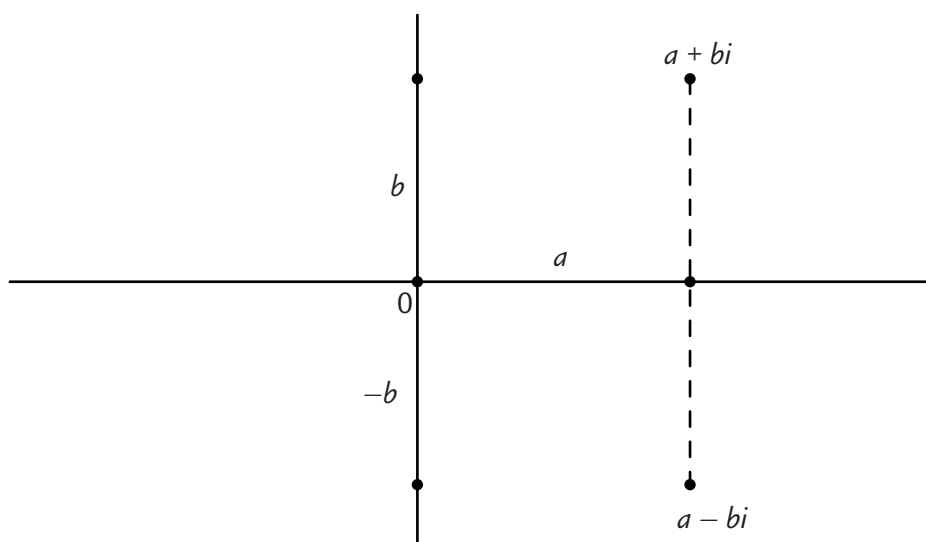


Cada número complejo se asocia con un punto del plano coordenado, esto es, $a + bi$ se corresponde con el punto de coordenadas (a, b) . Con este enfoque, podemos ilustrar los conceptos de *módulo* y de *conjugado* de un número complejo.

El módulo es la distancia entre el número complejo en cuestión y el cero.



El conjugado es el punto simétrico respecto del eje real.



Si $w = a + bi$, usaremos $|w|$ para indicar el módulo de w y $\bar{w}$ para referirnos al conjugado de w , es decir: $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\bar{w} = a - bi$.

Los números complejos de módulo 1 suelen llamarse *complejos unitarios*.

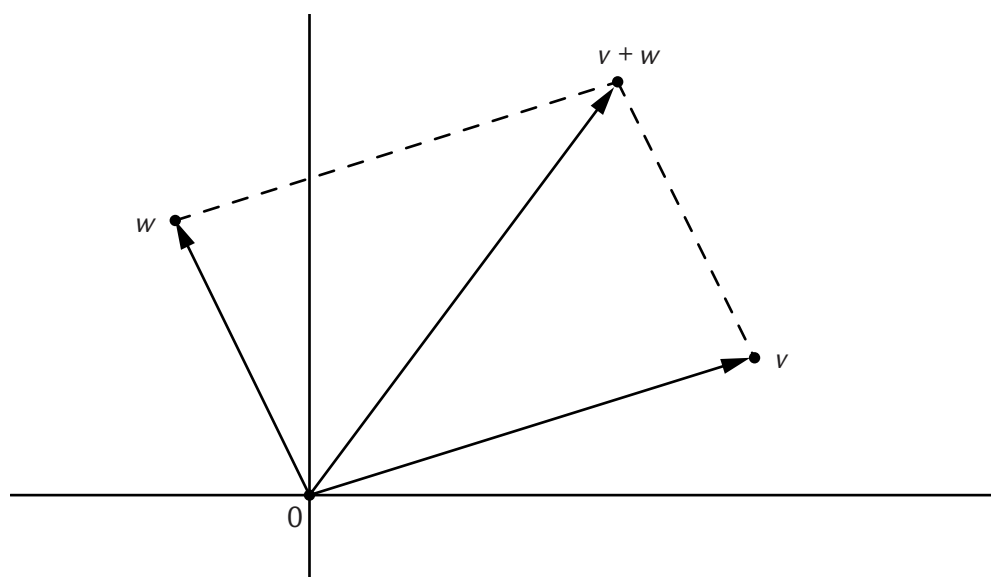
Conservando las notaciones precedentes, se verifican las propiedades siguientes:

- $w \cdot \bar{w} = |w|^2$
- $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$
- $\overline{v + w} = \bar{v} + \bar{w}$
- $\overline{v \cdot w} = \bar{v} \cdot \bar{w}$

La distancia entre dos números complejos v y w está dada por el módulo de la diferencia, esto es, $|v - w| = |w - v|$.

El lado geométrico de las operaciones

Si cada número complejo w se identifica con el vector con origen en 0 y extremo en w , entonces la suma de los complejos v y w se obtiene como la suma de los vectores correspondientes, siguiendo la regla del paralelogramo.



Teniendo en cuenta que se forma un triángulo con vértices 0, v y $v + w$, podemos observar la conocida desigualdad triangular:

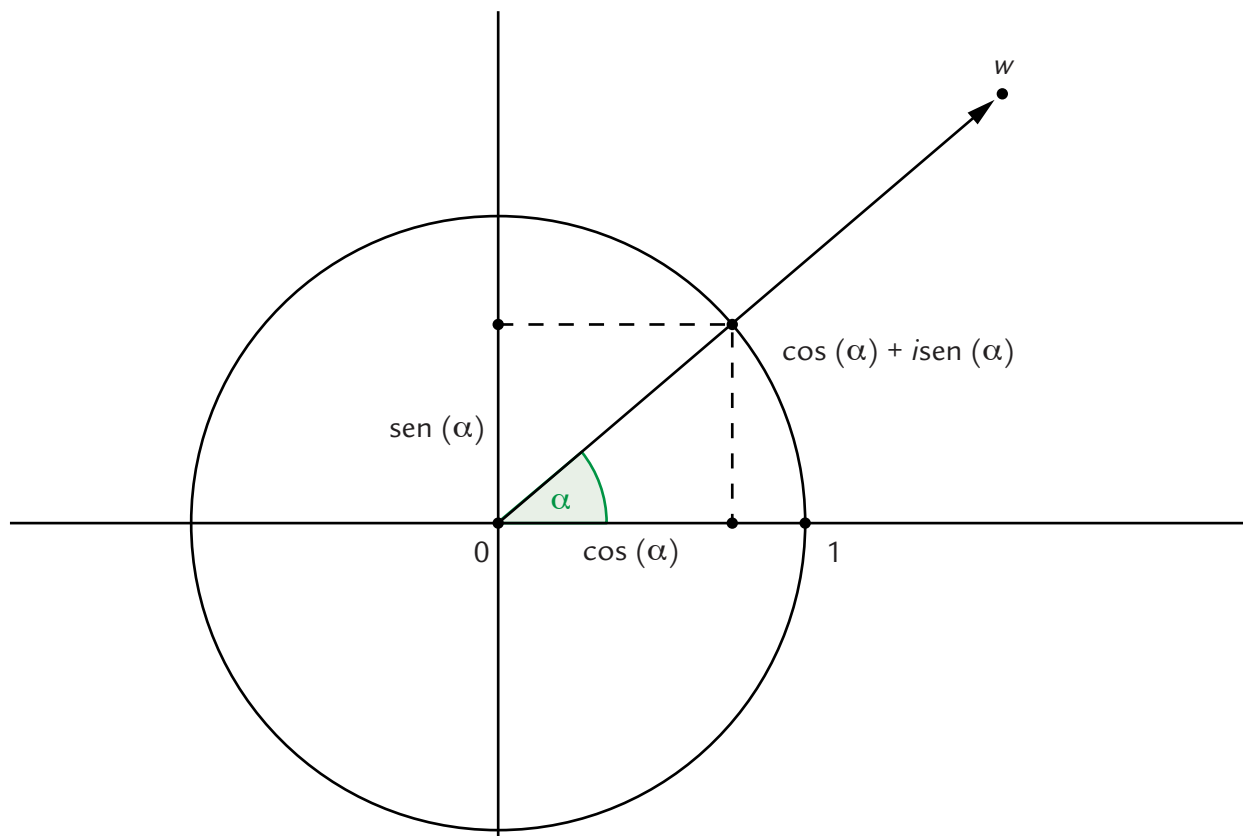
$$|v + w| \leq |v| + |w|.$$

Conviene tener en cuenta que la distancia entre $v + w$ y v está dada por $|v + w - v| = |w|$.

Para tratar el producto de números complejos desde el punto de vista geométrico, es necesario considerar la forma polar que se presenta a continuación.

La forma polar

Además de la forma binómica de un número complejo, para un número complejo distinto de cero, existe la *forma polar*, dada por el módulo y el *argumento*. Este último es el valor del ángulo que se forma desde el semieje de los reales positivos hasta el vector que representa el número complejo, medido en sentido antihorario. El argumento se toma mayor o igual que 0 y menor que 2π .



La forma polar está dada por:

$$w = |w| \cdot (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$$

Considerando un complejo v en su forma polar:

$$v = |v| \cdot (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta))$$

el producto $v \cdot w$ puede expresarse como:

$$v \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)) \cdot (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$$

Para obtener la forma polar del producto, dado que $|v \cdot w| = |v| \cdot |w|$, resta hallar el argumento γ de $v \cdot w$ que debe verificar:

$$\cos(\gamma) + i \operatorname{sen}(\gamma) = (\cos(\beta) + i \operatorname{sen}(\beta)) \cdot (\cos(\alpha) + i \operatorname{sen}(\alpha))$$

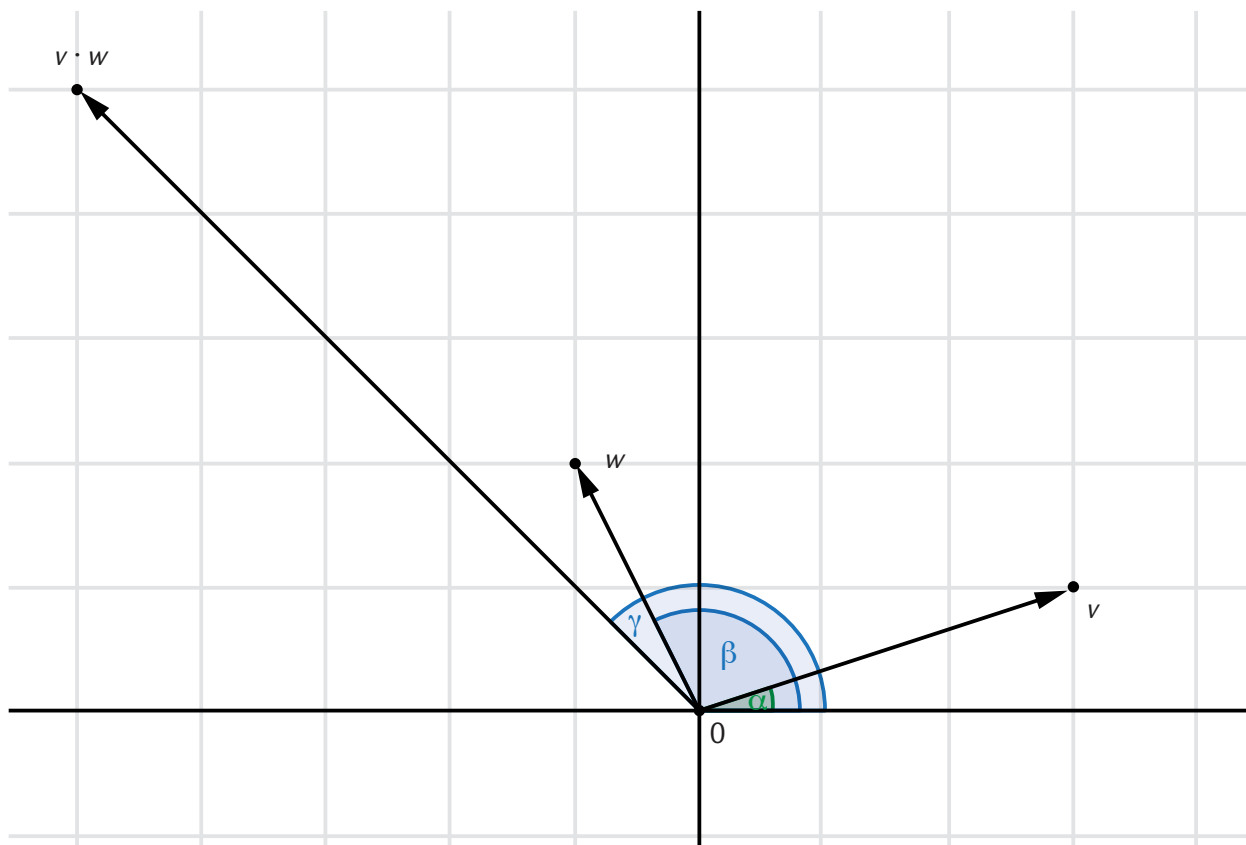
es decir:

$$\cos(\gamma) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha)$$

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \cos(\beta) \cdot \operatorname{sen}(\alpha) + \operatorname{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

En virtud de las fórmulas para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos, resulta que $\gamma = \alpha + \beta$ si $\alpha + \beta < 2\pi$, o $\gamma = \alpha + \beta - \pi$ si $\alpha + \beta > 2\pi$.

El producto $v \cdot w$ puede interpretarse como rotar w en sentido antihorario hasta barrer un ángulo de amplitud α y luego multiplicarlo por el módulo de v .



La figura precedente ilustra un producto de los números complejos $v = 3 + i$, $w = -1 + 2i$.

Teorema de Ptolomeo

Es oportuno enunciar el *teorema de Ptolomeo*, a partir del cual se pueden establecer las expresiones para el seno y el coseno de la suma de dos ángulos, expuestas anteriormente.

El cuadrilátero ABCD puede inscribirse en una circunferencia, si, y solo si, se verifica:

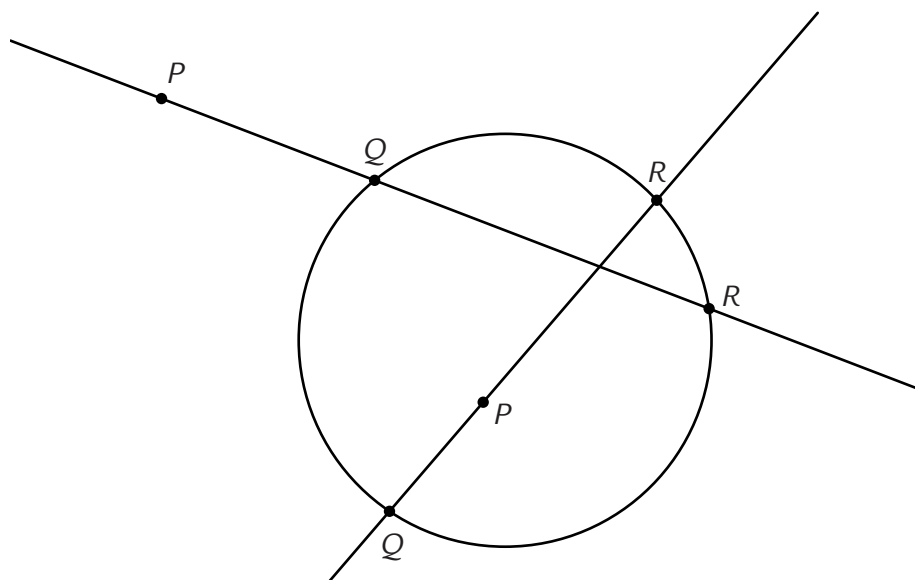
$$AB \times CD + BC \times DA = AC \times BD$$

Potencia

El concepto de *potencia de un punto* respecto de una circunferencia puede ser útil cuando se trata de realizar operaciones geométricamente, tales como raíz cuadrada, productos, inverso, etcétera.

La potencia de un punto P respecto de una circunferencia es el valor constante que resulta de multiplicar las longitudes de los segmentos PQ y PR, donde Q y R son los puntos en los que una recta, que pasa por P, corta a dicha circunferencia.

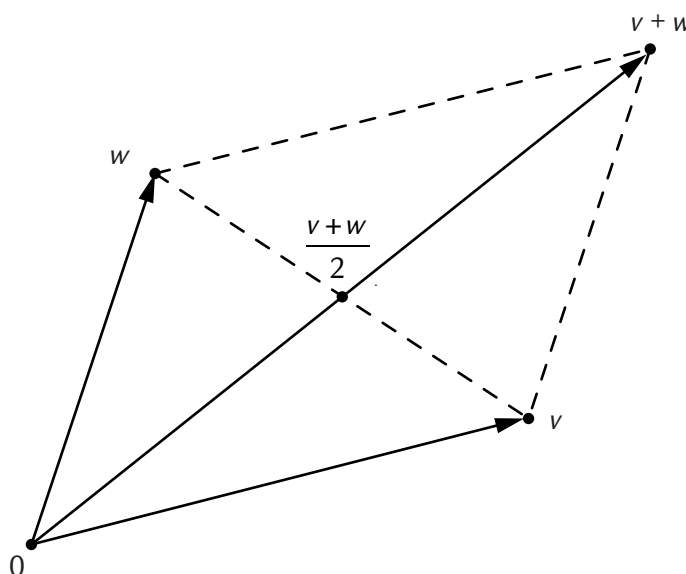




Punto medio y baricentro

El punto medio del segmento vw puede obtenerse como el promedio $\frac{v+w}{2}$.

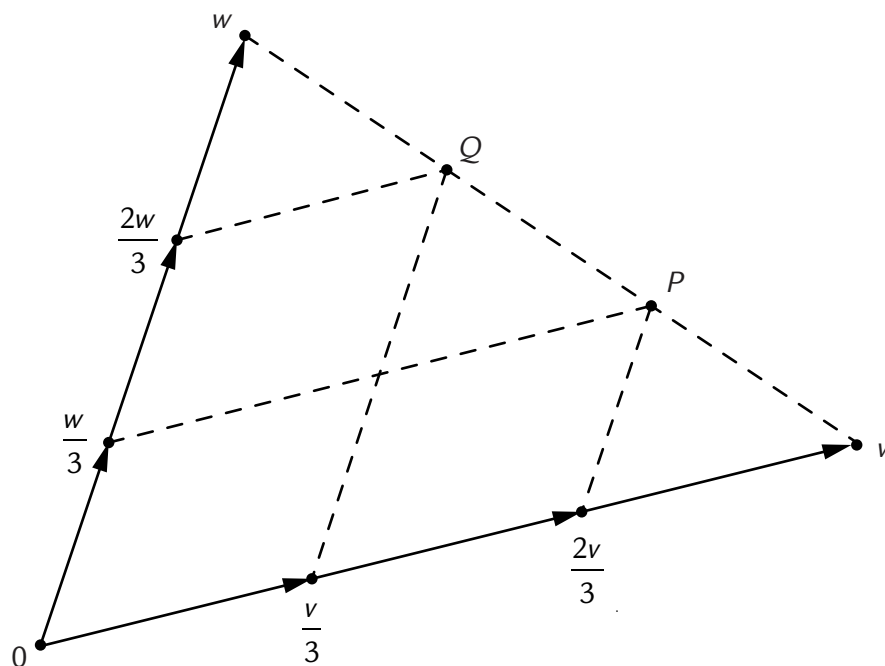
En la siguiente figura se observa que $0, v, v+w, w$ son los vértices de un paralelogramo. Dado que las diagonales de un paralelogramo se cortan en sus puntos medios, resulta que el punto medio de vw es precisamente $\frac{v+w}{2}$.



El baricentro de un triángulo uvw puede obtenerse como el promedio $\frac{u+v+w}{3}$.

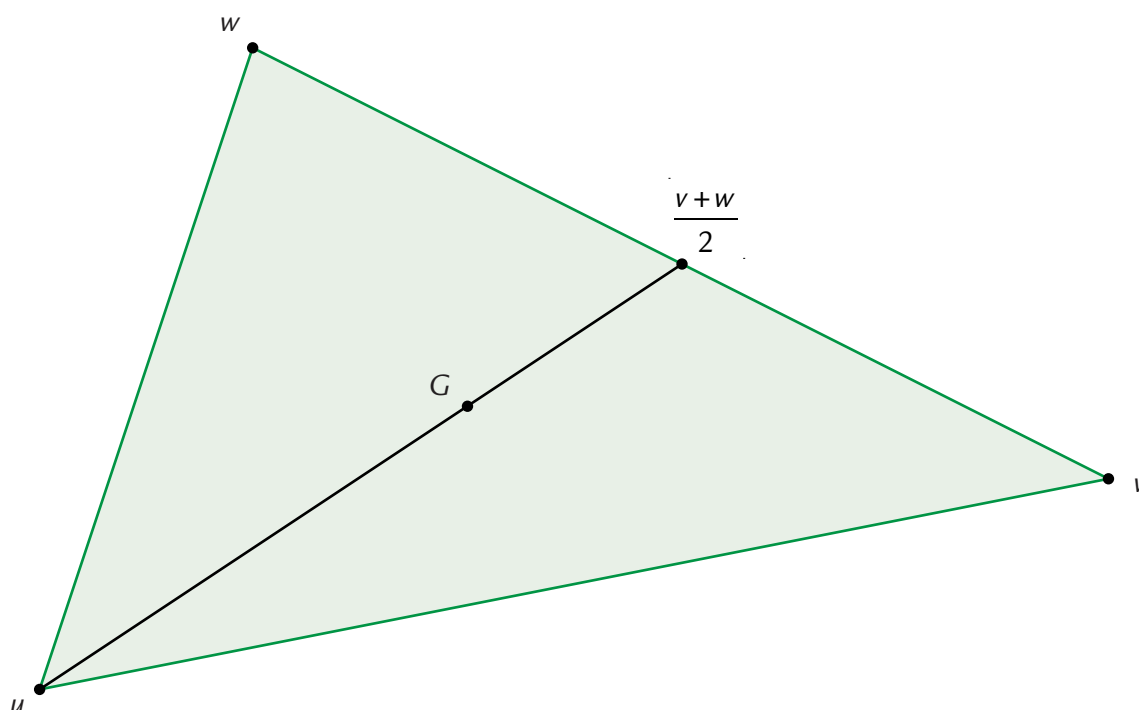
Para mostrar la afirmación precedente, veamos que los puntos que dividen en tres partes iguales el segmento vw están dados por $\frac{2v+w}{3}$ y $\frac{v+2w}{3}$.

Consideremos P y Q los puntos que dividen al segmento vw en tres partes iguales. Si por P y Q se trazan paralelas a los vectores v y w , por el *teorema de Thales* estas dividen en tres partes iguales tanto a v como a w , dando lugar a los vectores $\frac{v}{3}, \frac{2v}{3}, \frac{w}{3}, \frac{2w}{3}$ indicados en la figura a continuación.



Teniendo en cuenta la regla del paralelogramo para la suma, resulta $P = \frac{2v+w}{3}$ y $Q = \frac{v+2w}{3}$.

En el triángulo uvw el baricentro G está en el punto que separa al segmento de vértices u y $\frac{v+w}{2}$ en la relación $2 : 1$, es decir, en uno de los puntos que dividen dicho segmento en tres partes iguales.

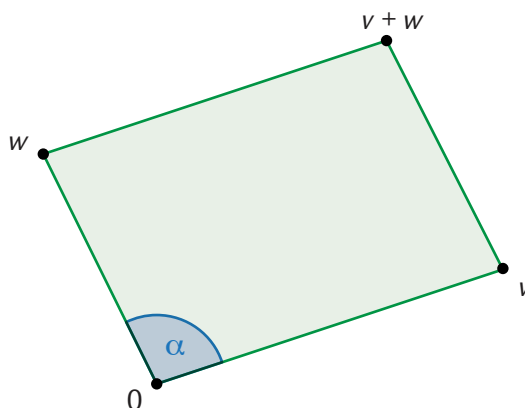


$$\text{Resulta } G = \frac{u + 2 \frac{v+w}{2}}{3} = \frac{u+v+w}{3}.$$



Área signada

El paralelogramo de vértices $0, v, v + w, w$:



tiene por área a:

$$|v| \cdot |w| \cdot \sin(\alpha)$$

donde α es el ángulo comprendido entre los vectores v y w . Teniendo que el argumento de $\bar{v} \cdot w$ es precisamente α y que el argumento de $v \cdot \bar{w}$ es $2\pi - \alpha$, escribimos la forma polar de estos números:

$$\bar{v} \cdot w = |v| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha))$$

$$v \cdot \bar{w} = |v| \cdot |w| \cdot (\cos(\alpha) - i \sin(\alpha))$$

Restando miembro a miembro las identidades precedentes y operando, se tiene una expresión del área del paralelogramo dada por:

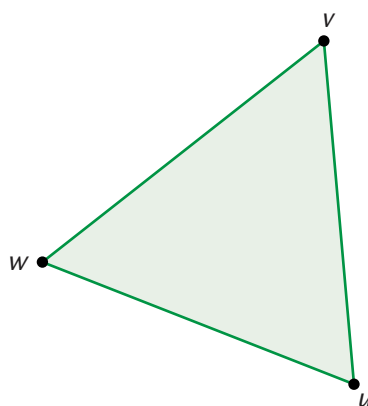
$$|v| \cdot |w| \cdot \sin(\alpha) = \frac{\bar{v} \cdot w - v \cdot \bar{w}}{2i}$$

Sin embargo, el miembro de la izquierda es simétrico respecto de v y w , mientras que el miembro de la derecha, lejos de ser simétrico, es antisimétrico respecto de v y w . Esta expresión coincide con el área siempre que el argumento de v sea menor o igual que el argumento de w ; en el caso contrario, la expresión da el valor del área con signo negativo. En realidad, la expresión obtenida da el valor de la llamada *área orientada* o *área signada*.

Si denotamos con $[v, w]$ el área del triángulo de vértices $0, v, w$, es decir:

$$[v, w] = \frac{\bar{v} \cdot w - v \cdot \bar{w}}{4i}$$

podemos expresar el área del triángulo uvw

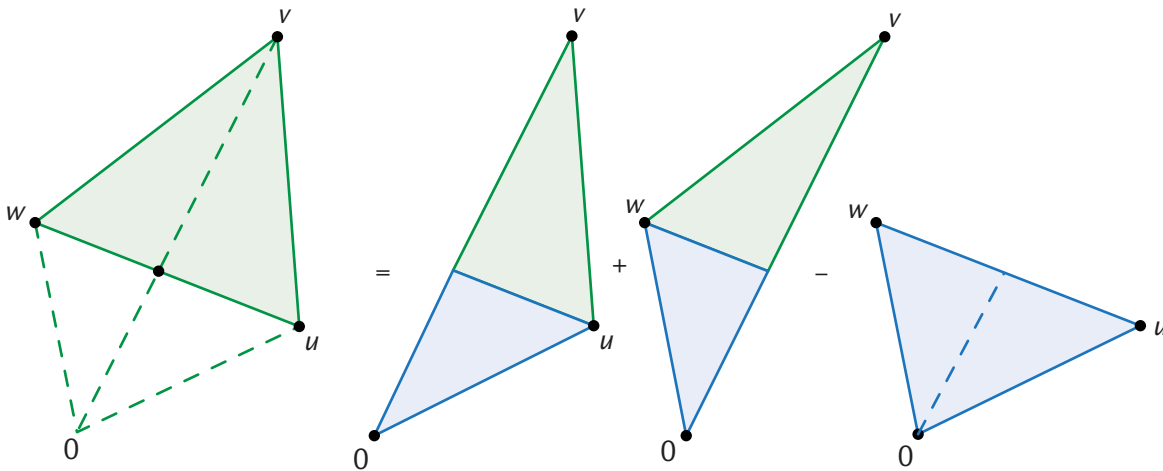


como:

$$[u, v] + [v, w] + [w, u]$$

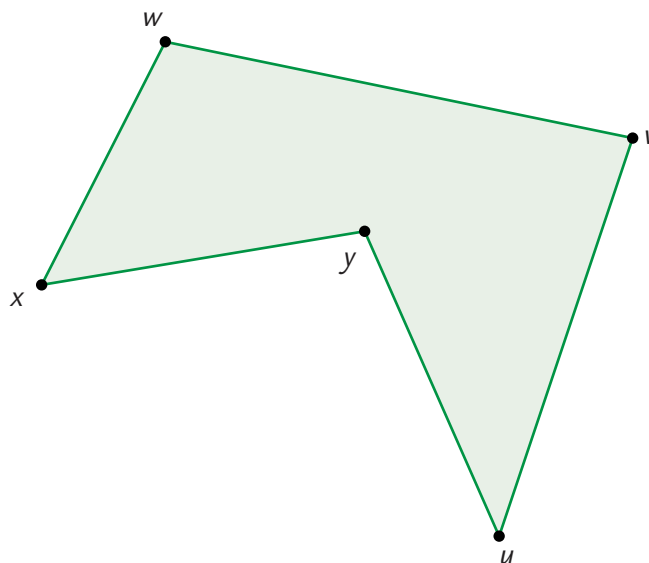
donde $[u, v]$ es el área del triángulo $0uv$, dado que el argumento de u es menor que el argumento de v , también $[v, w]$ es el área del triángulo $0vw$ y $[w, u]$ es el área de $0wu$ pero con signo negativo, dado que el argumento de w es mayor que el argumento de u .

La siguiente figura ilustra la situación:



Una expresión análoga a la precedente es válida para cualquier *polígono simple*, es decir, polígonos en los que el contorno no pasa dos veces por un mismo punto.

El área del polígono de la figura



puede calcularse como:

$$[u, v] + [v, w] + [w, x] + [x, y] + [y, u]$$

En el caso del triángulo uvw , el área signada puede ser expresada además en la forma de un determinante:

$$[u, v] + [v, w] + [w, u] = \frac{1}{4i} \det \begin{bmatrix} u & v & w \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Colinealidad

De la fórmula de área precedente para el área de un triángulo, se obtiene el siguiente criterio:

Los complejos u, v, w son colineales si, y solo si:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & w \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Ecuación de la recta

Recta por dos puntos

A partir de la expresión para el área signada de un triángulo, resulta claro que el lugar geométrico de los puntos w tales que:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & w \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

donde $u \neq v$ es justamente la recta que pasa por u y v , dado que se trata de los puntos w tales que el triángulo uvw tenga área cero. La ecuación precedente es la *ecuación implícita* de la recta que pasa por u y v . No es difícil ver que esta ecuación también puede ponerse en la forma:

$$aw + \overline{aw} + b = 0$$

donde a y b están dados; además, $a \neq 0$ y b es un número real.

Observamos que los puntos de la forma:

$$w = \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

son puntos de la recta que pasa por u y v , dado que verifican la ecuación implícita de aquella. Por otra parte, si w está en la recta, existe un número real λ tal que:

$$w - v = \lambda \cdot (u - v).$$

De la siguiente identidad:

$$\frac{w-v}{u-v} \cdot u + \frac{u-w}{u-v} \cdot v = w$$

escribiendo:

$$\frac{u-w}{u-v} = \frac{u-v+v-w}{u-v} = 1 - \frac{w-v}{u-v} = 1 - \lambda$$

resulta:

$$\lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v = w.$$

Se concluye que los puntos w de la recta que pasa por u y v pueden expresarse como:

$$w = \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

y esta última es la *ecuación paramétrica* de la recta que pasa por u y v .

Recta paralela

Si buscamos la recta paralela al segmento uv que pasa por un punto w , encontramos que está formada por los puntos x tales que:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & x \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{x} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} u & v & w \\ \bar{u} & \bar{v} & \bar{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

De este modo, estamos hablando de los puntos x tales que el triángulo uvx tiene área signada constante igual al área signada del triángulo uvw . Por las propiedades de determinantes, la ecuación precedente puede ponerse como:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & x-w \\ \bar{u} & \bar{v} & \overline{x-w} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Recta perpendicular

Si ahora se trata de la recta perpendicular al segmento uv que pasa por el punto w , consideramos el segmento con vértices iu, iv que es justamente perpendicular a uv . Entonces, la ecuación buscada es:

$$\det \begin{bmatrix} iu & iv & x-w \\ i\bar{u} & i\bar{v} & \overline{x-w} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

o, equivalentemente, por propiedades de determinantes:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & x-w \\ -\bar{u} & -\bar{v} & \overline{x-w} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Ahora, si a la segunda fila de la matriz le sumamos la tercera fila multiplicada por $\overline{u+v}$ el determinante no cambia y la ecuación queda:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & x-w \\ \bar{v} & \bar{u} & \overline{x-w} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Mediatriz

Como caso especial, sumando el promedio de las columnas 1 y 2 a la columna 3 de la matriz en la igualdad precedente, tenemos la ecuación de la mediatriz del segmento uv ; esta es:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & w \\ \bar{v} & \bar{u} & \bar{w} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

La función lineal y la conjugación

Todos los movimientos del plano, o isometrías directas, pueden hacerse con operaciones de números complejos, así como también las similitudes directas. Para esto, es suficiente considerar las funciones lineales:

$$\sigma(x) = \alpha \cdot x + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

con este tipo de funciones podemos realizar, además de traslaciones ($\alpha = 1$), rotaciones ($|\alpha| = 1, \beta = 0$) y homotecias ($\alpha \in \mathbb{R}, \beta = 0$). Todos los movimientos que se obtienen por combinación de estas transformaciones consideradas son llamados *similitudes directas*.

Por otra parte, las similitudes indirectas, como por ejemplo las reflexiones, son las transformaciones que se pueden obtener con funciones de la forma:

$$\sigma(x) = \alpha \cdot \bar{x} + \beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

Notemos que una reflexión particular, respecto del eje real, es la conjugación. Componiendo las similitudes directas con la conjugación, obtenemos todas las *similitudes indirectas*.

Semejanza de polígonos

Consideremos un polígono convexo P con vértices $v_1, v_2, \dots, v_n$. Un polígono convexo Q es semejante a P si, y solo si, existe una similitud que transforma P en Q . En particular, los vértices de Q estarán dados por:

$$\sigma(v_1), \sigma(v_2), \dots, \sigma(v_n).$$

Triángulos equiláteros

En virtud de lo establecido anteriormente, se tiene que el triángulo uvw , *orientado positivamente* (en sentido antihorario), es equilátero si, y solo si:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\bar{\zeta} \\ u & v & w \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

donde $\zeta = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, es decir:

$$w + \zeta \cdot u + \bar{\zeta} \cdot v = 0.$$

Si el triángulo equilátero estuviera orientado negativamente, la condición sería:

$$w + \bar{\zeta} \cdot u + \zeta \cdot v = 0.$$

Si, al margen de la orientación, solo quisiéramos saber si el triángulo uvw es equilátero o no, entonces el criterio sería:

$$(w + \zeta \cdot u + \bar{\zeta} \cdot v) \cdot (w + \bar{\zeta} \cdot u + \zeta \cdot v) = 0$$

o sea:

$$u^2 + v^2 + w^2 = uv + vw + wu.$$

Esta última identidad da una condición necesaria y suficiente para que el triángulo uvw sea equilátero.

Las transformaciones

A continuación describimos las transformaciones del plano que con frecuencia se usan en la geometría del mismo, en términos de operaciones de números complejos.

Traslación

La traslación es la isometría más simple y su expresión es de la forma:

$$\mu(x) = x + \beta$$

donde β es un número complejo dado.

Rotación

La rotación alrededor del punto p y ángulo θ puede obtenerse como:

$$\sigma(x) = \mu \cdot (x - p) + p = \mu \cdot x + (1 - \mu) \cdot p$$

Aquí $\mu = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. Los pasos dados son: trasladamos para que p quede en el origen y x en $x - p$, rotamos $x - p$ alrededor del origen barriendo un ángulo de amplitud θ y obteniendo $\mu \cdot (x - p)$, finalmente trasladamos para que el segmento de vértices $0, \mu \cdot (x - p)$ se transforme en el segmento de vértices $p, \mu \cdot (x - p) + p$.

Reflexión

La reflexión respecto de la recta que pasa por u y $v, u \neq v$, se obtiene usando la conjugación:

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{v-u}{|v-u|} \cdot \frac{\overline{v-u}}{|v-u|} \cdot (x-u) + u = \\ &= \frac{v-u}{v-u} \cdot \overline{(x-u)} + u = \\ &= \frac{v-u}{v-u} \cdot \bar{x} + \frac{\bar{v}u - v\bar{u}}{v-u} \end{aligned}$$

En este caso los movimientos son: trasladamos para que el segmento uv se transforme en el segmento $0(v-u)$, consecuentemente x queda en $x-u$; giramos para que el segmento $0(v-u)$ quede sobre el semieje de los números reales positivos; conjugamos, luego giramos y trasladamos realizando los movimientos inversos para retornar el segmento uv a su posición original.

Proyección ortogonal

Dado que la proyección ortogonal de un punto x sobre la recta que pasa por u y v es el promedio entre x y la reflexión de x respecto de dicha recta, se tiene:

$$\pi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{u-v}{u-v} \cdot \bar{x} + \frac{\bar{v}u - v\bar{u}}{u-v} \right).$$

Si la recta pasa por el origen, por ejemplo $u = 0$ se tiene:

$$\tau(x) = \frac{v}{v} \cdot \bar{x}$$

y en este caso la proyección es:

$$\pi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{v}{v} \cdot \bar{x} \right).$$

La circunferencia unitaria

Como puede apreciarse, en la mayoría de las expresiones consideradas intervienen los números complejos y sus conjugados. Si estos números se toman en la circunferencia unitaria, en general, estas expresiones tienen formas más reducidas a partir de la identidad $\bar{w} = w^{-1}$, válida para los elementos de la circunferencia unitaria.

Recta por uv

La ecuación de la recta que pasa por la cuerda uv es:

$$x + uv \cdot \bar{x} = u + v.$$

En efecto, la ecuación implícita de la recta que pasa por la cuerda uv es:

$$\det \begin{bmatrix} u & v & x \\ u^{-1} & v^{-1} & \bar{x} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

o bien operando:

$$\det \begin{bmatrix} u-v & v & x \\ v-u & 1 & uv\bar{x} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

es decir:

$$\det \begin{bmatrix} -1 & v & x \\ 1 & 1 & uv\bar{x} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

y desarrollando este determinante por la última columna se obtiene la ecuación anunciada.

Reflexión

Teniendo en cuenta que si $|u| = |v| = 1$, entonces:

$$\overline{v-u} = \frac{u-v}{uv}$$

luego la reflexión respecto de la recta por la cuerda uv está dada por:

$$\tau(x) = uv(\overline{x-u}) + u = u + v - uv \cdot \bar{x}.$$

Proyección

La proyección ortogonal $\pi(x)$ del número x sobre la recta que pasa por la cuerda uv está dada por el promedio entre x y su reflexión $\tau(x)$, esto es:

$$\pi(x) = \frac{1}{2}(x + u + v - uv \cdot \bar{x}).$$

Cuerdas

La intersección de las prolongaciones de las cuerdas ab y cd en la circunferencia unitaria es:

$$\frac{ab(c+d) + cd(a+b)}{ab - cd}.$$

En efecto, basta resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + ab\bar{x} = a + b \\ x + cd\bar{x} = c + d \end{cases}.$$

Recta tangente

La recta tangente a la circunferencia unitaria en el punto a es la recta perpendicular al segmento $0a$ que pasa por a . Se tiene que su ecuación está dada por:

$$\bar{a} \cdot x + a \cdot \bar{x} = 2.$$

Podemos además encontrar la intersección de dos rectas tangentes resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \bar{a} \cdot x + a \cdot \bar{x} = 2 \\ \bar{b} \cdot x + b \cdot \bar{x} = 2 \end{cases}$$

para obtener:

$$x = \frac{2(b-a)}{\bar{a}b - a\bar{b}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Ortocentro

El ortocentro del triángulo abc inscripto en la circunferencia unitaria es:

$$a + b + c.$$

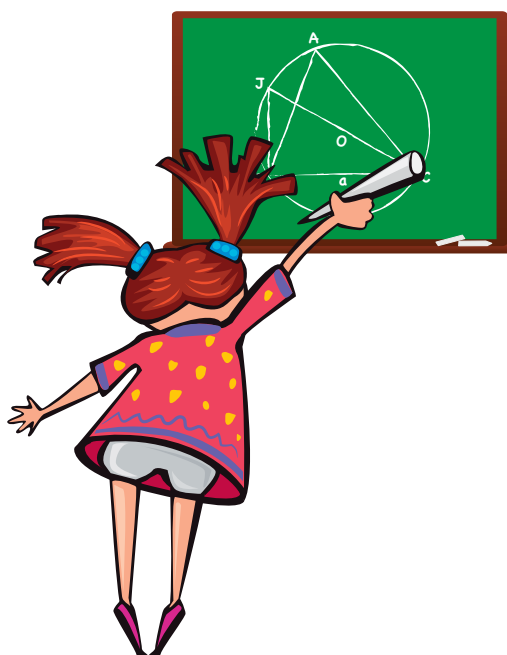
En efecto, teniendo en cuenta la ecuación de la recta perpendicular al segmento ab que pasa por c :

$$\det \begin{bmatrix} a & b & x-c \\ \bar{a} & \bar{b} & \overline{x-c} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Tomando $x = a + b + c$ se tiene:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a & b & a+b \\ \bar{a} & \bar{b} & \overline{a+b} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ \bar{a} & \bar{b} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= -2(a\bar{a} - b\bar{b}) = 0 \end{aligned}$$

Del mismo modo se comprueba que $a + b + c$ está en las rectas perpendiculares a los segmentos bc y ca que pasan por a y b respectivamente.



Problemas propuestos



1. Dados a y b complejos no nulos, mostrar que las raíces cuadradas de $a \cdot b$ están sobre la bisectriz del ángulo que forman los vectores a y b .

2. Hallar una expresión para la distancia desde un punto u a la recta de ecuación $aw + \bar{a}w + b = 0$.

3. Los números $1 + 2i$ y $-2 + 3i$ son vértices de un cuadrado. Hallar los posibles vértices y centros del cuadrado.

4. Sean abc y abd dos triángulos equiláteros, $c \neq d$. Mostrar que $c + d = a + b$ y que $cd = a^2 - ab + b^2$.

5. Sean a, b, c tres números complejos unitarios tales que $a + b + c = 0$. Mostrar que el triángulo abc es equilátero.

6. Mostrar que una condición necesaria y suficiente para que el triángulo abc sea equilátero es que:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0.$$

7. Descomponer el polinomio $x^9 - 1$ en tres factores polinomiales, siendo cada factor de grado tres.

8. Si los vértices de un triángulo y su circuncentro están en una cuadrícula, mostrar que el ortocentro del triángulo también está en la cuadrícula.

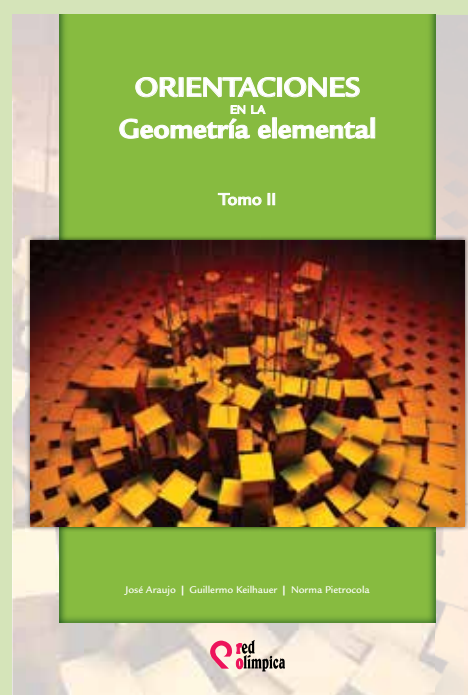
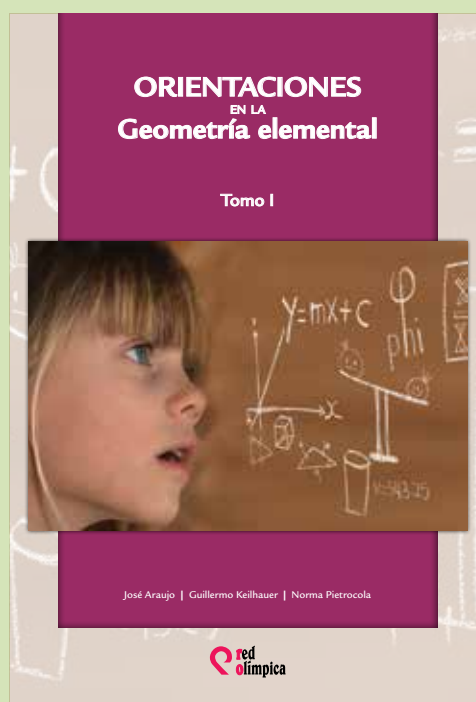
9. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son los vértices de un polígono regular inscrito en la circunferencia unitaria, mostrar que:

$$\frac{2a_i a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}}$$

son los vértices de un polígono regular. Aquí convenimos en que $a_{n+1} = a_1$.

10. *Teorema de Pascal*. Mostrar que, si un hexágono puede inscribirse en una circunferencia, los puntos en las intersecciones de las prolongaciones de pares de lados opuestos están alineados.

ORIENTACIONES EN LA GEOMETRÍA ELEMENTAL



Tomos I y II

José Araujo, Guillermo Keilhauer y Norma Pietrocola

Estos libros reúnen una serie de Notas escritas por matemáticos profesionales, con el fin de incorporar al área curricular algunas ideas importantes y temáticas interesantes, en forma clara y comprensible.

Pensemos que ya hay una gran audiencia de estudiantes de primaria y secundaria, incluso de maestros, profesores y padres, que se incorporan a los **Torneos Geométricos** y a **Pensar con imaginación**, y que reclaman por una Educación acorde con estos tiempos.

Estas Notas varían en su dificultad, e incluso dentro de un solo libro algunas partes requieren un mayor grado de concentración que otras. Así, aunque el lector necesita pocos conocimientos técnicos para comprender, deberá hacer un esfuerzo intelectual conforme con sus capacidades teniendo siempre este material a la vista.

Pedidos a: ✉ fenchu@oma.org.ar
☎ 11 4826 8976
☎ +54 9 11 5035 7537



Ya estamos realizando envíos de todos nuestros títulos
a todo el país bajo el sistema contra reembolso o delivery.
¡Hacé tu pedido!

BIBLIOGRAFÍA



Área y Volumen en la Geometría Elemental
José Araujo, Guillermo Keilhauer, Norma Pietrocola, Valeri Vavilov -Red Olímpica-

Materiales de Matemática para 6° año EGB
Carlos Bosch Giral, Luz María Marván Garduño, Agustín Prieto Huesca -Red Olímpica-



Resolviendo Problemas de Matemática
Juan Ignacio Fuxman Bass -Red Olímpica-

Sorpresas Geométricas
Claudi Alsina -Red Olímpica-



Viaje al país de los rectángulos
Claudi Alsina -Red Olímpica-

Colección de Problemas Ñandú
Julia Seveso, Graciela Ferrarini -Red Olímpica-



Colección New Mathematical Library de la Mathematical Association of America

- Aritmética Elemental para la Formación Matemática. Volumen 1. *Enzo Gentile*
- Aritmética Elemental para la Formación Matemática. Volumen 2. *Enzo Gentile*
- Retorno a la Geometría. *H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer*
- El Ingenio en las Matemáticas. *Ross Honsberger*
- Métodos Matemáticos de la Ciencia. *George Pólya*



Olimpiadas de Mayo XVII al XXIV
Patricia Fauring, Flora Gutiérrez -Red Olímpica-

Apología de un matemático
Godfrey Harold Hardy -Red Olímpica-

